This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

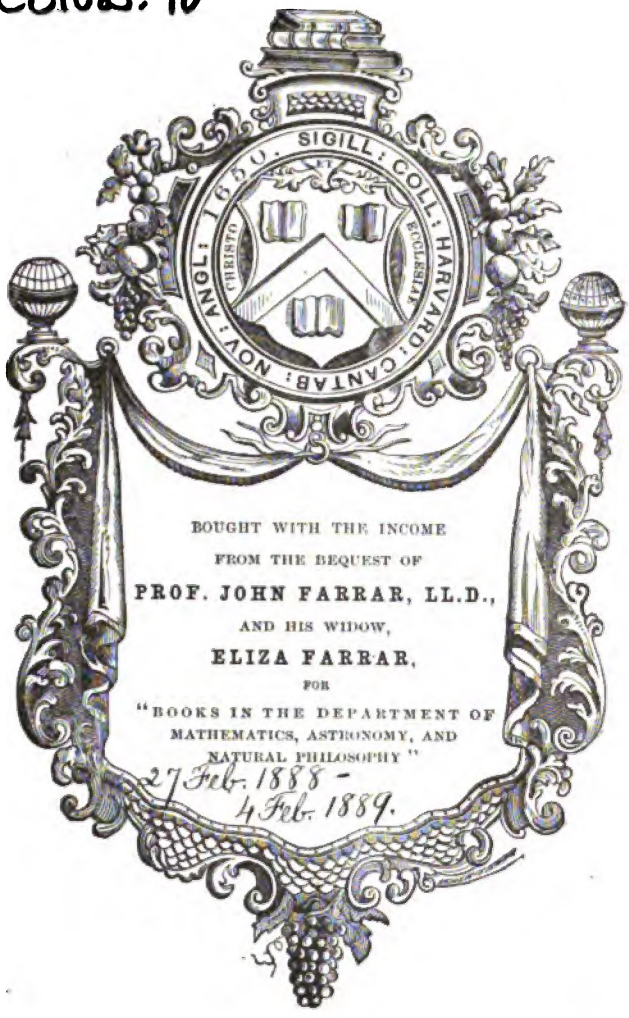
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

WIDENER LIBRARY
HX GSTK E

Sci 1085.70

Bd. March, 1889.



SCIENCE CENTER LIBRARY

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

REPERTORIUM

DER

P H Y S I K.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,
A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG

~~134.62~~
Sci 1085.70

1888, Feb. 27 - 1889, Feb. 4.
Farrar fund.

Inhalt.

Seite

Experimentaluntersuchungen über magnetische Coercitivkraft. Von L. Külp . 1
Zur Polbestimmung der Influenzmaschine. Von K. L. Bauer 8
Schulmessung der scheinbaren Grösse der Sonne. Von A. Kurz 11
Zur Theorie meiner Versuche über Contactelektricität. Von Prof. Franz Exner 12
Die Widerstandsveränderungen von Wismuth, Antimon und Tellur im magnetischen Felde. Von Albert v. Ettingshausen 17
Ueber Convection der Elektricität durch Verdampfen. Von Dr. Ernst Lecher 56
Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn E. Lampe zu meiner Abhandlung: „Die Schwere analytisch dargestellt als ein mechanisches Princip rotirender Körper". Von J. W. Häussler 60
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 24. Mai 1887 63
Protokoll der ordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 25. October 1887 64
Ueber die Bahn eines freien Theilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe. Von Friedrich Roth. (Schluss.) 65
Seismograph mit elektrischem Registrirapparat. Von Dr. Carl Fröhlich . 79
Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation. Von Prof. Adalbert Rysánek 90
Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite. Von Dr. O. Tumlirz 115
Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 8. November 1887 133
Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 22. November 1887 134
Eingesendete Bücher 135
Ueber den Einfluss des Magnetismus und der Wärme auf den elektrischen Widerstand des Wismuths und dessen Legirungen mit Blei und Zinn. Von Edmond van Aubel 137
Ueber Verdampfung. Von K. Fuchs 141
Ueber die barometrische Höhenmessformel. Von Dr. J. M. Pernter . . . 161
Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung. Von August Häussler 179
Graphische Darstellung der Linsenformel. Von Dr. Alois Handl 197

Seite
Ueber Messungen der irdischen Schwerkraft. Von A. Kurz 202
Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung. Von August Häussler. (Schluss.) 209
Ueber die elektromotorische Gegenkraft im galvanischen Flammenbogen. Von H. Wild 224
Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft. Von Prof. Franz Exner 225
Absolute diamagnetische Bestimmungen. Von Albert v. Ettingshausen . 252
Ueber die durch Bewegung eines im homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektricums hervorgerufene elektrodynamische Kraft. Von W. C. Röntgen 260
W. Weber's und R. Kohlrausch's absolute Messung des Elektricums. Von A. Kurz 266
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 6. December 1887 269
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 10. Januar 1888 270
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 24. Januar 1888 271
Berichtigung zum letzten Theile der Abhandlung von F. Roth 272
Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft. Von Prof. Franz Exner. (Schluss.) 273
Ueber den zweiten Kirchhoff'schen Satz. Von O. Chwolson 291
Ueber die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales. Von O. Chwolson 294
Ueber den Zusammenhang von Oberflächenspannung, Oberflächendichte und oberflächlicher Wärmeentwicklung. Von K. Fuchs 298
Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Bewegungsgeschwindigkeit von Flüssigkeitswellen. Von A. Ahrendt 318
Replik auf die „Erwiderung" des Herrn J. W. Häussler. Von E. Lampe 324
Ueber die Rückwirkung der Flutbewegung auf den Mond. Von K. Fuchs 328
Ein einfacher Kohlenhalter zum Löthen und Schweissen der Metalle mittels des elektrischen Lichtbogens. Von Dr. B. Nebel 330
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 7. Februar 1888 334
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 21. Februar 1888 335
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 6. März 1888 336
Ueber Disjunctionsströme. Von Dr. C. A. Mebius 337
Ueber den Einfluss der Flut auf die Bewegungen des Fluträgers und des Flurerzeugers. Von K. Fuchs 348
Ueber die Brechungsexponenten der Metalle. Von A. Kundt 357
Ueber den Glimmer als Dielektricum. Von Dr. Ignaz Klemencic . . . 375
Zur genaueren Bestimmung des specifischen Gewichtes. Von A. Kurz . . 396
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 20. März 1888 399

Seite
Eingesendete Bücher 400
Ueber ein merkwürdiges optisches Problem von Maxwell. Von Dr. Ludwig Matthiessen 401
Experimentaluntersuchungen über magnetische Coercitivkraft. Von L. Külp 408
Folgerungen aus den Eigenschaften der elektrischen Leitungsfähigkeit von Salzlösungen. Von Gustav Jäger 416
Ueber die optischen Eigenschaften des Tabaschir. Von E. Brücke . . . 434
Versuche und Bemerkungen über den galvanischen Lichtbogen. Von H. Luggin 446
Bestimmungen der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten. Von Theodor Wähner 461
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 17. April 1888 470
Ueber absolute Maasssysteme. Von W. Winter 471
Beobachtungen über atmosphärische Elektricität. Von J. Elster und H. Geitel 486
Ueber die Verwendung des Mikrophons (Transmitters) bei elektrischen Widerstandsmessungen mit dem Telephon und über den Einfluss des Gesichtsorganes auf den Gehörsinn. Von Dr. B. Nebel 490
Ueber den normalen irregulären Astigmatismus. Von Sigmund Exner . . 495
Ueber das elektrische Verhalten des Quarzes. I. Von Dr. Paul Czermak . 511
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 15. Mai 1888 535
Eingesendete Bücher 536
Ueber die Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen. Von Ludwig Gartenschläger . 537
Die Bestimmung der Durchschnittstemperatur durch das Gewicht von verdampftem Wasser und die Messung des relativen Dampfdrucks. Von W. Müller-Erzbach 575
Ueber eine merkwürdige Aufreissung des Kupfers durch den elektrischen Strom. Von Dr. B. Nebel 586
Der Elasticitätsmodul und die Schallgeschwindigkeit. Von A. Kurz . . . 592
Entgegengekuppelte Fadenwagen zur absoluten Kraftmessung. Von G. Jaumann 600
Ueber eine einfache Vorrichtung zur Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metalldrähten. Von Prof. Dr. A. Wassmuth 605
Ueber die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten. Von K. Fuchs 614
Die Trägheitscurve auf wagerechter Ebene bei dem Vorhandensein eines Reibungswiderstandes, der von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängt. Von F. Roth 648
Volumen und Temperatur der Körper, insbesondere der Flüssigkeiten. Von Prof. Dr. A. Weilenmann 660
Ueber die Einführung in die beiderlei elektrischen Systeme. Von A. Kurz 674
Weitere Beobachtungen über atmosphärische Elektricität. Von Prof. Franz Exner 677
Der Fernmessinductor, ein neues elektrisches Instrument. Von Dr. Paul Moennich 696

Seite

Ueber das elektrische Verhalten des Quarzes. II. Von Dr. Paul Czermak 702

Ueber störende Einflüsse am Bunsen'schen Photometer und diesbezügliche Abänderungen. Von Dr. B. Nebel 724

Ein Feind der Isolation elektrischer Hausleitungen. Von Dr. B. Nebel . . 731

Ueber die Energie und die Gleichgewichtsverhältnisse magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper. Von Dr. Gottlieb Adler 733

Messungen der Transversaltöne gespannter Drähte. Von A. Kurz 759

Ueber Sauerstoffzellen. Von Walther Wolff 762

Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der Emission von Licht- und Wärme-Wellen. Von August Häussler 782

Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 29. Mai 1888 795

Eingesendete Bücher 796

Register 797

XXIV. Band. 1. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 1. Heftes.

Experimentaluntersuchungen über magnetische Coercitivkraft. Von L. Külp. S. 1.
Zur Polbestimmung der Influenzmaschine. Von K. L. Bauer. S. 8.
Schulmessung der scheinbaren Grösse der Sonne. Von A. Kurz. S. 11.
Zur Theorie meiner Versuche über Contactelektricität. Von Prof. Franz Exner. S. 12.
Die Widerstandsveränderungen von Wismuth, Antimon und Tellur im magnetischen Felde. Von Albert v. Ettingshausen. S. 17.
Ueber Convection der Elektricität durch Verdampfen. Von Dr. Ernst Lecher. S. 56.
Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn E. Lampe zu meiner Abhandlung: „Die Schwere analytisch dargestellt als ein mechanisches Princip rotirender Körper". Von J. W. Häussler. S. 60.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 24. Mai 1887. S. 63.
Protokoll der ordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 25. October 1887 S. 64.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,
Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 12).

Jahrgang 1888 Nr. 1 enthält:

Rundschau. — **Ueber den Widerstand des elektrischen Lichtbogens und Dynamomaschinenankers.** Von Dr. K. Feussner in Berlin. — **Gegen die Contacttheorie.** Von H. Götz und A. Kurz in Augsburg. — **Drahtumschalter für Telephonanlagen.** Von J. Baumann. — **Die Verwendung des Hauptstromes zur Fernspannungsregulirung und zur Gleichspannungsregulirung der Nebenschlussdynamos.** Von Wilhelm Lahmeyer. — **Eine einfache Methode zur Vergleichung magnetischer Felder.** Von H. Luggin. — **Literatur.** Dr. O. Frölich, Handbuch der Elektricität und des Magnetismus für Techniker. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Telephonie. Fernsprechverbindung Leipzig, Halle und Berlin. — Telegraphie. Erwerbung des Privatkabels zwischen Deutschland und England. — Elektrische Beleuchtung. Die elektrische Centralbeleuchtungs-Anlage in Lübeck. — Elektrische Beleuchtung in Dresden. — Eröffnung der Elektricitätswerke in Salzburg. — Neues System elektrischer Beleuchtung von Zügen. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinen-Ausstellung in München 1888. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 2 enthält:

Rundschau. — **Berliner's Universaltransmitter.** Von F. Uppenborn. — **Das Winkelphotometer von S. Elster.** — **Ueber die Anordnung von Glühlichtleitungen für Centralstationen.** Von Ph. Seubel. — **Literatur.** Thompson, Elementare Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus. — Dr. Oscar May, Anweisung für den elektrischen Lichtbetrieb für Inhaber elektrischer Beleuchtungsanlagen und deren Maschinisten. — Dr. Alfred Ritter v. Urbanitzky, Die Elektricität des Himmels und der Erde. — E. Hospitalier, L'Électricité dans la maison. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** — Personalnachrichten. Prof. Dr. W. Kohlrausch zum Mitglied der Kaiserl. Leop.-Karol. deutschen Akademie ernannt. — Franz Carl Guilleaume. — Telephonie. Missbrauch der Telephons. — System Ryssel berghe in China. — Elektrometallurgie. Elektrolytisches Aluminium. — Elektrische Beleuchtung. Recognoscirungs-Lampe für militärische Zwecke. — Elektr. Beleuchtung in Frankfurt a. M., Mainz, Mülhausen, Lübeck, Halle a. S., Görlitz. — Waggonbeleuchtung der sächsischen Staatsbahnen. — Installationen von Theaterbeleuchtungen der Firma Gans & Co. — Theaterbeleuchtung in Nancy. — Verschiedenes. Sitzung des Elektrotechnischen Vereins zu Berlin. — Schöner Beleuchtungseffect. — Elektrotechnische Bosheiten. — Ueber die Anlage von Contact-Vorrichtungen zur Controle der Zugsgeschwindigkeit. — Elektrische Uhren. — Der Eiffelthurm zu Paris. — Ursache des Brandes des Grand Theater in Islington. — **Finanzielle und industrielle Nachrichten.** — **Patente.** — **Briefkasten der Redaction.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, Verlagsbuchhandlung.

Experimentaluntersuchungen über magnetische Coercitivkraft.

Fünfte Abhandlung.

Von

L. Külp.

Die Magnetisirungscurve für den sog. remanenten Magnetismus.

30. Um nun vor allem in das Wesen des remanenten Magnetismus einzudringen, habe ich mich bemüht, die Magnetisirungscurve für denselben klar zu legen. Die Magnetisirungscurve für den remanenten Magnetismus ist jene Function, welche die Abhängigkeit der jeweiligen remanenten Magnetismen von den zuvor wirksam gewesenen inducirenden Kräften darstellt. Ueber diese Function wurde bereits in 27 einige Aufklärung gegeben. Es wurde dort unter c) und d) gesagt, dass der remanente Magnetismus mit aufsteigenden inducirenden Kräften wächst und baldigst ein Maximum erreicht. Ferner wurde darauf hingewiesen, dass der positive und der negative remanente Magnetismus einen ähnlichen Verlauf aufweisen und im Maximum nicht sehr voneinander verschieden sind. Ich halte diese Thatsache für so fundamental, dass ich dieselbe nachstehend noch einmal durch eine Reihe von Tabellen belege. Man hat diese Tabellen genau, so wie die in der vorigen Abhandlung mitgetheilten Versuchsreihen, zu verstehen. Die positiven und negativen remanenten Magnetismen R_+ und R_- sind in Scalentheilen der Spiegelbussole, die inducirenden Kräfte in Tangentenwerthen, der an der Tangentenbussole beobachteten Ablenkungswinkel ausgedrückt.

Eisendraht.

Länge = 160 mm und Dicke = 1 mm.

Stromstärke	R_+	R_-
0,05241	18	7,5
0,13609	44	41
0,22169	50,5	48
0,34433	53	50
0,45573	55	54
0,57735	55	55

Eisendraht.

Länge = 130 mm und Dicke = 1 mm.

Stromstärke	R_+	R_-
0,06554	11,5	10
0,12722	27	22
0,17633	33	28
0,29621	33	28
0,34085	35	30

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

Stromstärke	R_+	R_-
0,04512	4	3
0,11836	12,5	9
0,17233	16	15
0,25862	16	16
0,35904	16,5	16
0,47234	17,5	16,5
0,57735	17,5	17,5

Eisendraht.

Länge = 90 mm und Dicke = 1,5 mm.

Stromstärke	R_+	R
0,06554	9	1
0,12869	11	3
0,20345	12	5
0,32492	13	8
0,39391	12	9,5
0,48234	12	11
0,56003	12	11
0,66189	12	12

Aus diesen Versuchsreihen kann man wiederum die in 27 gemachten Schlüsse ziehen. Der positive und der negative remanente Magnetismus haben im allgemeinen eine ähnliche Magnetisirungscurve.

Im Anfange dieser Magnetisirungscurve ist jedoch R_+ stets grösser als R_-, ein Verhältnis, welches auch im weiteren Verlaufe der Magnetisirungscurve noch fortdauert, schliesslich aber zu einer annähernden Gleichheit der beiden Werthe führt. R_+ und R_- im Maximum sind annähernd gleich.

31. Ich gehe nunmehr dazu über, die eben besprochenen Verhältnisse mathematisch zu formuliren, oder mit andern Worten, die Gleichung der Magnetisirungscurve für den remanenten Magnetismus aufzustellen. Einige allgemeine Erwägungen und Erfahrungen sind hier vorauszuschicken. Bezeichnen wir den remanenten Magnetismus wie seither mit R, und die Werthe der zuvor angewandten magnetisirenden Kraft mit x, so lautet die aufzustellende Gleichung ganz allgemein:

$$R = f(x).$$

Aus 27 und 30 ist ersichtlich, dass diese Function eine stetig verlaufende sein muss, und dass die Werthe von R mit aufsteigenden x wachsen und bald ein Maximum erreichen müssen, auf welchem Maximum sie dann bei noch weiter aufsteigenden x beharren.

Eine Magnetisirungscurve für den in Rede stehenden remanenten Magnetismus existirt daher nur innerhalb des Werthes $x = o$ und jenes Werthes von x, wo R sein Maximum erreicht. Diesen letztgenannten Werth von x bezeichne ich der Kürze halber mit x_ω.

Die Function:

$$R = f(x)$$

muss innerhalb der geringen Grenzen $x = o$ und $x = x_\omega$ verlaufen, und da die noch grösseren magnetisirenden Kräfte keinen stärkenden Einfluss auf R ausüben, so haben wir auch nicht nöthig, dieselben bei unserer Gleichung in Rücksicht zu ziehen. An der Hand dieser Erwägungen habe ich die Function:

$$R = f(x)$$

nach meinen Versuchen empirisch festzustellen gesucht und in den verschiedensten Formen auf meine Versuchsreihen angewandt, mit algebraischen Functionen kam ich zu keinem einzigen befriedigenden Resultat, die beobachteten und berechneten Curven wiesen zu bedeutende Unterschiede auf. Ich versuchte es daher mit Kreisfunctionen und gelangte nach vielen Bemühungen zu einer Gleichung, welche die Versuchsreihen in ziemlich befriedigender Weise wiedergibt. Diese Gleichung ist für den positiven remanenten Magnetismus aufgestellt worden, findet aber mit einer geringen Modification auch auf den negativen remanenten Magnetismus Anwendung.

32. Bezeichnet R_+ den nach der positiven Seite remanenten Magnetismus, ist γ eine Constante, so wird die Magnetisirungscurve durch die Formel wiedergegeben:

$$R_+ = \gamma \sin \alpha,$$

wo α aus der Gleichung hervorgeht:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{x_\omega - x},$$

wie bereits in 31 erwähnt, ist x_ω diejenige magnetisirende Kraft, bei welcher der remanente Magnetismus R_+ zuerst sein Maximum erreicht, x ist die jeweilige magnetisirende Kraft. γ ist einfach der Maximalwerth von R_+. Nach diesen äusserst einfachen Gleichungen sind in den folgenden Tabellen die remanenten Magnetismen berechnet und mit den beobachteten Magnetismen sowie den magnetisirenden Kräften zusammengestellt.

Eisendraht.

Länge = 180 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_+	Beobachtete Werthe von R_+
0,06554	15	11,5
0,12722	26,76	27
0,17638	31,69	33
0,29621	34,89	33
0,84085	35	35

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_+	Beobachtete Werthe von R_+
0,05241	5,7	6
0,12899	13,9	13,5
0,20800	17,7	16
0,29097	18,8	18
0,86892	19	19

Eisendraht.

Länge = 90 mm und Dicke = 1,5 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_+	Beobachtete Werthe von R_+
0,05241	4	5
0,13758	9,95	9
0,19488	11,8	10
0,26795	12,7	12
0,37024	13	13

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_+	Beobachtete Werthe von R_+
0,04512	6	4
0,11836	13,7	12,5
0,17283	15,86	15
0,25862	16	16

Eisendraht.

Länge = 160 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_+	Beobachtete Werthe von R_+
0,04866	18	15
0,11894	43,6	44
0,20345	55,8	56
0,30573	57	57

33. Gehen wir nun zu dem negativen remanenten Magnetismus über. Die Formel für die Magnetisirungscurve muss bei der bedeutenden Uebereinstimmung zwischen dem positiven und negativen remanenten Magnetismus eine ganz ähnliche sein, wie in 32. Der positive remanente Magnetismus steigt nur etwas stärker an als der negative, und diesem Umstand wird dadurch leicht Rechnung getragen, dass man tg α

(vergl. 32) weniger rasch anwachsen lässt. Für den negativen remanenten Magnetismus habe ich daher folgende Formel gefunden:

$$R_{-} = \gamma \sin \alpha,$$

wo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{x_{\omega} - x}.$$

Die Constanten haben hier dieselbe Bedeutung für den negativen remanenten Magnetismus wie in 32 für den positiven. In den folgenden Tabellen habe ich in gleicher Weise die berechneten und beobachteten Werthe nebeneinander gestellt.

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_{-}	Beobachtete Werthe von R_{-}
0,05241	2,7	4
0,12899	8	12
0,20800	12,6	13
0,29097	15	14
0,36892	16	16

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_{-}	Beobachtete Werthe von R_{-}
0,04512	2,5	3
0,11836	7,7	9
0,17238	9	10
0,25862	16	16
0,35904	17,5	17,5

Eisendraht.

Länge = 90 mm und Dicke = 1,5 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_{-}	Beobachtete Werthe von R_{-}
0,06554	1,4	1
0,12869	3,8	3
0,20345	6,5	5
0,32492	9,9	8
0,39391	10,7	9,5
0,48234	11	11

Eisendraht.

Länge = 160 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_-	Beobachtete Werthe von R_-
0,04366	15	10,5
0,11394	44	43
0,20345	56	56

Eisendraht.

Länge = 130 mm und Dicke = 1 mm.

Magnetisirende Kraft	Berechnete Werthe von R_-	Beobachtete Werthe von R_-
0,08749	15,5	18
0,19891	31	29,5
0,25862	33	33

34. Aus den Tabellen in 32 und 33 ist ersichtlich, dass der remanente Magnetismus mit aufsteigenden inducirenden Kräften ganz allgemein der Formel folgt:

$$R = \gamma \sin \alpha.$$

Diese Formel ergibt allerdings noch Differenzen mit den beobachteten Magnetisirungscurven. Da aber die Werthe dieser beobachteten Magnetisirungscurven erfahrungsgemäss mancherlei Schwankungen und Unregelmässigkeiten aufweisen, so können wir die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen als vollkommen befriedigend betrachten. Wenigstens halte ich dafür, dass keine Formel aufzufinden ist, welche die Magnetisirungscurve für den remanenten Magnetismus besser wiedergibt, als die von mir aufgestellte Gleichung:

$$R = \gamma \sin \alpha.$$

Zur Polbestimmung der Influenzmaschine.

Von

K. L. Bauer.

Das von Hrn. Otto Mund[1]) mitgetheilte Verfahren zur Polbestimmung der Influenzmaschine ist gewiss das einfachste; doch wundert mich, dass es Hrn. Mund „trotz eifrigen Suchens in der einschlägigen Literatur" nicht gelang, eine frühere Beschreibung der „positiven Leuchtstrecke" des Funkens aufzufinden. Schon im vorigen Jahre las man in der von Dr. Oskar Schneider in Leipzig redigirten Centralzeitung für Optik und Mechanik[2]):

„Dieses angeblich einfachste Verfahren[3]) ist immer noch zu umständlich, wie Dr. Otto Mund der Zeitschr. f. Elektrot. schreibt, weil man dazu stets einer Flamme bedarf. Das wirklich einfachste Unterscheidungsmerkmal zwischen positivem und negativem Pole der Influenzmaschine ist bereits im Jahre 1868 (Medic. Jahrb. der k. k. Gesellsch. der Aerzte in Wien, 1868) von Prof. Schwanda angegeben worden und ergibt sich bei Betrachtung des zwischen den Elektroden der Maschine übergehenden Funkenstromes ohne weiteres von selbst. Es zeigt sich nämlich bei Weglassung der Leidener Flasche und einem Elektrodenabstande von ca. 1—1½ cm in unmittelbarer Nähe der positiven Elektrode eine ca. 1—2 mm lange, hell leuchtende Strecke, welche von der violetten Färbung des übrigen Funkenfadens auch bei Tage deutlich zu unterscheiden ist. Es ist also nur nöthig, die Leidener Flasche, falls sie vorher eingeschaltet war, einen Augenblick zu entfernen und die Elektroden auf ca. 1½ cm zu nähern, um sofort über die Pole der Maschine orientirt zu sein." — Ueber die vorstehende Mittheilung der Zentralzeitung wurde alsbald auch in den Beiblättern zu Wiedemann's Annalen berichtet[4]).

In dem weniger einfachen, von dem Berliner Mechaniker Hrn. J. Robert Voss beschriebenen Verfahren[5]) ist ein Irrthum untergelaufen.

1) Mund, Wied. Ann. Bd. 31 S. 138 (1887).

2) Jahrg. VII S. 46 (1886) Nr. 4 vom 15. Februar.

3) Das von dem Berliner Mechaniker J. Rob. Voss vorgeschlagene.

4) Beibl. 10 S. 251 (1886).

5) Centralzeitung für Optik und Mechanik, Jahrg. VI S. 258 (1885).

Herr Voss sagt nämlich: „Um den schnellsten und sichersten Nachweis zu liefern, auf welcher Seite positive, auf welcher sich negative Elektricität befindet, bedient man sich mit grösster Sicherheit einer Stearin- oder Talgkerze, oder auch einer Spirituslampe. Wird dieselbe zwischen die Elektroden der Maschine gebracht, die Maschine alsdann in Thätigkeit gesetzt, so bemerkt man sehr deutlich, dass die eine Elektrode die Flamme anzieht, während die andere dieselbe abstösst. Nach Untersuchung der verschiedenen Art der Elektricität konnte ich constatiren, dass diejenige Elektricität, welche die Flamme anzieht, positive, die, welche sie abstösst, aber negative Elektricität ist.“ Der wahre Sachverhalt ist indessen gerade umgekehrt: Die Flamme wendet sich von der positiven Elektrode ab gegen die negative hin. Ich empfehle die Erscheinung in folgender Form als schönen Vorlesungsversuch: Man richte einen Bunsenbrenner so vor, dass er eine kleine, hellleuchtende Flamme gibt, vernichte die Flamme durch Zudrücken des Schlauches für einen Augenblick, oder durch Ausblasen, und führe dann den Brenner gegen die erregte Influenzmaschine, so dass das Leuchtgas zwischen den voneinander entfernten kugelförmigen Elektroden emporströmt; sofort entzündet auch der schwach leuchtende Funkenstrom das aus Gas und Luft entstandene Gemisch und die entstandene kleine leuchtende Flamme wendet sich sogleich nach der negativen Elektrode. Wiederholung des Versuchs mit einer eben ausgeblasenen Kerze.

Ich bin übrigens fest überzeugt, dass die beiden oben erwähnten Kennzeichen, die Lichtstielchen an der positiven Elektrode und die Bewegung einer Flamme gegen die negative Elektrode hin, längst bekannt waren, ehe man eine Ahnung von der Influenzmaschine hatte. Es klingt dies im Augenblick vielleicht etwas paradox, ist aber vollkommen begründet. Zur Stütze meiner Behauptung erlaube ich mir, nur einen älteren Aufsatz von William Nicholson in Erinnerung zu bringen, welcher 1802 im Journ. of natur. philos. erschien und in Gilbert's Annalen übersetzt ist, unter dem Titel: „Instrumente, durch welche die beiden Arten von Elektricität oder die Richtung des elektrischen Stromes erkannt werden kann[1]). Hier heisst es auf S. 423:

„Dr. Franklin gab schon die Lichterscheinungen am Ende elektrischer Drähte als den vorzüglichsten Grund an, warum er glaube, dass die eine Art von Elektricität auf überflüssiger, die andere auf mangelnder Elektricität beruhe. Henley[2]) erkannte beide Elek-

1) Gilb. Ann. Bd. 23 S. 421—425 (1806).
2) William Henley, gestorben um 1779.

tricitäten an den Funken, deren Stamm stets nach dem positiven, und deren Verästelungen nach dem negativen Leiter zu gerichtet sind, so dass beim Blitze das sich verästelnde Ende stets den empfangenden Körper anzeigt, ob es die Wolke ist, oder die Erde. Seiner ausgepumpten Glasröhre bediente er sich mit Erfolg als eines Instrumentes, den Weg der Elektricität zu bestimmen, da in ihr die empfangende Kugel eine leuchtende Atmosphäre, die ausströmende Kugel Ströme von Licht zeigt. Auch bemerkte er, dass die Flamme eines kleinen Lichtes nach dem negativen Leiter hin und vom positiven Leiter abwärts geblasen wird, ein Versuch, der indes zweideutig ist. Noch andere Versuche, welche Henley in derselben Absicht anstellte, sind zu weitläufig, um hier angeführt zu werden."

Nach dieser Auffrischung einiger älteren Forschungsergebnisse dürfte hinfort nicht bezweifelt werden, dass die Urquellen der oben besprochenen Hilfsmittel zur Polbestimmung nicht in unserem Jahrhundert zu suchen sind.

Schulmessung der scheinbaren Grösse der Sonne.

Von

A. Kurz.

Der optische Theil des Pfaundler'schen Buches bespricht die runde Form der hellen Flecke, welche das Sonnenlicht, wenn es durch kleine Oeffnungen ins dunkle Zimmer gelassen wird, auf dem Schirme liefert. Nur sollte man diese Flecke nicht „Sonnenbilder" nennen.

Ich benutzte heuer zum ersten Male die Messung eines solchen Fleckes in verschiedenen Entfernungen von einem 5 mm breiten und 42 mm hohen Spalte zur Lösung der im Titel angegebenen Aufgabe. Der Heliostat sandte die Strahlen horizontal und normal zum verticalen Spalte; der Schirm zeigte, parallel zur Spaltebene gehalten, in der Entfernung 7 m einen oben und unten abgerundeten, seitlich geradlinig begrenzten Fleck von der Breite 65 mm und der Höhe 100 mm; das ist mit Rücksicht auf die Spaltgrösse und die im Vorigen angedeutete Erklärung[1]) der Form des hellen Fleckes:

$$\text{Breite } 60 + 5 \text{ mm}, \quad \text{Höhe } 60 + 42.$$

In der Entfernung von 1 statt 7 m stimmt natürlich die Messung mit der Rechnung:

$$\text{Breite } \frac{60}{7} + 5 \quad \text{Höhe } \frac{60}{7} + 42$$

und analog in der Entfernung von 2 statt 7 m.

Die Zahl 60 liefert nun die scheinbare Grösse der Sonnenscheibe, d. i. bekanntlich $\frac{1}{2}$ Grad, da für 7000 mm Radius

$$7000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ oder } \frac{1000 \cdot 11}{180}$$

wirklich 60 mm herauskommen.

---

1) Insoferne bin ich mir bewusst, Bekanntes vorzutragen, dessen obige Anwendung nur obige Mittheilung rechtfertigen mag. Aehnliches gilt u. a. auch von meiner Mittheilung über „Ein Wasserthermometer zum Vorlesungsversuch" im vorigen Bande dieser Zeitschrift, von welcher in den Beiblättern zu Wied. Ann. 8. 574 (1887) eine kurze Erwähnung geschah.

Zur Theorie meiner Versuche über Contactelektricität.

Von

Prof. **Franz Exner.**

Ich habe unlängst einige Versuche beschrieben [1]), aus denen ich die Unhaltbarkeit der Contacttheorie folgerte; das Princip derselben war folgendes: man verbindet einen isolirten Conductor dauernd mit dem Elektrometer, entfernt sodann die Erdleitung, so dass das ganze System isolirt ist und das Elektrometer in Ruhe bleibt. Aendert man nun die Capacität des Conductors, so muss nach der Contacttheorie eine Elektricitätsbewegung eintreten, der zufolge das Elektrometer je nach der Natur der verwendeten Conductoren verschiedene Ausschläge anzeigen soll.

Gegen die Richtigkeit der aus den betreffenden Versuchen gezogenen Schlüsse sind von Hrn. Hallwachs [2]) Einwände erhoben worden, die sich jedoch auf ein sehr leicht zu beseitigendes Missverständnis zurückführen lassen, das wohl zum Theil durch eine zu knappe Darstellung der Versuche und ihrer Theorie meinerseits hervorgerufen wurde. Da es sich dabei hauptsächlich um die abgeleitete Hülle handelt, in deren Innerem sich die Versuchskörper befanden, so will ich das Folgende nachtragen: die Hülle bestand aus einem cubischen Eisengitter von ca. 1 m Seitenlänge, das durch Jahre hindurch der Oxydation durch die Luft ausgesetzt war. Die Oberflächen derartig oxydirter Metalle zeigen bekanntlich ein von Null nur wenig verschiedenes Potential; es wurde dasselbe mittels eines Thomson'schen Collectors gemessen und constatirt, dass die Potentialdifferenz zwischen Gitter und Zimmerwand kleiner als 0,05 Daniell war. Wenn ich bei Mittheilung meiner Versuche auf diese Grösse weiter kein Gewicht gelegt habe, so geschah dies deshalb, weil das Potential der Hülle, wie aus dem Folgenden hervorgeht, für die Versuche gleichgiltig ist.

---

1) F. Exner, Wiener Ber. Bd. 95 S. 595 (1887) und diese Zeitschrift Bd. 23 S. 542 (1887).

2) Hallwachs, Wied. Ann. Bd. 32 S. 64 (1887).

Für die oben erwähnte zu erwartende Potentialänderung des Elektrometers habe ich die Formel abgeleitet:

$$dV_1 = V_2 C_2 \frac{1-n}{n C_2 + C_1},$$

dabei bedeutet V_1 das Potential des Messquadranten, C_1 dessen Capacität, V_2, C_2 dieselben Grössen für den Versuchskörper und n die Verhältniszahl, nach welcher die Capacität des letzteren während des Versuches geändert wird. C_2 wurde dabei selbstverständlich innerhalb der Hülle gemessen und nicht, wie Hallwachs annimmt, ausserhalb derselben; wenn ich angegeben habe, dass für die Doppelplatten des Versuchskörpers sich die Capacität beim Oeffnen desselben nahezu verdoppelt, so gilt das natürlich innerhalb einer Hülle von grossen Dimensionen geradeso wie im Zimmer.

Obige Formel für die zu erwartende Potentialänderung dV_1 des Elektrometers hält Hr. Hallwachs in zwei Punkten für unrichtig: 1. Es ist in derselben die Capacität des Messquadranten C_1 als constant vorausgesetzt, während sich dieselbe doch durch die Bewegung der Nadel ändert; nun betrug diese Aenderung aber selbst für die grössten zu erwartenden Ausschläge noch nicht 1 %, ich habe dieselbe also mit vollem Rechte vernachlässigt und konnte dies um so eher thun, als der Fehler nicht nur unmerklich klein, sondern absolut Null war, indem bei den Versuchen gar keine Ausschläge auftraten. 2. Da es sich um die Ladungen handelt, welche der Versuchskörper in der Hülle aufnimmt, so meint Hr. Hallwachs, ich hätte an Stelle des Potentiales V_2 die Potentialdifferenz zwischen Versuchskörper und Hülle setzen sollen; das ist selbstverständlich richtig, aber eben weil es sich hier um die Ladungen handelt, habe ich geglaubt, mich, ohne einem Missverständnis zu begegnen, der kürzeren Ausdrucksweise bedienen zu können, sowie man ja von einem im Zimmer aufgestellten Conductor im gleichen Falle auch kurz von seinem Potentiale und nicht von seiner Potentialdifferenz mit den Wänden spricht. Dass ich nicht etwa den fundamentalen Satz, dass ein Conductor in einer Hülle von gleichem Potential keine Ladung besitzt, ausser Acht gelassen habe, hätte Hr. Hallwachs aus mehreren später zu citirenden Sätzen meiner Abhandlung entnehmen können, ganz abgesehen davon, dass gerade auf der Anwendung dieses Satzes meine früheren, von Hrn. Hallwachs ausführlich besprochenen, Versuche beruhen. Ich muss mich daher ganz entschieden dagegen verwahren, als wenn hier „bei der Theorie dieser Versuche ein Irrthum unterlaufen wäre", und will im folgenden kurz zeigen, dass das Potential der Hülle in der That ganz ohne Einfluss auf die Schlüsse ist, die sich aus den Resultaten der Versuche ziehen lassen.

Um vollständig zu sein, will ich die Potentialdifferenz V_2 zwischen Versuchskörper und Hülle in der Form:

$$V_2 = V - \varphi$$

schreiben, wo φ das Potential der Hülle, das nicht bekannt zu sein braucht, bedeutet. Man hat dann:

$$dV_1 = (V - \varphi)\, C_2 \frac{1-n}{nC_2 + C_1}.$$

Operirt man mit Versuchskörpern aus verschiedenen Metallen (ich habe C, Cu, Sn, Zn verwendet), so bleibt, wenn dieselben gleiche Form haben, der Factor von $(V - \varphi)$ constant, und man erhält, wenn man letzteren mit p bezeichnet, für eine zweite Substanz:

$$dV_1' = p.(V' - \varphi)$$

und weiter:

$$dV_1 - dV_1' = p\,(V - V') = p\,.\,V/V'.$$

Es sind also die Differenzen der Ausschläge den Potentialdifferenzen der untersuchten Substanzen proportional. Aus der bekannten Empfindlichkeit des Elektrometers, aus der gleichfalls bekannten Constante p, sowie aus der von der Contacttheorie vorausgesetzten Potentialdifferenz $V - V'$ lässt sich somit, wie ich es in meiner Abhandlung auch gethan habe, der zu erwartende Effect auf das Elektrometer berechnen. Wie man sieht, spielt dabei die Natur der Hülle gar keine Rolle, und ich halte mich nach wie vor für berechtigt, aus dem vollständigen Ausbleiben der erwarteten Elektrometerausschläge — deren Differenzen 10 — 15 Scalentheile betragen sollten — auf den Werth Null der Grösse $V - V'$ zu schliessen.

Es scheint Hrn. Hallwachs entgangen zu sein, dass der Sinn meiner Methode eben darin liegt, durch Differenzbeobachtung mit verschiedenen Metallen den Einfluss der Hülle zu eliminiren; es geht dies aus mehreren Stellen meiner Abhandlung deutlich hervor. So sagte ich bei Besprechung meiner Methode z. B.: „Werden die Grössen V_2 auf diese Weise für verschiedene Metalle bestimmt, so erhält man dadurch ihre wahren Potentialdifferenzen, und zwar ganz unabhängig von der Natur der Erdleitung; .." und an anderer Stelle, wo ich die Grösse der zu erwartenden Ausschläge berechnet habe: „So gross hätten also die Differenzen in den Ausschlägen bei verschiedenen Plattenpaaren sein müssen, wenn deren Potentialdifferenzen wirklich, wie es die Contacttheorie annimmt, von der Grössenordnung eines Daniells wären."

Sowie bei den Versuchen nach vorstehender Methode die Natur der Hülle vollkommen gleichgiltig ist, so war dies auch bei meinen

früheren Versuchen der Fall, da dieselben auch auf Differenzbeobachtung mit Kupfer und Stanniol basirten; ich habe den Zweck der Verwendung zweier Substanzen damals auch ausdrücklich erwähnt. Hr. Hallwachs, der auch diese Versuche bespricht, glaubt nichtsdestoweniger, dass sich aus denselben kein bestimmter Schluss ziehen lasse, weil das Potential der Zimmerwände unbestimmt sei; in der That ist diese Grösse aber gleichgiltig, und die Folgerung aus den Versuchsergebnissen eine ganz unzweideutige.

Ich komme nun noch auf eine Folgerung des Hrn. Hallwachs zurück. Wenn der Versuchskörper dasselbe Potential hat wie die Hülle, dann kann natürlich auch nach der Contacttheorie kein Ausschlag durch Capacitätsänderung des Körpers entstehen; hat letzterer aber ein anderes Potential als die Hülle, dann sollte auch nach Hrn. Hallwachs ein solcher auftreten. Thatsächlich konnte bei meiner Versuchsanordnung keine Spur eines solchen Ausschlages gefunden werden. Obwohl ich nun durch Einschaltung einer wirklichen elektromotorischen Kraft (isolirtes Daniell) zwischen Versuchskörper und Elektrometer und den dabei mit grosser Präcision auftretenden Ausschlag von erwarteter Grösse gezeigt zu haben glaube, dass keine Fehler in der Anordnung des Versuches vorhanden waren, glaubt Hr. Hallwachs doch, das Ausbleiben des Effectes fremden Einflüssen zuschreiben zu müssen, da er von der Nothwendigkeit desselben a priori überzeugt ist. Er sagt nämlich: „Setzt man die Versuchskörper in Hüllen, so kann immer nur eine Bestätigung des Erfahrungssatzes gewonnen werden, dass eine Ladung auftritt, falls der Körper selbst und die aus anderem Metalle bestehende Hülle zur Erde abgeleitet sind etc.“

Dieser Satz gilt unzweifelhaft, solange man die Versuchskörper und die Hüllen, wie es die Contacttheorie thut, einfach als Conductoren verschiedenen Potentials ansieht; ob er jedoch für die complicirteren Systeme gilt, für welche die chemische Theorie die Versuchskörper hält, und ob in diesem Falle etwa vorhandene Ladungen durch Deformation der Körper auch sichtbar werden müssten, das ist eine andere Frage, die, soviel ich weiss, bis jetzt noch nicht untersucht wurde.

Ich habe in meiner Abhandlung auch die Frage gar nicht berührt, ob und wie die chemische Theorie das Ausbleiben der fraglichen Ladungen zu erklären vermag; ich habe nur die Thatsache constatirt, dass es mir nicht gelungen ist, Ladungen, die nach der Contacttheorie unzweifelhaft in bestimmter Grösse hätten auftreten müssen, nachzuweisen, obwohl die Empfindlichkeit der Methode eine weitaus genügende war. Existiren diese Ladungen wirklich nicht, dann folgt daraus unmittelbar — und das gibt auch Hr. Hallwachs zu — die Unhaltbarkeit der Contacttheorie. Ich begreife darum auch nicht, weshalb

Hr. Hallwachs meiner Versuchsanordnung die Möglichkeit abspricht, „überhaupt zur Entscheidung der Frage etwas beizutragen".

Aus dem Vorstehenden geht wohl zur Genüge hervor, dass ich den Inhalt meiner eingangs erwähnten Abhandlung in allem und jedem Punkte vollständig aufrecht erhalte; wenn, wie es aus meinen Versuchen folgt, die fraglichen Ladungen wirklich nicht existiren, so ist damit die Unhaltbarkeit der Contacttheorie erwiesen. Selbstverständlich liegt immer noch die Möglichkeit vor, dass bei meinen Versuchen irgend welche mir unbekannte Fehlerquellen im Spiele waren und dass diese Ladungen wirklich existiren, ohne dass es mir gelungen wäre, sie nachzuweisen; mit Rücksicht auf diese Möglichkeit kann ich nur nochmals den schon in meiner früheren Arbeit ausgesprochenen Wunsch äussern, dass derartige Versuche auch von anderen mit möglichster Sorgfalt ausgeführt werden.

Die Widerstandsveränderungen von Wismuth, Antimon und Tellur im magnetischen Felde[1]).

Von

Albert v. Ettingshausen.

Im Jahre 1884 haben A. Righi[2]) und Hurion[3]) beobachtet, dass der elektrische Leitungswiderstand des Wismuths zunimmt, wenn man Platten oder Stangen dieses Metalls, die von einem elektrischen Strome durchflossen werden, in ein magnetisches Feld bringt. Eine Widerstandszunahme soll nach der Theorie[4]) auch in einer rechteckigen, mit ihrer Fläche senkrecht gegen die Kraftlinien des Magnetfeldes gestellten Platte auftreten, sobald man die durch Hall'sche Wirkung veranlassten Ströme zu Stande kommen lässt; ebenso muss eine kreisförmige Platte, bei welcher eine Elektrode im Centrum liegt, während der Rand die andere Elektrode ist, infolge Hall'scher Wirkung eine Vergrösserung des Widerstandes zeigen. Der Betrag dieser letzteren Widerstandszunahme ist sehr gering, verglichen mit der auch ohne Hall'sche Wirkung im Wismuth auftretenden, doch ist es mir schon vor längerer Zeit gelungen, das Vorhandensein derselben in einer dünnen rechteckigen Platte, welche in der oben angegebenen Weise gegen die Kraftlinien des magnetischen Feldes gestellt war, zu constatiren[5]). Die zur Leitung des Hauptstromes dienenden „Primär-Elektroden" waren längs der kurzen Seiten der Platte angelöthete Kupferdrähte, an zwei äquipotentialen Stellen der Langseiten wurden die „Hall-Elektroden" angebracht. Ohne Erregung des magnetischen Feldes war keine Widerstandsveränderung zu bemerken, wenn die Hall-Elektroden miteinander durch eine kurze Schliessung verbunden wurden; dagegen zeigte sich bei erregtem Elektromagnet eine Vergrösserung der zwischen den Primär-Elektroden herrschenden Potentialdifferenz, sobald man die

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 95 S. 714 (1887).

2) Righi, Journ. de Phys. 2. série, vol. III, p. 355. Wied. Beibl. Bd. 8 S. 858 (1884).

3) Hurion, C. R. XCVIII p. 1257 Beibl. Bd. 8 S. 877 (1884).

4) Boltzmann, Anz. d. kais. Akad. in Wien 1886. Nr. X und XIII. Sitzungsber. Bd. 94 S. 644 (1886).

5) Sitzungsber. der kais. Akad. in Wien Bd. 94 S. 560 (1886).

Hall-Elektroden leitend verband: die Vergrösserung betrug etwa ein Tausendstel der ganzen Differenz. Die Intensität des magnetischen Feldes M war beiläufig 6000 (cm gr sec).

Nach der von Prof. Boltzmann entwickelten Theorie erscheint der Widerstand einer rechteckigen, ebenen Platte, die nach ihrer Längsrichtung gleichförmig von einem Strome durchflossen wird, während die Langseiten mit zahlreichen Hall-Elektroden versehen sind, durch Hall'sche Wirkung im Verhältnis

$$1 + \frac{h^2}{1+\varphi} : 1$$

vergrössert; dabei ist angenommen, dass je zwei vis-à-vis liegende Hall-Elektroden leitend miteinander verbunden sind. φ ist das Verhältnis des Widerstandes ω der an die Hall-Elektroden angelegten Leitung zum Widerstande s in der Platte, gemessen zwischen den Hall-Elektroden der beiden Plattenränder: es ist also $s = \frac{\beta}{\varkappa\lambda\delta}$, wo λ, β, δ resp. Länge, Breite und Dicke der Platte bedeuten und $\varkappa$ das specifische Leitungsvermögen ist. Mit h ist das Product $\varkappa MR$ bezeichnet, unter R das sog. Drehungsvermögen (Rotatory power) der Plattensubstanz verstanden.

Für das Leitungsvermögen $\varkappa_0$ des Wismuths, welches keiner magnetischen Wirkung ausgesetzt ist, habe ich etwa $4 + 10^{-6}$ gefunden, das Product RM erreicht für reines Wismuth den Werth 45000, es würde demnach h bis über ein Sechstel ansteigen, wenn nicht $\varkappa$ im magnetischen Felde beträchtlich sänke. In der That habe ich bei den verwendeten Wismuthproben als Maximum von h nur beiläufig 0,13 bis 0,15 erhalten. Nach dem oben Angegebenen könnte daher die Widerstandszunahme in einer rechteckigen Platte, selbst für einen sehr kleinen Werth von φ, nicht viel über 2 % betragen.

Um den theoretischen Annahmen beim Experimente nahe zu kommen, habe ich eine Platte aus reinem Wismuth, das ich der Güte des Herrn Oberbergrathes Dr. Clemens Winkler in Freiberg verdanke[1]), in folgender Weise hergerichtet.

Die rechteckige Platte (Fig. 1), $\lambda = 5{,}6$, $\beta = 1{,}4$, $\delta = 0{,}0468$ cm hat längs der kurzen Seiten ausgedehnte Elektroden A, B für den durchzuleitenden Strom und an jeder Langseite vier Hall-Elektroden $a_1 \ldots a_4$ $b_1 \ldots b_4$, von denen je zwei vis-à-vis liegen; letztere bestehen

1) Wie mir Herr Dr. Winkler mittheilte, wurde das Wismuth durch fünfmalige Fällung als basisches Chlorwismuth von den begleitenden fremden Substanzen gereinigt; es enthält höchstens eine Spur von Eisen, welches aber wahrscheinlich erst durch die Reduction und das nachherige Schmelzen hineingekommen ist.

aus kleinen rechteckigen Vorsprüngen der Platte, an welche Kupferblechstreifen $k_1 \ldots k'_4$ gelöthet wurden, die passend nach abwärts gebogen und an den unteren Enden gut amalgamirt sind. Ein Contact der Streifen an den Stellen, wo sie sich kreuzen, ist durch zwischengelegte Glimmerblätter vermieden. Die Enden der Streifen, welche zu je einem Paare vis-à-vis liegender Elektroden gehören, liegen nebeneinander, so dass durch Heben von untergeschobenen Quecksilbernäpfen die Hall-Elektrodenpaare einzeln miteinander in gut leitende Verbindung gesetzt werden können. Die Quecksilbernäpfe waren an dem *Ende* eines Hebelarmes befestigt, durch Drehen des Hebels wurden die *Näpfchen* gehoben oder gesenkt. Zur Messung des Widerstandes eines Stückes der Platte sind an zwei Stellen c und d ihrer Längs-Mittellinie Kupferdrähte (an den Enden zu ganz kleinen Kreisen gebogen) festgelöthet. Die Distanz von c und d war 3,3 cm. Bei späteren Versuchen verlegte ich die „Widerstands-Elektroden" nach c' und d', so dass sie auf der Mittellinie der Platte zwischen erstem und zweitem, resp. drittem und viertem Hall-Elektrodenpaare lagen. Die zu den Elektroden A, B, c, d führenden Drähte, sowie die Kupferstreifen k sind an einem passenden Holzrähmchen befestigt, mit dem die Wismuthplatte zwischen die Polflächen eines Elektromagnets gebracht wird.

Um mit Genauigkeit die Veränderungen zu verfolgen, welche der Widerstand der Platte zwischen den beiden Elektroden c, d infolge des Zustandekommens der Hall'schen Ströme erfährt, bediente ich mich einer Anordnung, welche im wesentlichen eine Wheatstone'sche Brückencombination ist. Dieselbe ist schematisch durch Fig. 2 dargestellt.

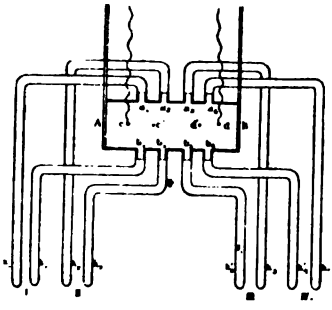


Fig. 1.

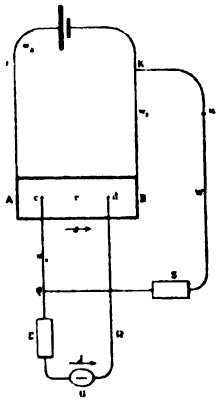


Fig. 2.

In die von den Widerstands-Elektroden c, d zu einem Wiedemann'schen Spiegelgalvanometer G führende Leitung ist ein Rheostat Σ eingeschaltet und von einem Punkte Q dieser Leitung eine Verbindung mit einem Punkte K der Leitung des die Platte AB durchfliessenden Stromes über einen zweiten Rheostaten S hergestellt. Da die Primär-

Elektroden A und B längs der kurzen Seiten der Platte sich erstrecken, so fliesst der Strom parallel den Langseiten durch die Platte, und diese kann daher für das Folgende als linearer Leiter angesehen werden.

Ist r der Widerstand der Platte zwischen c und d, J die Intensität des Stromes in derselben, heisst w_1 der Widerstand von c bis Q, w_2 jener von d bis K, Ω der Gesammtwiderstand von Q über G bis d, W endlich jener der Leitung von Q bis K, so ist die Stromstärke j im Galvanometer durch die Gleichung

$$J(rW - w_1 w_2) = j[w_1(w_2 + \Omega + W) + \Omega W]$$

gegeben. Einer kleinen Aenderung von r und Δr entspricht daher die Aenderung Δj des Stromes im Galvanometer

$$\Delta j = \frac{JW\Delta r + (rW - w_1 w_2)\Delta J}{w_1(w_2 + \Omega + W) + \Omega W},$$

wenn die Intensität des Stromes J bei der Aenderung von r sich um ΔJ verändert hat. Wird durch passende Wahl des Widerstandes W der Strom j im Galvanometer zum Verschwinden gebracht, so ist

$$r = \frac{w_1 w_2}{W} \tag{1}$$

und

$$\Delta j = \frac{JW}{w_1(w_2 + \Omega + W) + \Omega W} \cdot \Delta r. \tag{2}$$

Wird die Leitung QK bei u unterbrochen, und nun am Galvanometer die Stromstärke j_0 beobachtet, wobei durch Einschalten eines grossen Widerstandes aus dem Rheostaten Σ der Gesammtwiderstand von QGd auf Ω_0 gebracht werde, so ist

$$j_0 = J_0 \frac{r}{w_1 + \Omega_0}; \tag{3}$$

dabei ist J_0 die Stromintensität in der Platte zwischen c und d in diesem Falle. Aus Gleichung 2 und 3 folgt:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{w_1(w_2 + \Omega + W) + \Omega W}{W(w_1 + \Omega_0)} \cdot \frac{J_0}{J} \cdot \frac{\Delta j}{j_0}. \tag{4}$$

Für das Verhältnis $\frac{J_0}{J}$ findet sich, wenn der Widerstand der Leitung von K über die galvanische Kette bis zur Elektrode c mit w_3 bezeichnet wird:

$$\frac{J_0}{J} = \frac{w_1(w_2 + w_3) + r(w_1 + w_3)}{(w_1 + \Omega_0)(w_2 + w_3) + r(w_1 + w_2 + w_3 + \Omega_0)} \cdot \frac{w_1 + \Omega_0}{w_1}. \tag{5}$$

Berücksichtigt man, dass r ein im Vergleich zu den übrigen stets sehr kleiner Widerstand ist, so kann mit hinreichender Genauigkeit gesetzt werden:

$$\frac{J_0}{J} = 1 + r\left(\frac{w_3}{w_1(w_2+w_3)} - \frac{1}{w_1+\Omega_0}\right) = 1 + \frac{w_2}{W}\left(\frac{w_3}{w_2+w_3} - \frac{w_1}{w_1+\Omega_0}\right).$$

Weiter folgt, dass Ω_0 sehr gross genommen werden muss und auch W wegen Gl. 1 gegen w_1 und w_2 gross ist, sehr nahe

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta j}{j_0}\frac{w_1+\Omega}{w_1+\Omega_0}\left[1 + \frac{w_1}{W}\cdot\frac{w_2+\Omega}{w_1+\Omega} + \frac{w_2}{W}\cdot\frac{w_3}{w_2+w_3}\right]. \qquad (6$$

Die Widerstände w_1 und w_2 konnten verändert werden, indem in die Leitungen spiralig gewickelte Neusilberdrähte, die an starke Kupferdrähte gelöthet waren, mittels Quecksilbernäpfen eingeschaltet wurden. Der unveränderliche, aus Kupferdraht bestehende Theil der Widerstände w_1 und w_2 wurde, ebenso wie Ω, bei jedem Versuch genau bestimmt; Uebergangswiderstände an den Löthstellen c und d zählen zu w_1 und Ω [1]). Der Widerstand der galvanischen Kette ist in w_3 enthalten; neben die Kette (ein Daniell'sches Element) war stets noch ein Ballastwiderstand gegeben. Platte und Galvanometer befanden sich in zwei verschiedenen Zimmern.

Man kann natürlich auch die Aenderung ΔW des Widerstandes W ermitteln, welche erforderlich ist, damit das Galvanometer nach der Aenderung des Widerstandes r wieder stromlos werde und hat dann einfach

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta W}{W+\Delta W},$$

was als Controle dient.

Da die Hall-Elektroden je eines Paares sich nicht an genau äquipotentialen Stellen der Plattenränder befanden, so hatte die Verbindung zusammengehöriger Kupferstreifen durch Heben des betreffenden Quecksilbernapfes eine Verminderung der zwischen c und d herrschenden Potentialdifferenz zur Folge, wenn die Platte der Einwirkung magnetischer Kräfte noch nicht unterworfen war. Es wurde daher zunächst dieser als Widerstandsverminderung erscheinende Einfluss für jedes Paar der Hall-Elektroden einzeln ermittelt. Die Widerstände der Theile der Leitung waren hierbei in S.-E. $w_1 = 1{,}072$, $w_2 = 0{,}295$ $\Omega = 1{,}67$, $w_3 = 4{,}23$.

Die Elektrodenpaare sind mit I, II, III und IV bezeichnet. Durch eine grössere Zahl von Beobachtungen bei abwechselnd erfolgender Verbindung und Oeffnung der Leitung der einzelnen Paare ergab sich:

	Δj	j_0
Paar I	— 23,3	72,5
II	— 5,7	72,8
III	0,0	—
IV	— 7,25	72,5

1) Vergl. die Methode von Thomson.

Δj und j_0 sind in Scalentheilen angegeben. Das negative Vorzeichen von Δj entspricht einer Verminderung der Potentialdifferenz zwischen c und d; jede Messung wurde wiederholt nach Umkehrung der Richtung des Stromes in der Platte, und die angeführten Zahlen sind die Mittel der nur sehr wenig voneinander verschiedenen Werthe. Der zur Stromlosigkeit des Galvanometers nöthige Widerstand war $W = 20{,}92$, der Widerstand Ω_0 bei Beobachtung des Stromes j_0 war 501,7.

Ich nenne im Folgenden die Widerstandsveränderung, ausgedrückt in Procenten des ursprünglichen Widerstandes, kurzweg „Widerstandsvermehrung" und bezeichne sie durch $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$ mit einem beigesetzten Index. Man erhält also ohne Feld durch Anlegen des Nebenschlusses die Widerstandsvermehrung $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0$ für:

Paar I $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0$	$= -0{,}184$
II	$-0{,}045$
III	0
IV	$-0{,}057$

Durch gleichzeitiges Verbinden aller vier Hall-Elektrodenpaare wäre daher die Widerstandsvermehrung $= -0{,}286$, wenn einfache Superposition stattfände; der directe Versuch lieferte in diesem Falle $\Delta j = 36{,}3$, $j_0 = 73{,}9$, wonach $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0 = -0{,}281$ folgt. Der Widerstand $r = \frac{w_1 w_2}{W}$ ist 0,0151 S.-E.

In gleicher Weise wurden die Messungen angestellt, als die Wismuthplatte zwischen die Polflächen eines Elektromagnets gebracht und dieser dauernd erregt worden war. Die Intensität [1]) des nahe homogenen magnetischen Feldes betrug $M = 6750$ (cm gr sec). Der nunmehr zur Compensation erforderliche Widerstand W war merklich kleiner infolge des grösseren Widerstandes, welchen Wismuth im magnetischen Felde zeigt. Beim einzelnen Verbinden correspondirender Hall-Elektroden bewirkten jetzt die Paare II, III und IV eine Vergrösserung des Widerstandes zwischen c und d, da die Ausweichung der Galvanometernadel bei gleicher Richtung des die Platte durchflies-

1) Ueber den Elektromagnet, s. Sitzungsber. Bd. 94, S. 580. Die Feldintensität bestimmte ich stets durch Herausbewegen eines kleinen Inductors aus dem Felde und Vergleich des dadurch erzeugten Stromstosses mit dem durch Umlegen eines Erdinductors in derselben Leitung hervorgerufenen.

senden Stromes nach entgegengesetzter Seite — im Vergleich zu der früher ohne Erregung des Feldes aufgetretenen — erfolgte; nur bei dem Paare I war sie im gleichen Sinne wie zuvor, so dass also der Schluss dieses Paares auch im magnetischen Felde eine Widerstandsverminderung bewirkte. Die durch Schliessung der einzelnen Hall-Leitungen hervorgerufenen Nadelausweichungen waren (besonders beim Paare I) verschieden gross, je nachdem das magnetische Feld in dem einen oder anderen Sinne erregt wurde. Dies rührte zum Theile davon her, dass die zusammengehörigen Hall-Elektroden nicht an äquipotentialen Randstellen lagen. Es seien die Resultate dieser Beobachtungsreihe etwas ausführlicher angeführt. w_1, w_2, Ω, w_3 und Ω_0 hatten dieselben Werthe wie oben; mit (A) und (B) bezeichne ich die beiden Richtungen des die Platte durchfliessenden Stromes, durch die beigeschriebenen Indices 1 und 2 sollen die beiden Richtungen unterschieden werden, welche der den Elektromagnet erregende Strom hat.

	$\overbrace{(A)_1}$	$(A)_2$	$(B)_1$	$(B)_2$	j_0	
	$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\Delta j}$					
Paar I	— 8,6	— 14,2	— 8,6	— 13,9	47,3	
II	+ 11,4	+ 9,8	+ 10,4	+ 9,8	48,4	$W = 18{,}04$
III	+ 16,8	+ 16,4	+ 15,7	+ 17,2	52,0	
IV	+ 2,9	+ 3,9	+ 2,5	+ 3,7	49,5	

Nimmt man für Δj den Mittelwerth jeder Horizontalreihe, so ergibt sich die im Felde auftretende Widerstandsvermehrung $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_M$ durch die Schliessung der betreffenden Hall-Leitungen:

Paar I $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_M$	$= -0{,}138$
II	$+0{,}122$
III	$+0{,}183$
IV	$+0{,}037$

Zur Controle ermittelte ich die Widerstandsvermehrung, als mehrere Elektrodenpaare gleichzeitig verbunden wurden und erhielt:

Paare III und IV $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_M$	$= +0{,}216$	Summe: III + IV	$= +0{,}220$
I, III und IV	$+0{,}079$	I + III + IV	$= +0{,}082$
I, II, III und IV	$+0{,}198$	I + II + III + IV	$= +0{,}204$

Die Summe der aus den Einzelbeobachtungen folgenden Widerstandsvermehrung ist unter „Summe" angeführt; diese Summe ist stets etwas grösser, als die bei gleichzeitiger Schliessung der Elektroden-

paare gefundene Vermehrung, was auch leicht erklärlich ist. Im magnetischen Feld $M = 6750$ ist der Widerstand $r = 0{,}0175\ SE$, also um etwa 16 % grösser, als ohne Wirkung des Magnetismus.

Es ergibt sich daher die gesammte Widerstandsvermehrung, welche durch die Schliessung der einzelnen Elektrodenpaare, also durch Hall'sche Wirkung im Felde M veranlasst wird,

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_M - \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0$$

für Paar I $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = +0{,}046$

II $+0{,}167$

III $+0{,}183$

IV $+0{,}094$

In den Zahlen zeigt sich der überwiegende Einfluss, den die Schliessung der näher der Plattenmitte gelegenen Paare II und III gegen jene der äusseren Paare I und IV hat. Für die vereinte Wirkung aller vier Paare erhält man durch die directen Beobachtungen die Vermehrung $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = +0{,}479$.

Es wurden auf dieselbe Weise noch für zwei andere Intensitäten des Magnetfeldes die Widerstandsvermehrungen, hervorgerufen durch Hall'sche Wirkung, bestimmt. Die Resultate dieser Versuche waren: durch Schliessung aller vier Elektrodenpaare ohne Erregung des magnetischen Feldes

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0 = -0{,}280;$$

im Felde $M = 5200$ $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_M = +0{,}085$,

$= 6350$ $+0{,}149$; demnach ist für die beiden Feldstärken die durch Hall'sche Wirkung hervorgerufene Widerstandsvermehrung respective:

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = +0{,}365 \text{ und } +0{,}429.$$

Um eine beiläufige Vergleichung der beobachteten Widerstandsvermehrung mit der durch die Theorie geforderten Grösse derselben vorzunehmen, ermittelte ich das Drehungsvermögen R der Wismuthplatte für die drei oben verwendeten Intensitäten des magnetischen Feldes. Hierbei zeigte sich aber, dass, je nachdem man das eine oder andere Paar als Hall-Elektroden gebrauchte, die gefundenen Werthe für R sehr beträchtlich differirten; die mit den äusseren Paaren I und IV

erhaltenen Zahlen waren untereinander ziemlich nahe gleich, die mit II und III erhaltenen differirten untereinander um ca. 9 %, ihr Mittelwerth übertraf aber den aus den Versuchen mit den Paaren I und IV hervorgehenden um mehr als 20 %[1]). Eine Verminderung der Hall-Wirkung bei den Elektrodenpaaren I und IV kann zum Theil durch Ausgleichung der Potentialdifferenz längs der ausgedehnten Primär-Elektroden A und B veranlasst sein. Bestimmte man das Drehvermögen, indem man a_4 und b_1 als Primär-, a_1 und b_4 als Hall-Elektroden verwendete oder umgekehrt, so erhielt man einen Werth für R, der nahe mit dem Mittelwerthe aller vier Paare übereinstimmte; einen grösseren Werth als das Mittel lieferten a_4 und b_1 als Primär-, a_2 und b_3 als Hall-Elektroden: dieser kam aber wieder dem Mittelwerthe der Paare II und III sehr nahe. Ich nahm daher den Mittelwerth aus den Beobachtungen mit allen vier Paaren als das der Platte zuzuschreibende Drehungsvermögen an und erhielt dadurch die zusammengehörigen Grössen[2])

M	R
5200	6,94
6350	6,35
6750	6,18.

Jedenfalls haftet den Werthen R eine grosse Unsicherheit an; auch infolge der kürzlich von mir an Wismuth beobachteten „galvano-magnetischen Temperaturdifferenz“ [3]) kann das Drehungsvermögen für Platten, die sich in der Luft befinden, um 2—3 % zu klein gefunden werden. Es war aber bei diesen Versuchen, ebenso wie bei den Widerstandsbestimmungen, nicht thunlich, die Platte in einen Wassertrog einzusenken; zur Vermeidung von Luftströmungen war jedoch die Platte stets mit Watte umgeben.

Weiters ist die Leitungsfähigkeit $\varkappa$ in absolutem Masse für die obigen Feldintensitäten M anzugeben. Hierzu bestimmte ich zunächst für die Platte die ohne Hall'sche Wirkung auftretende Vermehrung des Widerstandes r aus denjenigen Widerständen W, die erforderlich waren, um den Strom im Galvanometer vor und nach Erregung des

1) Man begegnet bei Wismuthplatten öfters einer bedeutenden Verschiedenheit der Hall'schen Wirkung bei verhältnismässig wenig verschiedener Lage der Hall-Elektroden am Plattenrande. Ich glaube kaum, dass die Unterschiede lediglich durch Structurverschiedenheiten der Platte bedingt seien, sondern es tragen vielleicht kleine Sprünge und Risse im Innern der Platte die Schuld, wodurch die gemessene Dicke und daher auch R zu gross erscheinen muss.

2) Das Drehungsvermögen des Wismuths ist (nach Hall's Bezeichnungsweise) negativ.

3) Anzeiger der kaiserl. Akad. der Wissensch. (1887) Nr. II.

Magnetfeldes zum Verschwinden zu bringen; die im letzteren Falle nöthigen Widerstände waren aber nicht ganz gleich für beide Erregungsweisen des magnetischen Feldes. Ich bezeichne die in Procenten des ursprünglichen Widerstandes (für $M = 0$) ausgedrückte Veränderung als „secundäre Vermehrung" $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_s$; dieselbe war für

M	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_s$
5200	9,9
6350	13,8
6750	16,0

Endlich erübrigt noch die Angabe für die Leitungsfähigkeit $\varkappa_0$ des Wismuths ausserhalb des magnetischen Feldes. Nach Matthiessen[1]) ist für reines Wismuth, welches in Drahtform gepresst wurde, bei 0° die auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitungsfähigkeit = 0,75, daher bei 15° C. etwa 0,71. Da nach absolutem Maass (cm gr sec) die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers $= 10{,}6 \cdot 10^{-6}$ ist, so folgt für Wismuth $\varkappa_0 = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$. Nach den Bestimmungen von H. F. Weber[2]) ist $\varkappa_0 = 8{,}4 \cdot 10^{-6}$, nach jenen von L. Lorenz[3]) für 0° und 100°, resp. 9,3 und $6{,}3 \cdot 10^{-6}$, daher für 15° etwa $8{,}85 \cdot 10^{-6}$. Für das Wismuth meiner Platte fand ich jedoch einen viel kleineren Werth von $\varkappa_0$; aus den bei Herstellung derselben abgefallenen Stücken wurden zwei Streifchen von möglichst gleichförmiger Breite und Dicke gefeilt und durch Ausmessung mit einem Schraubenmikroskop, wie auch durch Wägung der Streifchen ihr Querschnitt bestimmt. An die Enden wurden dann Kupferdrähte gelöthet, durch die Streifchen ein Strom geleitet und mit Hilfe zweier, in unveränderlichem Abstande befindlicher Schneiden der Widerstand des zwischen den Schneiden liegenden Stückes auf bekannte Weise ermittelt. Aus den an beiden Streifen vorgenommenen Messungen ergab sich in relativ guter Uebereinstimmung $\varkappa_0 = 3{,}99 \cdot 10^{-6}$. (Die Einzelbestimmungen variirten um etwa 2 %.) Diese Leitungsfähigkeit ist nur etwa halb so gross, als den oben angeführten Werthen entspricht; durch zahlreiche, an Wismuthstreifen anderer Provenienz gemachte Bestimmungen erhielt ich jedoch ähnliche Werthe von $\varkappa_0$[4]).

1) Pogg. Ann. Bd. 115 S. 353 (1862).

2) Berichte der Berliner Akad. (1880).

3) Wied. Ann. Bd. 13 S. 598 (1881).

4) So ergab sich für ein Wismuth, das seinerzeit zu diamagnetischen Messungen verwendet worden war, $\varkappa_0 = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$ (bei Temperaturerhöhung zeigte dieses Wismuth ein Ansteigen der Leitungsfähigkeit); ein anderes, als sehr rein geltendes, hatte $\varkappa_0 = 4{,}4 \cdot 10^{-6}$; ein von Trommsdorff bezogenes dagegen $\varkappa_0 = 6{,}3 \cdot 10^{-6}$.

Der Güte meines hochgeehrten verstorbenen Freundes Prof. v. Pebal, dessen Tod Allen in traurigster Erinnerung ist, verdanke ich den Besitz eines von Dr. Matthiessen gepressten Wismuthdrahtes; durch ähnliche Bestimmungen von Querschnitt und Widerstand, wie sie für die Streifen gemacht wurden, fand ich aus mehreren Messungen für diesen Draht $\varkappa_0$ zwischen 8,5 und $8{,}6 \cdot 10^{-6}$. Es dürfte daher die für die Streifen gefundene auffallend geringe Leitungsfähigkeit durch die Art und Weise der Herstellung der Wismuthplatten veranlasst sein [1]).

Man erhält somit die nachstehende Tabelle.

Tabelle I.

M	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H$	R	$\varkappa$	$h = \varkappa MR$	$100h^2$	$100h^2 : \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H$
5200	0,365	6,94	$3{,}63 \cdot 10^{-6}$	0,131	1,72	4,71
6350	0,429	6,35	3,51	141	1,99	4,64
6750	0,479	6,18	3,44	144	2,07	4,32

Die Quotienten in der letzten Columne sollen nach der Theorie constant $= 1 + \varphi$ sein, wo $\varphi = \frac{\omega}{s}$ ist. Diese Constanz ist wenigstens beiläufig vorhanden; es wäre hiernach φ etwa 3,5.

Ich versuchte dieses Verhältnis direct durch Messung der Widerstände ω und s zu ermitteln. Der Gesammtwiderstand $\omega + s$ konnte ohne Schwierigkeit bestimmt werden, indem man die Kupferstreifen, welche vom oberen Rande der Platte kommen, ebenso wie jene vom unteren Rande untereinander in gut leitende Verbindung setzte, einen Strom transversal mittels dieser Zuleitungen durch die Platte fliessen liess und die Potentialdifferenz zwischen den Enden der Kupferstreifen mit derjenigen an den Enden eines (von demselben Strom durchflossenen) bekannten kleinen Widerstandes verglich; es war $\omega + s = 0{,}0093$ S.-E.

---

1) Eine ⌣förmig gebogene Glasröhre, deren horizontaler Theil mit zwei angesetzten Tubulis versehen war, wurde im Sandbade mit geschmolzenem reinen Wismuth (von Dr. Winkler) gefüllt, in die aufgebogenen Enden und in die Tubuli waren Kupferdrähte eingesenkt. Nach dem Erstarren wurde mittels der äusseren Drähte durch das Wismuth ein Strom geleitet und der Widerstand des Stückes zwischen den inneren Drähten bestimmt. Es folgte $\varkappa_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-6}$; also grösser, als aus den Versuchen mit Streifen, die von Platten stammen, welche durch Erkaltenlassen ohne Pressung hergestellt sind. Das in der Glasröhre erstarrende Wismuth hatte die Röhre gesprengt. Vorher war der Widerstand der mit Quecksilber gefüllten Röhre zwischen den angesetzten Tubulis bestimmt worden. Vergl. Righi a. a. O.

Um ω zu finden, in welchem ausser dem Widerstande der nebeneinander geschalteten Kupferstreifen auch der Widerstand der kleinen Ansätze $a_1 \ldots b_4$ (Fig. 1) der Wismuthplatte enthalten ist, wurde nacheinander ein Strom durch die horizontal liegende Platte mittels der Kupferstreifen $k_1\ k'_1, \ldots k_4\ k'_4$ geleitet und die Potentialdifferenz zwischen den Enden der Kupferstreifen und jenen Stellen, wo die Hall-Elektroden an der Platte entspringen, gemessen. Daraus wurde der Widerstand der nebeneinander geschalteten Hall-Leitungen berechnet, und fand sich aus zwei Versuchen

$$\omega = 0{,}0061 \text{ S.-E., folglich } \varphi = \frac{\omega}{s} = 1{,}9.$$

Eine zweite Reihe von Messungen wurde vorgenommen, nachdem die Widerstands-Elektroden — wie oben schon erwähnt — näher aneinander in c' und d' auf die Platte gelöthet waren, so dass dieselben nunmehr in einer Distanz $c'\ d' = 1{,}65$ cm zwischen den Hall-Elektrodenpaaren I und II, sowie III und IV lagen. Nun ergab sich in der That der Einfluss der Hall'chen Wirkung auf die Widerstandsvermehrung etwas grösser, als im Falle der Elektroden $c\ d$, dagegen war die Widerstandsverminderung beim Schliessen der Hall-Leitungen ohne Feld geringer als zuvor.

Es war beim Schluss der

$$\begin{aligned} \text{Paare I und IV } \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0 &= -0{,}020 \\ \text{II und III} \qquad\quad &-0{,}057 \\ \text{I, II, III und IV} \quad &-0{,}075 \end{aligned}$$

Im magnetischen Feld $M = 7020$ erfolgte eine Vermehrung des Widerstandes durch die

$$\begin{aligned} \text{Paare I und IV } \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_M &= +0{,}102 \\ \text{II und III} \qquad\quad &+0{,}441 \\ \text{I, II, III und IV} \quad &+0{,}527 \end{aligned}$$

Somit ist die durch Hall'sche Wirkung in diesem Magnetfeld hervorgerufene Widerstandsvermehrung

$$\begin{aligned} \text{für die Paare I und IV } \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H &= +0{,}122 \\ \text{II und III} \qquad\quad &+0{,}498 \\ \text{I, II, III und IV} \quad &+0{,}602 \end{aligned}$$

Die innerhalb der Widerstandselektroden c' und d' gelegenen Paare II und III bewirken die vierfache Widerstandsvermehrung von jener der ausserhalb gelegenen Paare I und IV.

Auf ähnliche Weise fand ich die Widerstandsvermehrung durch Schliessung aller vier Elektrodenpaare für

$$\text{das Feld } M = 6060 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_M = +0{,}481$$
$$8530 \qquad +0{,}616,$$

so dass die der Hall'schen Wirkung entsprechende Widerstandsvermehrung beträgt für

$$M = 6060 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = +0{,}556$$
$$8530 \qquad +0{,}691$$

Die den drei Feldintensitäten zugehörigen Werthe des Drehvermögens sind im Mittel

M	R
6060	6,53
7020	6,03
8530	5,42

Die graphische Darstellung der R als Ordinaten zu den Feldintensitäten als Abscissen (siehe auch S. 25) liefert die Curve I der Fig. 8.

Zur Bestimmung der secundären Widerstandsvermehrung wurde eine ausgedehnte Beobachtungsreihe angestellt, deren Resultate nebst den Werthen von $\varkappa$ in der nachstehenden Tabelle II enthalten sind. (Die graphische Darstellung siehe Curve II der Fig. 8.)

Tabelle II.

M	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_S$	$\varkappa$
1200	0,901	$3{,}96 \cdot 10^{-6}$
1930	2,13	3,91
3220	5,02	3,80
4530	8,50	3,68
5800	12,3	3,56
6060	13,0	3,53
6510	14,3	3,49
7020	16,3	3,43
8530	21,0	3,30

Die Widerstandsvermehrung wurde für die schwächeren Feldintensitäten auf die oben beschriebene Weise gemessen; die Ausweichungen der Galvanometernadel für die beiden Richtungen des die Platte durch-

fliessenden Stromes waren bei demselben Sinne der Felderregung stets sehr nahe einander gleich und fanden natürlich nach entgegengesetzten Seiten statt; bei der Erregung des Feldes in dem einen oder anderen Sinne, aber unveränderter Richtung des Plattenstromes, differirten dagegen die nach derselben Seite der Ruhelage erfolgenden Nadelausweichungen stets beträchtlich. Dies scheint von einer Verschiedenheit der Widerstandsvermehrung, je nach dem Sinne der Felderregung, herzurühren; theilweise könnte es allerdings auch durch Hall'sche Ströme, die die Galvanometerleitung durchfliessen, veranlasst sein (siehe unten bei Tellur). Ich nahm stets das Mittel aus den sowohl bei entgegengesetzter Feldrichtung, als auch entgegengesetzter Stromrichtung erhaltenen Ausweichungen. Bei höheren Feldintensitäten wurde die Widerstandsvermehrung durch directe Beobachtung der Potentialdifferenzen zwischen den Elektroden c' und d' (Leitung QK geöffnet) vor und nach Erregung des Magnetfeldes bestimmt; die Verschiedenheit je nach der Feldrichtung zeigte sich auch hier.

Die früher (S. 26) für $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_S$ gefundenen Werthe bei Benutzung der Widerstands-Elektroden c und d passen nicht genau in den Lauf der Curve II hinein, sondern liegen theils oberhalb, theils unterhalb derselben.

Die Zusammenstellung der Resultate gibt:

Tabelle III.

M	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H$	R	$\varkappa$	$h = \varkappa MR$	$100\,h^2$	$100\,h^2 : \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H$
6060	0,556	6,53	$3{,}53 \cdot 10^{-6}$	0,140	1,96	3,52
7020	0,602	6,03	3,43	0,145	2,16	3,49
8530	0,691	5,42	3,30	0,153	2,34	3,39

Der Quotient in der letzten Columne ist nahezu constant, aber kleiner, als er aus den Beobachtungen mit den Widerstandselektroden c, d folgte. Sein Mittelwerth liefert $\varphi = 2{,}47$, was mit dem aus den Widerstandsmessungen erhaltenen Verhältnis $\frac{\omega}{s}$ näher übereinstimmt.

Die Ergebnisse von Versuchen mit kreisförmigen Wismuthplatten, welche in der Richtung der Plattenradien von einem Strome durch-

flossen werden, habe ich gleichfalls mit den theoretischen Formeln in recht befriedigender Uebereinstimmung gefunden.

Liegt die eine Elektrode im Centrum der Kreisplatte und ist die Peripherie die andere Elektrode, so werden die Strömungslinien im magnetischen Feld in logarithmische Spiralen verwandelt; der Widerstand der Platte steigt dann im Verhältnis $1 + h_2 : 1$. Wird dagegen die Platte längs eines Radius aufgeschnitten, so fallen die Stromlinien wieder mit den Plattenradien zusammen und der Widerstand der Platte — unter Voraussetzung eines sehr schmalen Schlitzes — erscheint infolge Hall'scher Wirkung nicht vergrössert. Dagegen erhält man durch dieselbe im letzteren Falle zwischen zwei an den beiden Rändern des radialen Schlitzes vis-à-vis angebrachten Elektroden im magnetischen Feld eine elektromotorische Kraft, aus welcher sich das Drehungsvermögen R berechnen lässt

Ich habe schon vor etwa einem Jahre Widerstandsbestimmungen an einer kreisförmigen Wismuthplatte im unaufgeschnittenen und sodann im aufgeschnittenen Zustande ausgeführt. Die Platte war aus käuflichem (angeblich reinem) Wismuth hergestellt, ihr Radius war $a_1 = 2{,}2$, ihre Dicke 0,037 cm; rings am Rande wurde sie in eine kreisförmig ausgeschnittene Kupferscheibe eingelöthet (Fig. 3). Als centrale Elektrode diente ein dicker aufgelötheter Kupferdraht A, der dicht über der Wismuthplatte und Kupferscheibe, jedoch von diesen isolirt, geführt war, so dass die Platte noch leicht zwischen die Magnetpole gebracht werden konnte. Die zweite Elektrode B ist ein an die Kupferscheibe gelötheter Draht. Von den zahlreichen mit dieser Platte angestellten Versuchen sollen hier nur die Resultate einiger angeführt werden, da ich die Messungen später mit einer Platte aus sehr reinem Wismuth wiederholt habe. In den beiden folgenden Tabellen sind die Widerstandsvermehrungen (in Procenten) angegeben, welche die Platte in den magnetischen Feldern M zeigte, und zwar beziehen sich die Werthe $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T$ der Tabelle IV a) auf die unaufgeschnittene, jene $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_S$ der Tabelle IV b auf die radial aufgeschnittene Kreisplatte. Die als Widerstands-Elektroden c und d (Fig. 3) aufgelötheten dünnen Kupferdrähte sassen in der Nähe des Centrums und nahe der Peripherie; sie waren wie der dicke, im Centrum befestigte Draht, parallel der Platte von ihr isolirt fortgeführt. Die Widerstandsvermehrung im Magnetfelde wurde ohne Compensation, einfach durch Beobachtung der Vergrösserung der Potentialdifferenz zwischen diesen Elektroden bestimmt.

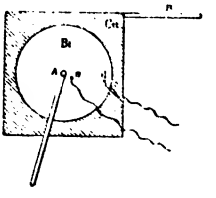


Fig. 3.

Tabelle IVa.

M	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T$
1380	1,0
2050	2,1
2900	3,5
3840	5,3
5690	9,1
6330	10,5
8530	14,9
10620	19,1

Tabelle IVb.

M	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_S$
1900	1,7
2920	3,3
3650	4,7
4580	6,4
5110	7,6
6030	9,6
7530	12,4
8390	14,0

Stellt man diese Resultate graphisch dar, so ergeben sich Curven von grosser Regelmässigkeit, die nach der Abscissenaxe (M) schwach convex gekrümmt sind und nahe übereinander liegen; die Curve für $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T$ hat die grösseren Ordinaten. Es ist nun

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T - \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_S = \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H$$

die infolge Hall'scher Wirkung auftretende Widerstandsvermehrung, welche nach der Theorie $= 100\, h_2$ sein soll. Für die letzten drei Feldintensitäten der Tabelle IVb) erhält man z. B.

$$M = 6030, \quad 7530, \quad 8390$$
$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = 0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}6.$$

Wegen der geringeren Genauigkeit, welche die Zahlen der Tabellen besitzen, nehme ich keine Vergleichung mit den theoretisch geforderten Werthen vor, bemerke aber, dass zur Ermittlung der Drehungsvermögen aus der Kreisplatte eine rechteckige Platte herausgeschnitten und auf gewöhnliche Weise eine Reihe zusammengehöriger Werthe von M und R bestimmt wurde [1]), so fand sich

1) Es wurde auch die Hall'sche Wirkung mit zwei an den Rändern des Schlitzes befestigten Elektroden (die etwa um den halben Radius vom Centrum entfernt waren) bestimmt; man erhält aber hierbei nicht die volle elektromotorische Kraft der Hall'schen Wirkung (s. w. u.). Zahlenwerthe für dieses Wismuth, welche dem R proportional sind, wurden bereits in der Abhandlung „Ueber das Hall'sche Phänomen" (Sitzungsber. Bd. 94, S. 596) mitgetheilt.

Die oben angegebenen Producte RM zeigen das Ansteigen zu einem Maximum und darauffolgende Abnahme, wofür die Ursache in der „galvanomagnetischen Temperaturdifferenz" liegt.

M	R	RM
1800	5,17	9306
2900	4,75	13770
4020	4,21	16920
6140	3,36	20630
7790	2,78	21660
8870	2,43	21550
9770	2,16	21100

Die Werthe R für dieses Wismuth sind beiläufig halb so gross, als jene, welche die Platte aus reinem Wismuth für gleiche M (im Mittel) gegeben hat. $\varkappa_0$ (aus den Widerständen zweier Streifchen bestimmt) ergab sich im Mittel $= 3{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Ich wende mich nun zu den Versuchen mit der kreisförmigen Platte, die aus reinem (von Hrn. Dr. Winkler stammendem) Wismuth gefertigt war. Die Kreispatte hatte an allen Stellen sehr nahe die gleiche Dicke $\delta = 0{,}0772$ cm, ihr Radius war $\alpha_1 = 2{,}17$, der Radius der centralen Elektrode $\alpha_2 = 0{,}1$ cm (beiläufig). Die Widerstandsvermehrungen wurden, wie oben beschrieben, an dem zuvor stromlos gemachten Galvanometer gemessen, bei höheren Feldintensitäten auch durch directe Bestimmung mit dem Potentialgalvanometer. In den Tabellen V und VI sind die nach der ersten Methode erhaltenen Werthe unter der Columne C (Compensationsverfahren), die nach der zweiten Methode gefundenen unter P (Potentialgalvanometer) angeführt.

Tabelle V.

Kreisplatte unaufgeschnitten.

$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T$

M	C	P	
3260	6,33	—	6,33
4470	10,30	—	10,30
6650	15,90	—	15,90
7970	22,38	22,48	22,41
9300	26,58	—	26,58
10300	29,82	29,64	29,76
10960	31,97	31,99	31,98

Tabelle VI.

Kreisplatte aufgeschnitten.

$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_S$

M	C	P	
3590	7,13	—	7,13
5940	14,26	—	14,26
8040	20,69	21,04	20,81
9270	24,71	24,59	24,67
10280	28,07	28,17	28,10
10940	30,32	30,48	30,37

Legt man den unter C angegebenen Zahlen das doppelte Gewicht bei, so erhält man für die Widerstandsvermehrungen die in der letzten Columne stehenden Werthe. Die Curven III der Fig. 8 stellen die

Resultate graphisch dar; beide Curven weichen ersichtlich wenig von Geraden ab, so dass man durch einfache Interpolation die auf gleiche Feldstärke sich beziehenden Widerstandsvermehrungen $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T$ und $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_S$ erhalten kann.

Zur Bestimmung der Drehungsvermögen wurden an vis-à-vis liegenden Stellen des 0,4 mm breiten Schlitzes möglichst kleine Hall-Elektroden angelöthet, deren Abstand vom Plattencentrum $r = 0{,}65$ cm war.

Die gewöhnliche Formel (wie bei rechteckigen Platten $\frac{e\delta}{JM}$, wo e die beobachtete elektromotorische Kraft der Hall'schen Wirkung und J die Intensität des Stromes in der Platte bedeuten, gibt in diesem Falle den von Boltzmann[1]) als „reducirten Hall-Effect" H bezeichneten Werth. Boltzmann findet, indem er nur die peripherische Elektrode berücksichtigt, dass H, welches in diesem Falle H_1 heissen möge, mit dem Hall'schen Drehungsvermögen R durch die Gleichung

$$H_1 = R\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sqrt{\frac{r}{a_1}} - \frac{8}{9\pi^2}\sqrt{\frac{r^3}{a_1^3}}\,..\right) = R \cdot C_1$$

zusammenhänge, wobei also noch vorausgesetzt ist, dass die centrale Elektrode einen gegen r verschwindend kleinen Radius a_2 hat. Letztere Bedingung war bei den Versuchen nicht realisirt. Prof. Boltzmann machte mich aber darauf aufmerksam, dass die in seiner Abhandlung S. 667 und 668 angegebenen Formeln ebenso gut für den Fall gelten, wo die peripherische Elektrode einen unendlichen, dagegen die centrale Elektrode einen endlichen Radius a_2 hat. In diesem Falle ist es, da $r > a_2$, für die Reihenentwicklung erforderlich, in dem Ausdruck der Boltzmann'schen Abhandlung S. 668 für $\frac{\pi}{Ah} \cdot \frac{dp_1}{d\vartheta}$ den beiden Grössen

$$\operatorname{arctg}\frac{r\sin\vartheta}{a + r\cos\vartheta} \text{ und } \operatorname{arctg}\frac{r\sin\vartheta}{a - r\cos\vartheta}$$

die Form

$$\vartheta - \operatorname{arctg}\frac{a\sin\vartheta}{r + a\cos\vartheta} \text{ und } \pi - \vartheta - \operatorname{arctg}\frac{a\sin\vartheta}{r - a\cos\vartheta}$$

zu geben. Die weitere Durchführung der Rechnung, wie am angegebenen Orte, wobei die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{a_2}{r}$ geschieht, liefert dann für den reducirten Hall-Effect, der jetzt H_2 heisse, die Gleichung

1) A. a. O. S. 664 und 669.

$$H_2 = R\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sqrt{\frac{a_2}{r}} - \frac{8}{9\pi^2}\sqrt{\frac{a_2^3}{r^3}} \ldots\right) = R \cdot C_2.$$

In erster Annäherung wird es gestattet sein, bei Berechnung des Einflusses der centralen Elektrode den Radius der peripherischen unendlich gross, bei Berechnung des Einflusses der peripherischen Elektrode umgekehrt den Radius der centralen unendlich klein anzunehmen; es ergibt sich dann einfach

$$H = R \cdot C_1 C_2 = \frac{e\delta}{JM}.$$

In Tabelle VII ist eine Reihe von zusammengehörigen Feldstärken und reducirten Hall-Effecten angegeben.

Tabelle VII.

M	H
1110	2,89
2190	2,66
3200	2,42
3560	2,30
4460	2,10
5600	1,87
6120	1,77
7830	1,51

Um den Einfluss, welchen die Ausdehnung der centralen Elektrode hat, zu verringern, löthete ich eine neue, nur etwa halb so grosse, centrale Elektrode ($a_2 = 0{,}05$ cm) an Stelle der alten und wiederholte die Messungen für zwei verschiedene Feldintensitäten; ich erhielt

M	H
3560	2,58
5600	2,10

also in der That sehr merklich (um 12 %) grössere Werthe, als für $a_2 = 0{,}1$ cm gefunden wurden (s. Tabelle VII).

Auch brachte ich die Hall-Elektroden beiderseits des Schlitzes in grössere Entfernung von der centralen Elektrode; als $r = 1{,}0$ cm war, ergab sich

M	H
3570	2,14
5610	1,78

Wurden dagegen die Hall-Elektroden näher dem Plattencentrum befestigt, $r = 0{,}24$ cm, so fand sich

M	H
3450	2,77
5370	2,26

Da im letzten Falle die Intensitäten der Magnetfelder etwas kleiner waren, als in den vorhergehenden, so habe ich die H für die Felder M = 3560 und 5600 umgerechnet, was mit Hilfe der Tabelle VII mit genügender Genauigkeit geschehen konnte; dann erhält man bezw. H = 2,72 und 2.19: es ergeben sich also im letzten Falle (r = 0,24 cm) die relativ grössten Werthe für H.

Es wurden sodann aus der Kreisplatte zwei rechteckige Platten herausgeschnitten; dieselben sind beiderseits noch ein wenig befeilt worden, so dass ihre Dicken etwas kleiner waren als jene der Kreisplatte: ich bezeichne sie mit 1 und 2. Ihre Dimensionen waren

Platte 1	λ = 4,0	β = 1,2	δ = 0,074 cm
„ 2	3,6	1,3	0,074 cm.

Jede Platte war mit vier punktförmigen, in der Mitte der Seiten des Rechteckes angelötheten Elektroden versehen, von denen je zwei gegenüber liegende als Primär-, resp. als Hall-Elektroden dienten.

Nach dem gewöhnlichen Verfahren vorgenommene Bestimmungen lieferten:

Tabelle VIII.

Platte 1[1]).

M	R
2210	7,96
2910	7,51
3990	6,84
5170	6,09
5950	5,74
6160	5,58
8470	4,45
9770	4,08

Tabelle IX.

Platte 2.

M	R
910	8,80
1430	8,36
2210	7,87
3160	7,23
5120	6,06
5700	5,69
6170	5,48
8920	4,30
9360	4,17
9770	4,04
10660	3,74

Die Curven, welche den Zusammenhang von M und R darstellen (die Curven IV der Fig. 8), differiren für schwächere Felder, jedoch nur unbedeutend, für höhere Feldintensitäten fallen die Curven sehr nahe zusammen.

1) Diese Reihe wurde schon in der Abhandlung „Messung der Hall'schen Wirkung mit dem Differentialgalvanometer" Sitzungsber. Bd 94, S. 819 mitgetheilt.

Zwischen 0° und 40° C. entsprach einer Temperaturerhöhung von 1° eine Abnahme des Drehungsvermögens von etwa 0,4 %.

Es ist endlich noch die Leitungsfähigkeit anzugeben. Zwei Streifchen, aus der Platte entnommen, lieferten im Mittel aus einer grösseren Zahl von Versuchen für $\varkappa_0$ die Werthe 4,09 und $4{,}15 \cdot 10^{-6}$; die beiden Streifchen waren aus der Kreisplatte derart herausgeschnitten, dass ihre Längsrichtungen aufeinander senkrecht standen: es kann somit $\varkappa_0 = 4{,}12 \cdot 10^{-6}$ genommen werden [1]). Die für verschiedene Feldstärken geltenden $\varkappa$ sind dann mit Hilfe der Tabelle VI zu berechnen. Somit ergibt sich nachfolgende Zusammenstellung:

Tabelle X.

M	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T$	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0$ interpolirt aus Tab. VI	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_T - \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_s$	R interpolirt aus Tab. VIII und IX (Mittel)	$\varkappa$	$h = \varkappa MR$	$100\,h^2$	$100\,h^2 : \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H$
6050	15,90	14,60	1,30	5,60	$3{,}67 \cdot 10^{-6}$	0,1243	1,54	1.18
7970	22,41	20,59	1,82	4,68	3,49	1302	1,69	0,93
9300	26,58	24,77	1,81	4,20	3,37	1316	1,73	0,97
10300	29,76	28,17	1,59	3,86	3,28	1304	1,70	1,07
10960	31,98	30,44	1,54	3,64	3,23	1289	1,66	1,08

Die Quotienten in der letzten Columne sollen nach der Theorie = 1 sein. Wenn man erwägt, um welche geringen Aenderungen es sich hier handelt, und dass kleine Fehler in den Bestimmungen der Feldintensitäten, der Drehungs- und der Leitungsvermögen verdoppelt erscheinen, so wird man in der nahen Uebereinstimmung der beobachteten Widerstandsvermehrung mit der aus M, R und $\varkappa$ berechneten, wohl eine Bestätigung der Theorie erblicken dürfen. Im allgemeinen ist der Verlauf der Werthe von $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H$ und h^2 ein ähnlicher.

Es wäre strenge genommen noch der Umstand zu berücksichtigen, dass auch nach Oeffnen des den Elektromagnet erregenden Stromes zwischen den Flachpolen ein magnetisches Feld von einer gewissen Intensität bestehen bleibt. Bei sämmtlichen Versuchen mit der Kreisplatte hatten die Polflächen des Elektromagnets einen unveränderlichen Abstand ($^1/_2$ cm) voneinander; die verschiedene Intensität des magnetischen Feldes wurde nur durch Aenderung der Stärke des den Elektromagnet erregenden Stromes bewirkt.

---

1) Zwischen 15 und 20° C. nahm die Leitungsfähigkeit zu mit steigernder Temperatur (um etwa $^1/_7$ % pro Grad).

Das Verhältnis der permanenten Feldintensität M' zur temporären M gibt die folgende Reihe:

M	M'	$\frac{M'}{M}$
2360	230	0,097
3590	280	78
6050	340	56
7970	380	48
9300	390	42
10900	400	37

Nennt man R' und $\varkappa'$ die dem Magnetfeld M' entsprechenden Drehungs- und Leitungsvermögen, so sollte strenge sein

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_H = 100\,(h^2 - h'^2),$$

wo $h' = \varkappa' M' R'$.

Wie man leicht sieht, kann sich der Fehler, den man durch Vernachlässigung von h'^2 neben h^2 begeht, bei den angewendeten Feldintensitäten auf 2—3 % belaufen. Nimmt man darauf Rücksicht, so würden die Zahlen der letzten Columne von Tabelle X entsprechend kleiner.

Die Versuche mit der aufgeschlitzten Kreisplatte ergaben die in Tabelle VII aufgeführten Werthe von H. Es sollen nun die daraus berechneten Drehungsvermögen noch mit jenen verglichen werden, welche die beiden rechteckigen Platten 1 und 2, Tabelle VIII und IX, lieferten. Entnimmt man aus jenen Tabellen die Mittelwerthe R, welche den Feldintensitäten der Tabelle VII entsprechen, so erhält man für das Verhältnis $\frac{R}{H}$ (bezogen auf gleiche M) nahe $= 3$ (die Zahlen liegen zwischen 2,99 und 3,12). Es sind also die „reducirten Hall-Effecte" den Drehungsvermögen proportional.

Ferner soll die Beziehung $H = R\,C_1\,C_2$ bestehen, wo C_1 und C_2 die aus den Formeln für H_1 und H_2 (S. 34) ersichtliche Bedeutung haben. Berechnet man mit $a_1 = 2{,}17$, $a_2 = 0{,}1$ und $r = 0{,}65$ cm die beiden Factoren, so erhält man

$$C_1 = 0{,}541,\quad C_2 = 0{,}678,$$

daher

$$H = 0{,}367\ R \text{ oder } R = 2{,}73\ H,$$

während durch die Versuche das Verhältnis $\frac{R}{H}$ etwas über drei gefunden wurde. Es ist also auch hier die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment eine verhältnismässig gute zu nennen.

Aehnlich lässt sich aus den reducirten Hall-Effecten, welche man bei verschiedenen Entfernungen r der Hall-Elektroden vom Plattencentrum erhielt, das Drehungsvermögen mit Hilfe der Factoren C_1 und C_2 berechnen. Bei diesen Versuchen (S. 35) war der Radius der centralen Elektrode a_2 etwa 0,05 cm; man erhält folgende Zusammenstellung der betreffenden Grössen

$r =$	1,03	0,65	0,24 cm
$C_1 =$	0,413	0,541	0,727 „
$C_2 =$	0,822	0,774	0,623 „
$C_1 C_2 =$	0,339	0,419	0,453 „

und hiermit ergibt sich

	r	H aus Beobachtung	$\frac{H}{C_1 C_2}$
$M = 3560$	1,03 cm	2,14	6,30
	0,65	2,58	6,16
	0,24	2,72	6,00
$M = 5600$	1,03	1,78	5,24
	0,65	2,10	5,01
	0,24	2,19	4,83

Mit den rechteckigen Platten ergaben sich für die beiden Feldstärken allerdings grössere Werthe von R, nämlich 7,07 resp. 5,82; jedoch ist zu bemerken, dass die kleine centrale Elektrode durchaus nicht geometrisch kreisrund war, und dass dieselbe nur auf die Oberfläche der Platte aufgelöthet war: Umstände, welche auf die durch die Beobachtung erhaltenen Resultate von wesentlichem Einfluss sein müssen.

Wäre bei obiger Berechnung der Radius der centralen Elektrode nur um $^1/_{10}$ mm grösser angenommen worden, so würde der Werth von $\frac{H}{C_1 C_2}$ für $r = 0{,}24$ cm um etwa 6 % grösser werden und also den mit den rechteckigen Platten erhaltenen merklich näher kommen. Auch sind in den Formeln für H_1 und H_2 die Glieder mit h^2 vernachlässigt und ist die Gleichung $R = \frac{H}{C_1 C_2}$ nur genähert richtig.

Nach den bei Wismuth gemachten Erfahrungen schien es wahrscheinlich, dass auch andere Substanzen im magnetischen Felde Aenderungen des elektrischen Leitungswiderstandes zeigen dürften. Vor allem

hielt ich es für wichtig in dieser Hinsicht Antimon und Tellur zu untersuchen, welche bekanntlich die Hall'sche Wirkung im entgegengesetzten Sinne wie Wismuth zeigen, also nach Hall's Bezeichnung ein positives Drehungsvermögen besitzen [1]).

Ich verwendete eine rechteckige Platte aus reinem Antimon, etwa 5 cm lang, 2,5 cm breit, 0,13 cm dick. Sie war, wie die eingangs beschriebene Wismuthplatte, mit ausgedehnten Elektroden *A*, *B* und Widerstands-Elektroden *c*, *d* auf ihrer Mittellinie versehen, besass jedoch keine Hall-Elektroden. Die Untersuchung auf Widerstandsänderung im magnetischen Feld geschah wieder durch Beobachtung des Stromes Δj an dem vorher stromlos gemachten Galvanometer; es zeigte sich eine Vergrösserung des Widerstandes durch Einwirkung der senkrecht zur Plattenfläche gerichteten magnetischen Kräfte, aber in weit geringerem Betrage als bei Wismuth.

So wurde bei einer Versuchsreihe, wobei die Widerstände in S.-E. waren:

$$w_1 = 1{,}11,\ w_2 = 0{,}54,\ W = 247{,}0,\ w_3 = 1{,}3,$$
$$\Omega = 3{,}10,$$

durch die magnetische Feldintensität $M = 7660$ ein Strom $\Delta j = 15{,}8$ Scalentheile hervorgerufen; ferner war $j_0 = 55{,}2$ Scalentheile beim Widerstande $\Omega_0 = 203{,}1$; somit ist (wieder in Procenten ausgedrückt) die Widerstandsvermehrung $\left(\frac{\Delta r}{r}\right) = 0{,}596$ [2]). Eine Vergrösserung des Widerstandes W um 1 S.-E. hatte eine Nadelausweichung von 10,7 Scalentheilen zur Folge (und zwar in demselben Sinne, in welchem bei gleicher Richtung des Plattenstromes der Magnetismus die Ausweichung bewirkte); es würde daher die Widerstandszunahme im Antimon bei obiger Feldstärke einer Verkleinerung von W um $-\Delta W = \frac{15{,}8}{10{,}7} = 1{,}48$ S.-E. entsprechen, welche erforderlich wäre, um das Galvanometer stromlos zu erhalten; hiernach ist die Widerstandsvermehrung

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right) = 0{,}603.$$

Bei einem zweiten Versuch in dem stärkeren Felde $M = 10600$, wobei w_1, w_2 und Ω_0 dieselben Werthe wie oben hatten, $w_3 = 1{,}8$, $\Omega = 3{,}07$ war, fand sich: $W = 246{,}6$, $\Delta j = 48{,}1$, $j_0 = 86{,}1$, daher $\left(\frac{\Delta r}{r}\right) = 1{,}148$, während aus der zur Stromlosigkeit des Galvanometers

1) Sitzungsber. der kais. Akad. Bd. 94 S. 597.

2) Es ist hier $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$ die Widerstandsvermehrung, welche beim Wismuth als „secundäre" d. h. von Hall'scher Wirkung unabhängige, bezeichnet worden ist.

erforderlichen Verminderung des Compensationswiderstandes

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right) = 1{,}145$$

folgte.

Für das Drehungsvermögen der Platte erhielt ich bei beiden Feldintensitäten den Werth $R = 0{,}178$.

Aus einer mir kürzlich zugekommenen Mittheilung von Dr. Giuseppe Faè in Padua [1]) ersehe ich, dass derselbe ebenfalls eine Widerstandsvermehrung bei Antimon, welches in Form dünner Cylinder gegossen war, beobachtet hat, und zwar sowohl, wenn der die Stäbchen durchfliessende Strom senkrecht zu den Kraftlinien des Magnetfeldes gerichtet, als auch, wenn die Stromesrichtung diesen parallel war. Im ersten Falle schien die Widerstandsvermehrung grösser zu sein. Ueber den numerischen Betrag derselben sind keine Angaben gemacht.

Um für das Antimon die Grösse $h = \varkappa MR$ zu erhalten, bestimmte ich durch Versuche mit zwei Streifchen aus der Platte das elektrische Leitungsvermögen; dasselbe fand sich

$$\varkappa = 10{,}2 \cdot 10^{-6},$$

also, wie bei Wismuth, weit kleiner, als gewöhnlich angegeben wird [2]).

Für das Magnetfeld $M = 7660$ folgt somit h nahe $= \frac{1}{72}$.

Als dritte Substanz, bei der ich die Widerstandsveränderung unter Wirkung magnetischer Kräfte untersuchte, wählte ich das Tellur. Bisher wurden an drei Streifen Messungen vorgenommen. Die Elektroden A, B (Fig. 4) für den die Streifen durchfliessenden Strom waren Platindrähte, die mit der Stichflamme angeschmolzen wurden; die Widerstands-Elektroden c, d sind ebenfalls dünne Platindrähte, welche an einer der schmalen Langseiten befestigt sind. Bei den Messungen befanden sich die Streifen in einem sehr schmalen, mit Wasser gefüllten Trog, dessen Seitenwände durch Glimmerplatten gebildet waren.

Das Beobachtungsverfahren war auch hier dasselbe wie beim Wismuth, nur wurden die Stromintensitäten J und J_0 direct gemessen und die Berechnung der Widerstandsveränderung geschah dann nach Gl. 4. Es war hierzu in die Leitung BK eine Tangentenbussole T mit Spiegelablesung eingefügt. Ist das Galvanometer G stromlos, so misst man an T

1) Atti del R. Istituto veneto, t. V, série VI.

2) Bemerkenswerth scheint, dass aus älteren Versuchen von Snow Harris, bei welchen der dämpfende Einfluss bestimmt wurde, den gegossene Platten von Wismuth und Antimon auf die Schwingungen einer Magnetnadel übten, die Leitungsfähigkeiten dieser Metalle im Verhältnis zu Quecksilber = 1 gefunden wurden: Wismuth = 0,45, Antimon = 1,3 (siehe Karsten's Encyclopädie der Physik, Bd. 19 S. 349).

die Intensität J des Stromes im Streifen zwischen c und B, wird die Leitung QK bei u unterbrochen, wobei an G die Stromstärke j_0 (unter Einschaltung eines grossen Widerstandes) beobachtet wird, so kann man die an T gemessene Stromstärke J_0 nunmehr auch als die Intensität des Stromes im Streifen ansehen, da der Widerstand im Tellur zwischen den Elektroden c und d gegen $w_1 + \Omega_0$ stets sehr klein ist. Gelegentlich wurde das Verhältnis $\frac{J_0}{J}$ noch durch Messung von w_2 (mittels Gl. 5) controlirt. Während bei den Versuchen mit Wismuth wegen des sehr kleinen Widerstandes r in der Platte der Quotient $\frac{J_0}{J}$ nahe $= 1$ war, wichen bei Tellur die Intensitäten J und J_0 meist beträchtlich voneinander ab.

Der zuerst untersuchte Streifen, *Te* Nr. 1, hatte eine Länge $\lambda = 3{,}5$, Breite $\beta = 0{,}52$ und Dicke $\delta = 0{,}18$ cm, die Widerstands-Elektroden c und d an der oberen schmalen Langseite waren 1,8 cm voneinander entfernt.

Wurde das Galvanometer stromlos gemacht und dann das magnetische Feld in dem einen und anderen Sinne erregt, so zeigte die Nadel Ausweichungen, welche sowohl in ihrer Grösse als auch in ihrer Richtung ganz verschieden waren, je nachdem man die Widerstände w_1 und w_2 verschieden gross wählte.

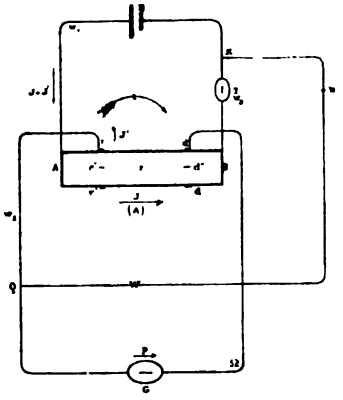


Fig. 4.

Es sei gestattet, die Beobachtungsresultate ausführlicher wiederzugeben. Unter A und B sollen — wie oben beim Wismuth — die beiden Richtungen des den Streifen durchfliessenden Hauptstromes verstanden werden; A beziehe sich dabei auf den Fall, wo der positive Strom bei der Eleksrode A eintritt, also den Streifen (für einen auf denselben hinblickenden Beobachter) von links nach rechts durchfliesst. Durch die beigesetzten Indices 1 und 2 sind die beiden entgegengesetzten Erregungsweisen des Elektromagnets unterschieden, und zwar bezeichne der Index 1 den Fall, wo für den Beobachter die das Magnetfeld ersetzenden Ampère'schen Ströme in der Richtung der Uhrzeigerbewegung (gefiederter Pfeil Fig. 4) fliessen, also der Nordpol des Elektromagnets vor, der Südpol hinter dem Streifen liegt. In der nachstehenden Tabelle XI sind die Ausweichungen der Galvanometernadel, entsprechend den beiden Stromesrichtungen und den Erregungsweisen des Magnets, unter A_1, A_2, B_1, B_2 angegeben und mit den Zeichen $\pm$

versehen, je nachdem dieselben nach den grossen oder kleinen Zahlen der Scala erfolgten. Eine positive Nadelausweichung tritt ein, wenn der die Multiplicatorwindungen von G durchfliessende Strom die Richtung des kleinen Pfeiles p (Fig. 4) besitzt.

Tabelle XI.

Nr.	w_1	w_2	w_3	W	$M(cgs)$	J (Scth.)	Nadelausweichungen (Scth.)			
							$(A)_1$	$(A)_2$	$(B)_1$	$(B)_2$
1	2,63	23,0	19,97	21,2	5200	273	+ 108,5	— 58,8	— 109,2	+ 59,8
2	2,63	23,0	22	21,2	6110	261	+ 132,0	— 66,1	— 132,0	+ 66,8
3	2,63	23,0	20	21,2	6810	274	+ 153,9	— 67,4	— 155,1	+ 69,7
4	2,63	23,0	20	21,2	8360	274	+ 207,2	— 73,5	— 203,0	+ 77,3
5	2,63	23,0	12	21,2	8520	365	+ 283,3	— 97,7	— 280,7	+ 100,2
6	10,09	23,0	16,6	81,6	6110	399	+ 46,5	+ 17,0	— 46,0	— 16,7
7	48,7	3,85	6	65,6	6110	1524	— 38,4	+ 91,1	+ 39,2	— 90,2
8	48,7	6,23	36	107,2	6110	402	— 2,0	+ 18,4	+ 1,5	— 18,1
9	30,7	23,0	12	246,7	6070	455	+ 15,2	+ 18,2	— 15,5	— 17,5
10	30,7	23,0	12	247,0	6070	455	+ 32,1	+ 37,7	— 32,4	— 36,9

Die Widerstände w_1, w_2, w_3 und W sind stets in S.-E. ausgedrückt; unter J sind die an der Tangentenbussole beobachteten Nadelausweichungen in Scalentheilen aufgeführt. Bei Nr. 7 wurde J mit einem Drahtkreise der Tangentenbussole gemessen, für welchen die Empfindlichkeit geringer ist, und der angegebene Werth durch Umrechnung erhalten; bei Nr. 10 war das Galvanometer G etwa doppelt so empfindlich, als bei den anderen Beobachtungen. Die Messungen sind übrigens an verschiedenen Tagen gemacht worden. Ein kleines Daniell'sches Element lieferte den Strom; der Widerstand der Galvanometerleitung $QGd = \Omega$ war 3,55 S.-E.

Für die grossen Verschiedenheiten, welche die Nadelausweichungen in ihrer Grösse und bezüglich des Vorzeichens aufweisen, lässt sich, wenigstens im allgemeinen, eine befriedigende Erklärung finden, wenn man berücksichtigt, dass durch den Magnetismus im Tellur eine ausserordentlich starke Hall'sche Wirkung hervorgerufen wird und dass die Hall'schen Ströme sich mit dem durch eine Widerstandsveränderung auftretenden Strom (Δj) in der Galvanometerleitung superponiren werden; die ersteren Ströme wechseln ihre Richtung mit dem Wechsel der Felderregung. Hall'sche Ströme, welche (ganz oder theilweise) den Weg über die Galvanometerleitung nehmen können, sind sowohl durch den die Platte zwischen den Elektroden A und B durchfliessenden Strom J

veranlasst, als auch durch den Zweigstrom J', welcher aus dem Streifen bei der Elektrode c austritt.

Da bei dem Zustandekommen der Hall-Wirkung hier stets eine Primär-Elektrode mit einer Hall-Elektrode zusammenfällt, so wird die elektromotorische Kraft derselben (falls die Elektroden als punktförmig angesehen werden dürfen) nur die Hälfte der vollen Kraft des durch den gleichen Strom hervorgerufenen Effectes sein [1]).

Um die Verhältnisse leichter zu übersehen, soll zunächst für den das Streifchen durchfliessenden Strom die Richtung A, für den Elektromagnet die durch Index 1 bezeichnete Erregungsweise vorausgesetzt werden.

Der bei Elektrode A in den Streifen einfliessende Strom tritt aus demselben bei B mit der Intensität J, bei c mit der Intensität J aus; es ist nun für jeden dieser Ströme die durch das Magnetfeld verursachte Potentialdifferenz der Randelektroden zu bestimmen: durch Superposition erhält man dann die in der Brückencombination thätigen elektromotorischen Kräfte der Hall'schen Wirkung nnd kann somit auch die in der Galvanometerleitung resultirende Stromstärke berechnen.

Fig. 5.

Es fliesse in eine (im allgemeinen beliebig gestaltete) Platte (Fig. 5) bei Elektrode A der Strom J hinein, bei B heraus; c und d seien zwei Punkte des oberen Plattenrandes, welche, wie in Fig. 5 gegen A und B liegen.

Durch Wirkung des magnetischen Feldes M (Pfeil 1) wird der Potentialwerth an allen Stellen des oberen Plattenrandes zwischen A c d B um $\frac{RMJ}{2\delta}$ erhöht, an allen Punkten des unteren Plattenrandes zwischen B und A um dieselbe Grösse erniedrigt, während die Potentialwerthe in A und B ungeändert bleiben. Dabei ist δ die Plattendicke und R das als positiv vorausgesetzte Drehungsvermögen der Plattensubstanz, wie es also bei Tellur (Antimon, Eisen, Cobalt, Cadmium etc.) der Fall ist. Setzt man für die Elektrode A den Werth des Potentials gleich Null, so hat man infolge der Hall'schen Wirkung auf den Strom [2]) J als Potentialwerthe in:

$$A: \text{Null}$$
$$c: \frac{RMJ}{2\delta}$$
$$d: \frac{RMJ}{2\delta}$$
$$B: \text{Null}.$$

1) Sitzungsber. der kais. Akad. Bd. 94 S. 810.

2) Es sei der Kürze halber diese Ausdrucksweise gestattet. (Siehe Sitzungsber. Bd. 94 S. 603. Boltzmann, ebenda S. 644.

Betrachten wir dagegen den bei A ein- bei c austretenden Strom J' (Fig. 6), so haben wir durch die Hall'sche Wirkung auf dem Plattenrande $c\ d\ B\ A$ die Potentialwerthe um $\frac{RMJ'}{2\delta}$ erniedrigt auf dem Rande zwischen A und c aber um denselben Betrag erhöht, während die Werthe in A und c ungeändert bleiben; wird daher wieder in A das Potential gleich Null gesetzt, so hat man infolge Hall'scher Wirkung auf den Strom J' als Potentialwerthe in:

$$A: \quad \text{Null}$$
$$c: \quad \text{Null}$$
$$d: -\frac{RMJ'}{2\delta}$$
$$B: -\frac{RMJ'}{2\delta}$$

Durch Superposition der Wirkungen des Magnetfeldes M auf die Ströme J und J' sind daher die betreffenden Potentialwerthe in:

$$A: P_A = 0$$
$$c: P_c = \frac{RMJ}{2\delta}$$
$$d: P_d = \frac{RM(J-J')}{2\delta}$$
$$B: P_B = -\frac{RMJ'}{2\delta},$$

d. h. es tritt zwischen den Elektrodenpunkten c und A, c und d, d und B resp. die Potentialdifferenz

$$\frac{RMJ}{2\delta}, \quad \frac{RMJ'}{2\delta}, \quad \frac{RMJ}{2\delta}$$

auf, wobei die Elektrode mit dem höheren Potentialwerthe jedesmal vorangeschrieben ist.

Zeichnen wir die Wheatstone'sche Brücke in der gewöhnlichen Form (Fig. 7), wobei die Buchstaben an denselben Stellen stehen wie in Fig. 4 und der Streifen (stark gezeichnete Linie AB) als linearer Leiter angenommen ist, so ersieht man, dass die zwischen c und A durch Hall-Wirkung auftretende Potentialdifferenz in unserem Falle keine Ablenkung der Nadel des in Ω befindlichen Galvanometers G veranlassen kann, da das Galvanometer für jede in der äusseren Leitung $c\ A\ E\ K$ wirkende elektromotorische Kraft stromlos gemacht wurde; nur die

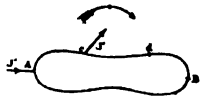


Fig. 6.

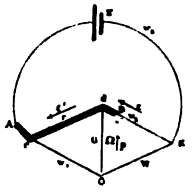


Fig. 7.

elektromotorischen Kräfte $\varepsilon' = \frac{RMJ}{2\delta}$ und $\varepsilon = \frac{RMJ}{2\delta}$, welche im Streifen bezw. zwischen d und c, sowie zwischen B und d in der Richtung der kleinen Pfeile (Fig. 7) wirken, können in der Galvanometerleitung Ω Ströme verursachen.

Wendet man nun die allgemeinen für die Wheatstone'sche Combination geltenden Formeln [1]) auf die beiden vorliegenden Fälle an, so erhält man die Stromintensität i, hervorgerufen in der Leitung Ω durch die elektromotorische Kraft ε zwischen B und d,

$$i = -\varepsilon \frac{w_1 w_2 + r(w_1 + w_2 + W)}{D};$$

dagegen ist die Stromintensität i' in Ω hervorgerufen durch die elektromotorische Kraft ε' zwischen d und c,

$$i' = +\varepsilon' \frac{w_2 W + w_2(w_1 + w_3 + W)}{D},$$

wo D folgende Determinante bedeutet

$$D = \begin{vmatrix} r + w_2 + w_3 & -w_2 & -w_3 \\ -w_2 & w_2 + W + \Omega & -W \\ -w_3 & -W & w_1 + w_3 + W \end{vmatrix}$$

Dabei ist die Stromrichtung positiv gezählt, wenn der Strom die Galvanometerleitung in der Richtung von Q nach d (Pfeil p) durchfliesst.

Man erkennt somit, dass der Strom i' dieselbe Richtung im Galvanometer hat, wie ein Strom Δj, der durch eine Vergrösserung des Widerstandes r veranlasst würde, dagegen ist die Stromrichtung von i entgegengesetzt jener von Δj. Es wird daher die zur Beobachtung kommende Ausweichung der Galvanometernadel bei den oben gemachten Annahmen über die Richtung des den Streifen durchfliessenden Stromes und über die Richtung der Ampère'schen Ströme des Magnetfeldes, d. h. bei A_1 sein: $\Delta j + i' + i = \Delta j + i_H$; wird dagegen bei ungeänderter Richtung des Stromes im Streifen der Elektromagnet im entgegengesetzten Sinne erregt, so ist die bei A_2 beobachtete Nadelausweichung: $\Delta j - i' - i = \Delta j - i_H$.

Bei Umkehr der Stromrichtung im Streifen erhält man in analoger Weise für B_1 die Ausweichung: $-\Delta j - i_H$, für B_2 aber: $-\Delta j + i_H$.

Setzt man für die durch die Hall'sche Wirkung auftretenden elektromotorischen Kräfte ε und ε' ihre Werthe und berücksichtigt,

1) Siehe Maxwell, Elektricität und Magnetismus, deutsch von Weinstein, Bd. 1 S. 498.

dass wegen der vor Erregung des Magnetfeldes erzielten Stromlosigkeit des Galvanometers

$$Jr = J'w_1 \text{ also } J' = J\frac{r}{w_1} = J \cdot \frac{w_2}{W}$$

ist, so folgt

$$i = -\frac{RMJ}{2\delta} \cdot \frac{w_1}{W} \frac{w_3 W + w_2(w_1 + w_3 + W)}{D}$$

$$i' = \frac{RMJ}{2\delta} \cdot \frac{w_2}{W} \cdot \frac{w_3 W + w_2(w_1 + w_3 + W)}{D}.$$

Es verhalten sich also die Intensitäten der (durch Hall'sche Wirkung) auf die Ströme J und J' hervorgerufenen Ströme i und i' der Galvanometerleitung einfach wie die Widerstände der Brückenzweige $c\,Q$ und $d\,K$, oder

$$\frac{i}{i'} = -\frac{w_1}{w_2};$$

der resultirende Hall'sche Strom im Galvanometer ist

$$i_H = i + i' = \frac{RMJ}{2\delta} \frac{w_2 - w_1}{W} \frac{w_3 W + w_2(w_1 + w_3 + W)}{D};$$

derselbe würde verschwinden, wenn $w_1 = w_2$ gewählt wird.

Ich setze

$$i_H = CJMf.$$

wo

$$C = \frac{R}{2\delta}$$

und

$$f = \frac{w_3 W + w_2(w_1 + w_3 + W)}{D} \cdot \frac{w_2 - w_1}{W}$$

ist.

Das Verhältnis, in welchem i_H zu Δj steht, ist natürlich von der Stromstärke J unabhängig; der numerische Betrag von i_H ist ausser durch das Drehungsvermögen und die Feldintensität durch die Widerstände in den einzelnen Zweigen der Brückencombination bedingt; je nachdem $w_2 \lesseqgtr w_1$ ist, wird die Richtung der Hall'schen Ströme im Galvanometer (für dasselbe M und J) verschieden sein.

Nimmt man an, dass eine Vergrösserung des Widerstandes r durch Wirkung des Magnetismus stattfindet, und ist $w_2 > w_1$, so muss bei A_1 eine positive Nadelausweichung auftreten, bei A_2 kann sie negativ oder positiv sein, je nachdem $\Delta j \lesseqgtr i_H$ ist; ist w_1 klein gegen w_2, so kann der erste Fall eintreten (Tab. XI), Nr. 1, 2, 3, 4, 5), wird die Differenz $w_2 - w_1$ kleiner, der zweite (Nr. 6).

Ist $w_1 > w_2$, so kann sich eine negative Nadelausweichung bei A_1 zeigen, wenn i_H überwiegt (was bei grosser Differenz $w_1 - w_2$ im allgemeinen der Fall sein wird), dann muss sie aber bei A_2 positiv sein (Nr. 7 und 8); ist dagegen $i_H < \Delta j$, während $w_1 > w_2$, so wird die Nadel sowohl bei A_1 als auch bei A_2 positive Ausweichungen machen, jene bei A_1 muss aber dann kleiner sein, als bei A_2 (Nr. 9 und 10).

Man sieht, dass die Beobachtungsresultate qualitativ diesen Ueberlegungen vollständig entsprechen; ich habe aber auch quantitativ die Verhältnisse weiter zu verfolgen gesucht.

Allerdings muss bemerkt werden, dass in mancher Hinsicht die Voraussetzungen der Theorie bei den Versuchen nicht erfüllt sind. Abgesehen davon, dass für die ausgedehnten Elektroden A und B punktförmige angenommen werden, sind auch die oben für ε und ε' angesetzten Werthe nur richtig in dem Falle, dass die Galvanometerleitung stromlos ist, also bei Elektrode d Elektricität weder in den Streifen ein- noch aus ihm ausströmt; durch die Wirkung des Magnetfeldes selbst wird aber diese Bedingung gestört, welcher Umstand unberücksichtigt gelassen wurde; auch ist, wie erwähnt, bei der Berechnung von i und i' der Streifen als linearer Leiter angesehen worden.

Ich berechnete mit den in Tabelle XI angegebenen Werthen der Widerstände den Factor f für die einzelnen Beobachtungen; der Widerstand w_2 war nur bei Nr. 1 und 6 genauer bestimmt worden, in den übrigen Fällen ist er nur approximativ bekannt, daher auch die Berechnung von f nur eine angenäherte. Aus den in Tabelle XI unter A_1, A, B_1 und B_2 aufgeführten Werthen sind die Nadelausweichungen Δj und i_H in Scalentheilen bestimmt und die Quotienten $\frac{i_H}{JMf}$ (J ebenfalls in Scalentheilen) gebildet worden; Tabelle XII (S. 49) enthält die Zusammenstellung.

Ein den Zahlen unter i_H beigesetztes Sternchen bezeichnet, dass der resultirende Hall-Strom bei der Feldrichtung 1 dem durch Widerstandsvermehrung auftretenden Strom im Galvanometer entgegengerichtet ist; dies ist der Fall, wenn $w_2 < w_1$, also f negativ ist.

Der Quotient $\frac{i_H}{JMf}$ ist in der That nahe constant, nur bei Nr. 7 weicht er stark von den anderen ab; die Abweichung bei Nr. 9 ist aus der Kleinheit von i_H erklärlich. Eine bessere Uebereinstimmung war kaum zu erwarten. Der Hall'sche Strom im Galvanometer ist in der Mehrzahl der Fälle viel stärker, als der durch die Widerstandsänderung veranlasste.

Die Constanz von $\frac{i_H}{JMf} = C = \frac{R}{2\delta}$ bei verschiedener Stärke des

magnetischen Feldes steht in Uebereinstimmung mit der Thatsache, dass für Tellur, soweit meine bisherigen Beobachtungen reichen, keine Abnahme des Drehungsvermögens bei wachsendem M gefunden wurde.

Wollte man aus den Versuchen das Drehungsvermögen des Tellurs (genähert) bestimmen, so sind in f die Widerstände im absoluten Maass auszudrücken; nimmt man

$$1 \text{ S.-E.} = 0{,}94 \cdot 10^9 \text{ (cm sec)},$$

so ist f durch diese Zahl zu dividiren. Ferner sind i_H und J in demselben Maasse zu messen; da i_H und J in Scalentheilen angegeben sind und der Abstand der Scala vom Spiegel für die Tangentenbussole T und das Galvanometer G der gleiche war (nahe 2000 Scalentheile), so ist i_H noch mit dem Verhältnis der Reductionsfactoren der beiden Instrumente $\frac{G}{T}$ zu multipliciren, um es auf das Maass von J zu reduciren; das Verhältnis $\frac{G}{T}$ ergibt sich aber in leicht ersichtlicher Weise aus dem nach Unterbrechung der Leitung KQ an Galvanometer und Tangentenbussole beobachteten Nadelausweichungen.

Tabelle XII.

Nr.	M (cgs)	f	Δj	i_H	$\frac{i_H}{JMf}$	Ω_0	j_0 (Scth.)	$\frac{J_0}{J}$	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$
			Scalentheile						
1	5200	0,103	24,8	84,1	$57{,}10^{-6}$	2003	262	1,468	0,062
2	6110	0,107	32,8	99,2	58	2003	265	1,500	88
3	6810	0,103	43,0	111,5	58	2003	268	1,470	110
4	8360	0,103	64,8	140,2	59	2003	269	1,472	165
5	8520	0,105	91,5	190,5	58	2003	330	1,338	171
6	6110	0,0096	31,5	14,7	61	2003	298	1,108	95
7	6110	−0,0103	25,9	64,7*	67	5003	425	1,021	72
8	6110	−0,0070	8,2	10,0*	58	5003	113	1,048	83
9	6070	−0,00083	16,5	1,2*	52	5003	127	1,032	98
10	6070	−0,00083	34,8	2,5*	—	5003	280	1,031	96

Mit den im zweiten Theile der Tabelle XII gegebenen Daten findet sich $\frac{G}{T} = 0{,}0021$, so dass mit Zugrundelegung der absoluten Maasse der Werth der Constante etwa

$$60 \cdot 10^{-6} \times 0{,}94 \cdot 10^9 \times 0{,}0021 = 1180$$

wird: mit $\delta = 0{,}18$ folgt dann $R = 420$, was dem für Tellur gefundenen Drehungsvermögen ziemlich nahe kommt.

Es erscheint demnach wohl gerechtfertigt, die durch Δj gemessenen Ströme als die Folge einer Vermehrung des Widerstandes r anzusehen. Die durch das Magnetfeld hervorgerufene Widerstandsvermehrung im Tellur ist demgemäss berechnet und in der letzten Columne der Tabelle XII unter $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$ (in Procenten ausgedrückt) angegeben.

Verglichen mit der Widerstandsvermehrung, welche beim Wismuth beobachtet wurde, ist jene des Tellurs nur sehr gering; sie ist noch etwa 4mal kleiner, als bei Antimon für dieselbe Stärke der magnetischen Kraft.

Die den Beobachtungen Nr. 1—5 der Tabelle XII entsprechende Curve ist auf der Fig. 8 punktirt (Curve *Te* 1) gezeichnet; die Ordinaten sind im Verhältnis zu den auf Wismuth bezüglichen Curven 100mal vergrössert.

Bei diesen Beobachtungen waren die Widerstände w_1 und w_2 unverändert. Die Resultate von Nr. 6—10, bei denen w_1 und w_2 in ver-

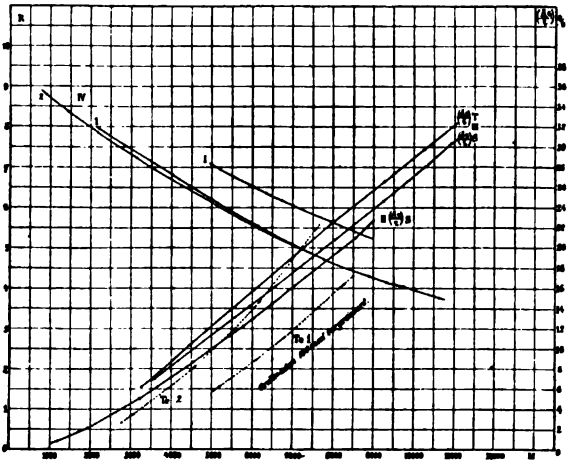


Fig. 8.

schiedenen Verhältnissen zueinander gewählt wurden, passen nicht in die Curve hinein; namentlich ist jenes von Nr. 7 viel zu klein. Es werden daher auch die aus Nr. 1—5 berechneten Widerstandsvermehrungen nur im Verhältnis zueinander richtig sein; der absolute Betrag dürfte überdies sehr von der individuellen Beschaffenheit des Tellurs abhängen.

Eine Reihe von Messungen wurde ferner mit einem zweiten Streifchen *Te* Nr. 2 von den Dimensionen $\lambda = 5{,}5$, $\beta = 0{,}65$, δ etwa 0,24 cm

gemacht. Das Tellur, aus dem dieser Streifen gegossen war, ist von Hrn. Dr. A. Popper im hiesigen chemischen Institute mit grosser Sorgfalt rein hergestellt worden. Die Dicke des Streifens war wenig gleichförmig, doch stellte ich mit demselben zunächst einige Beobachtungen an, wobei die Widerstands-Elektroden c' und d' (Fig. 4) an der unteren schmalen Langseite im Abstande von 3,5 cm angeschmolzen waren.

Die Widerstände waren in S.-E.

$w_1 = 10{,}0$, $w_2 = 22{,}6$, $w_3 = 13{,}0$, $W = 66{,}0$ (Mittel), $\Omega = 3{,}52$.

Tabelle XIII.

Nr.	M	$(A)_1$	$(A)_2$	$(B)_1$	$(B)_2$	Δj	i_H	$\frac{i_H}{JMf}$	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$
		Nadelausweichungen							
1	3080	− 1,5	+ 27,9	+ 0,6	− 27,9	13,4	14,5	94.10^{-6}	0,084
2	4650	+12,3	+ 54,0	−12,6	− 50,5	32,3	19,9	87	83
3	6180	+34,5	+ 85,5	−30,7	− 78,0	57,2	24,6	81	147
4	7620	+45,7	+122,5	−49,4	122,3	85,0	37,4	99	218

Für $\Omega_0 = 2003$ S.-E. war $j_0 = 378$ Scalentheilen; das Verhältnis $\frac{J_0}{J} = 1{,}113$. (S. die Curve *Te* 2 der Fig. 8.) Der Factor f berechnet sich zu 0,0118. In dem Quotienten $\frac{i_H}{MJf}$ sind i_H und J wider in Scalentheilen ausgedrückt, die Einzelwerthe weichen aber hier auffallenderweise stark voneinander ab; nimmt man für den Quotienten etwa $90 \cdot 10^{-6}$ an, so erhält man in absolutem Maasse, da das Verhältnis $\frac{G}{T}$ wieder nahe $= 0{,}0021$ war, $C = 1780$, folglich $R = 2C\delta = 850$, also einen viel grösseren Werth des Drehungsvermögens, als er aus bisherigen Versuchen folgte.

Der Streifen wurde hierauf durch vorsichtiges Befeilen auf eine gleichförmigere Dicke gebracht, wobei auch an Länge und Breite einiges geopfert werden musste, so dass die Dimensionen nunmehr waren

$$\lambda = 4{,}9,\ \beta = 0{,}55,\ \delta = 0{,}215 \text{ cm}.$$

Ich machte nun drei Messungsreihen bei verschiedenen Lagen der Widerstands-Elektroden: 1. als diese oben an der schmalen Langseite befestigt waren (c d), 2. als sie an der unteren Langseite angeschmolzen waren (c' d'), 3. als sie sich auf der Mittellinie des Streifens befanden (c'' d'') (Fig. 4). Die Widerstände w_1 und w_2 blieben bei den drei Versuchsreihen nicht genau, aber doch genähert, dieselben;

es ist nämlich in w_1 der Widerstand des bei c (resp. c' oder c'') befestigten dünnen Platindrahtes inbegriffen, dieser Draht war im Falle 2 um ein beträchtliches Stück länger; andrerseits ist in w_2 der Widerstand des Streifens von d (resp. d' oder d'') bis B enthalten. Ebenso war auch Ω, zu welchem der Widerstand des Elektrodendrahtes von d gehört, im Falle 2 etwas grösser, als in den Fällen 1 und 3.

Der Strom wurde bei den Versuchen von zwei kleinen Daniell'schen Elementen geliefert. Die Ergebnisse waren:

1. Elektroden $c\,d$; $w_1 = 40{,}6$, $w_2 = 18{,}74$, $W = 361{,}0$, $\Omega = 3{,}52$; $\Omega_0 = 8003$ S.-E.; $j_0 = 378$ Scalentheile; $\frac{J_0}{J} = 1{,}01$.

M	$(A)_1$	$(A)_2$	$(B)_1$	$(B)_2$	Δj	i_H	$\left(\frac{\Delta r}{r_1}\right)$	$\frac{i_H}{M}\cdot 10^4$
3990	+ 5,0	+ 68,1	− 5,2	− 62,1	33,8	28,8	0,053	72
5140	+ 18,8	+ 94,9	− 19,3	− 93,3	56,6	37,5	88	73
6240	+ 37,3	+ 131,8	− 38,2	− 129,5	84,2	46,4	131	74

2. Elektroden $c'\,d'$; $w_1 = 40{,}92$, $w_2 = 18{,}75$, $W = 351{,}4$, $\Omega = 3{,}79$, $\Omega_0 = 8004$ S.-E.; $j_0 = 395$ Scalentheile; $\frac{J_0}{J} = 1{,}01$.

5300	+ 82,8	+ 40,0	− 86,0	− 36,7	61,4	23,0	0,092	43
6500	+ 120,0	+ 65,2	− 124,0	− 59,5	92,2	29,8	139	46

3. Elektroden $c''\,d''$; $w_1 = 40{,}63$, $w_2 = 19{,}27$, $W = 470{,}6$, $\Omega = 3{,}46$, $\Omega_0 = 8003$ S.-E.; $j_0 = 300$ Scalentheile; $\frac{J_0}{J} = 1{,}005$.

5800	+ 80,2	+ 19,8	− 81,5	− 17,9	49,8	31,0	0,096	58
6400	+ 109,0	+ 37,0	− 112,2	− 33,6	73,0	35,2	140	55

Vergleicht man A_1 und A_2 im Falle 1 mit den entsprechenden Werthen im Falle 2, so erkennt man sofort, dass die bei derselben Erregungsweise des Magnetfeldes auftretenden Hall'schen Ströme ihre Richtung gewechselt haben. Sehr auffallend ist aber, dass im Falle 3, wo die Elektroden c'' d'' auf der Mittellinie des Streifens lagen, die Hall'schen Ströme mit so grosser Stärke auftreten konnten; allerdings liessen sich aus dem Umstande, dass die Elektroden A und B die kurzen Seiten des Streifens nicht an allen Stellen gut leitend berührt haben mochten, manche Unregelmässigkeiten erklären.

Die für die Widerstandsvermehrung $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$ aus den drei Messungsreihen hervorgehenden Werthe stehen untereinander in sehr guter Uebereinstimmung; sie sind um ein Geringes kleiner, als die früher mit demselben Streifen (s. Tab. XIII) erhaltenen.

Eine Berechnung des Factors f wurde nicht ausgeführt, da bei den Versuchen der jeweilige Widerstand w_s nicht notirt worden war. Der resultirende Hall-Strom i_H ist bei jeder Lage der Elektroden nahe mit M proportional, wie die Zahlen der letzten Columne der Tabellen zeigen. Die Verschiedenheit dieser Zahlen im Falle 1 und 3 lässt sich schon aus der Verschiedenheit von W erklären; dagegen fehlt eine befriedigende Erklärung für die grosse Abweichung, welche der Quotient $\frac{i_H}{M}$ im Falle 2 gegenüber dem Falle 1 aufweist. Die Intensität des Stromes J war bei allen Versuchen nahe die gleiche (etwa 0,0094 cm gr sec).

Es wurde noch das Drehungsvermögen für den vorliegenden Streifen bestimmt, indem einmal c und c', das andere Mal d und d' als Hall-Elektroden benutzt wurden, während A und B als die Primär-Elektroden dienten. Auch hierbei befand sich der Streifen in dem schmalen, mit Wasser gefüllten Troge.

Es fand sich

		Hall-Elektroden		
		cc'	dd'	Mittel
$M = 4140$	$R =$	768	800	784
5200		773	812	792
6390		772	802	787

Die Intensität des den Streifen durchfliessenden Primärstromes war 0,00252 (cm g sec), also scheint jedenfalls eine Erwärmung des Streifens durch diesen Strom ausgeschlossen; als die Intensität des Primärstromes auf 0,00079 vermindert wurde, fand sich übrigens derselbe Werth wie oben, nämlich $R = 794$ für $M = 6390$.

Aus den in Tabelle XIII mitgetheilten Beobachtungen hatte sich R ungefähr $= 850$ ergeben.

Das ungewöhnlich grosse Drehungsvermögen, welches dieses Tellur zeigt, veranlasste mich, das Streifchen dünner zu feilen, um dann nochmals einige Bestimmungen vorzunehmen; leider zerbrach dasselbe bei dem Versuche, seine Dicke zu verringern, und ich musste mich schliesslich mit einem Stückchen begnügen, welches ungefähr die Dimensionen $\lambda = 1{,}3$, $\beta = 0{,}55$, $\delta = 0{,}15$ cm hatte. An diese kleine Platte befestigte ich vier punktförmige Elektroden und bestimmte die Hall'sche

Wirkung. Ich erhielt bei den Feldstärken $M = 4490$ und 7270 resp. $R = 771$ und 774, Werthe, welche in genügender Uebereinstimmung mit den früher gefundenen stehen. Die Intensität des Primärstromes im Plättchen war 0,001 (cm g sec); letzteres befand sich natürlich wieder im Wassertrog.

Auch noch mit einem dritten Streifen *Te* Nr. 3 wurden einige Versuche angestellt. Dieser Streifen war aus demselben Tellur hergestellt, aus welchem ich auch eine grössere Platte gegossen habe, für welche das Drehungsvermögen nahe = 500 gefunden wurde [1]). Dimensionen des Streifens: $\lambda = 2{,}4$, $\beta = 0{,}5$, $\delta = 0{,}193$ cm. Die als Widerstands-Elektroden dienenden Platindrähte waren an einer breiten Langseite angeschmolzen, so dass sie diese Seite fast nach der ganzen Breite berührten; sie erstreckten sich also von c bis c' und von d bis d' (Fig. 4), die Distanz cc' war etwa 1 cm. Im magnetischen Feld $M = 6100$ fand sich bei zwei Messungen, als der Widerstand w_2 und die Stromstärke J verändert wurden:

w_1	w_2	W	J (cgs)	$(A)_1$	$(A)_2$	$(B)_1$	$(B)_2$
9,88	23,5	206,6	0,00227	+ 53,7	− 3,2	− 56,5	+ 2,3
9,88	18,6	165,3	0,0201	+472	−23	−500	+52

Hieraus folgen wieder die Ausweichungen Δj und i_H; diese sind nebst den übrigen zur Berechnung von $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$ nöthigen Daten in der folgenden Zusammenstellung enthalten.

Δj	i_H	$\frac{J_0}{J}$	Ω_0	j_0	$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$	$\frac{i_H}{J(cgs)}$
26,2	28,9	1,057	2008	206	0,097	$127 \cdot 10^3$
224	262	1,016	8008	457	91	130

Die Widerstandsvermehrung entspricht der Grösse nach der bei *Te* Nr. 1 für dasselbe M gefundenen.

Es schien von Interesse, noch die Grösse $h = \varkappa MR$ fürs Tellur zu ermitteln. Eine Anzahl von Widerstandsbestimmungen, welche mit den Streifchen *Te* Nr. 1 und 2 vorgenommen wurden, lieferten für

$$\varkappa = 8{,}2 \cdot 10^{-9}$$
$$7{,}6 \cdot 10^{-9},$$

1) Sitzungsber. der kais. Akad. Bd. 94, S. 829.

also im Mittel $\varkappa = 7{,}9 \cdot 10^{-9}$, d. h. eine Leitungsfähigkeit, welche nur etwa $\frac{1}{1300}$ von jener des Quecksilbers ist. Nimmt man nun $R = 800$ an, so folgt bei der Feldstärke $M = 7600$ die Grösse h beiläufig $= \frac{1}{20}$, während sie für Antimon bei derselben Feldintensität etwa $= \frac{1}{70}$, für Wismuth dagegen fast $\frac{1}{7}$ war.

Bei Ausführung eines grossen Theiles der in dieser Abhandlung beschriebenen, theilweise sehr zeitraubenden Messungen bin ich von Herrn stud. Michael Radaković unterstützt worden, dem ich für seine freundliche Beihilfe hiermit meinen wärmsten Dank auszusprechen mich verpflichtet fühle.

Ueber Convection der Elektricität durch Verdampfen [1]).

Von

Dr. **Ernst Lecher.**

Die in folgender Notiz geschilderten Experimente beziehen sich auf die Frage, ob der aus einer elektrisirten Flüssigkeitsoberfläche aufsteigende Dampf Elektricität mit sich führe oder nicht.

L. J. Blacke [2]) hat eine Reihe einschlägiger Versuche vorgenommen und gelangte durch dieselben zu dem Schlusse, dass eine Convection der Elektricität durch den aufsteigenden Dampf von Wasser, Kochsalzlösung, Schwefelsäure, Alkohol, Seewasser und Quecksilber nicht nachweisbar sei. Seit Publication dieser Arbeit ist eine Abhandlung von Franz Exner erschienen: „Ueber die Ursache und die Gesetze der atmosphärischen Elektricität“ [3]). Die daselbst mit überzeugender Beweiskraft ausgearbeitete Hypothese von Peltier fordert als wichtige Prämisse ihrer Richtigkeit, dass der Dampf einer elektrischen Flüssigkeit Elektricität mit sich führen müsse. Exner bedient sich zum Nachweise dieser Thatsache zweier Methoden: die erste zeigt, dass eine elektrisirte Flüssigkeit rascher verdampft, als eine unelektrische, während die zweite Methode direct die Elektrisirung des aufsteigenden Dampfes nachweist.

Durch meine Versuche gelange ich, im Widerspruche mit Blacke zu denselben Ergebnissen wie Exner, habe jedoch die Ueberzeugung gewonnen, dass nur die zweite der eben erwähnten Methoden Beweiskraft habe.

Rascheres Verdampfen einer elektrisirten Flüssigkeit.

Es hat bereits Mascart [4]) mittels der Wage nachgewiesen, dass eine elektrisirte Wasserfläche rascher verdampft, als eine nicht elektrisirte. Exner zeigt dasselbe direct durch die Volumsabnahme der Flüssigkeit mit Hilfe eines Horizontal-Manometers; die Flüssigkeitsoberfläche sinkt rascher, wenn sie elektrisirt wird.

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad.-Sitz.-Ber. Bd. 96 S. 103 (1887).

2) Wied. Ann. (1883) Bd. 19 S. 524.

3) Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 93, II. S. 250 (1886).

4) C. R. vol. LXXVI (1878).

Diese Methode leidet aber, wie ich glaube, an einer vielleicht kaum zu vermeidenden Fehlerquelle, so dass man nicht aus der experimentell gesicherten Thatsache des rascheren Verdampfens einer elektrisirten Flüssigkeit auf eine Elektrisirung des Dampfes schliessen darf. Die Ursache der rascheren Verdampfung ist vielmehr in allererster Reihe in Luftströmungen zu suchen, welche bei hohen Spannungen unter dem Namen eines „elektrischen Windes" bekannt sind [1]).

Ich kam zu dieser Anschauung, als ich eine weitere einschlägige Frage studiren wollte, wo es mir infolge der Luftströmungen unmöglich war, ein befriedigendes Resultat zu erlangen.

Diese weitere Frage bezieht sich auf die Verdampfungswärme der elektrisirten Flüssigkeit: Aendert sich die Verdampfungswärme, d. h. jene Anzahl Calorien, welche nöthig sind, um eine Gewichtseinheit der Flüssigkeit in Dampf zu verwandeln, durch Elektrisirung oder nicht? Es erschien mir nämlich wahrscheinlich, dass im Falle einer Elektrisirung des Dampfes ein Theil der zum Verdampfen nöthigen Energie durch die elektrische Energie geliefert werden könnte, und ich hoffte, durch eine nicht allzu complicirte Versuchsanordnung eine eventuelle Abnahme der Verdampfungswärme experimentell nachweisen zu können. Nach dieser Auffassung wird im Funken trotz des Verdampfens der Elektroden sogar Wärme erzeugt; es würde somit bei nöthiger Dichte der Elektricität die Verdampfungswärme nicht nur kleiner, sondern sogar negativ, weil nämlich in diesem Falle die elektrische Energie nicht nur für die ganze zum Verdampfen nöthige Wärme aufkommt, sondern sogar noch einen Ueberschuss liefert.

Leider aber liess folgende von mir angewendete Methode eine directe Entscheidung über die Möglichkeit obiger Anschauung aus verschiedenen Gründen nicht zu. Ein cylindrisches Hohlgefäss aus Metall, 15 cm im Durchmesser und ½ cm Höhe, war einerseits durch einen Glashahn in directer Communication mit der äusseren Luft und durch eine zweite kleine Seitenöffnung in Verbindung mit einem Horizontalmanometer, welches selbst kleine Druckänderungen im Innern des Hohlgefässes rasch anzeigt. Die obere Platte dieses Hohlgefässes war concav wie eine flache Schüssel nach abwärts (und einwärts) gedrückt. Das Ganze ist somit ein empfindliches Luftthermometer, dessen obere Aussenfläche wie ein flacher Teller mit Flüssigkeit gefüllt werden kann.

Füllt man zunächst Wasser in den eben erwähnten Teller, so wird dasselbe verdampfen, die Luft im Innern dieses hohlen Tellers sich abkühlen und zusammenziehen; der Glashahn wird offen gelassen und erst nach Eintritt eines stationären Temperaturzustandes geschlossen.

1) Siehe z. B. die Arbeit von A. v. Obermayer und M. v. Pichler, Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 93 S. 409 (1886).

Die Index-Flüssigkeit im Manometer steht dann ganz ruhig; wurde nun aber die Wasseroberfläche mittels einer Influenzmaschine stark elektrisirt, so trat bei den Vorversuchen trotz der raschen Verdampfung des Wassers eine Erwärmung ein, welche Erwärmung aber, wie ich mich bald überzeugen konnte, mit den von mir erwähnten Ursachen nichts zu thun hatte. Es trat nämlich diese Erwärmung auch bei Elektrisirung des vollständig getrockneten Luftthermometers ein und konnte zwar durch ein sorgfältiges Ueberziehen mit Paraffin sehr geschwächt, nicht aber unmerklich gemacht werden. Dieses Erwärmen durch das blosse Ausströmen der Elektricität aus dem Metallthermometer macht die ganze Methode für die unmittelbar von mir vorgenommene Untersuchung illusorisch.

Der bei diesem Ausströmen auftretende elektrische Wind lässt aber auch, wie bereits früher erwähnt, die von Exner gemachte Schlussfolgerung einer Convection der Elektricität durch Verdampfen als keine zwingende erscheinen. Das eben geschilderte Apparatchen zeigt nämlich in geradezu überraschender Weise die Zunahme der Verdampfung beim Elektrisiren. Gibt man Aether oder Alkohol auf das Luftthermometer und schliesst man nach Eintreten des stationären Zustandes den Glashahn, so zeigt sich beim Elektrisiren infolge des rascheren Verdampfens eine sehr beträchtliche Temperaturabnahme, und man kann durch Nähern eines Leiters, z. B. eines Fingers, bis auf eine Entfernung von etwa 10 cm eine Temperaturabnahme von oft 10° C. erreichen.

Man kann also auch thermometrisch in sehr augenfälliger Weise zeigen, dass eine elektrisirte Flüssigkeit rascher verdampft als eine unelektrische. Die Schlussfolgerung aber, dass dies eine Folge der Elektrisirung des Dampfes sei, ist nicht gestattet, es ist vielmehr in erster und fast einziger Linie eine Folge des elektrischen Windes, welcher auch die Entscheidung der viel subtileren Frage nach der Grösse der Verdampfungswärme unmöglich macht.

Directer Nachweis der Elektrisirung des Dampfes.

Wie bereits eingangs erwähnt, gelang Exner, wenigstens für Alkohol und Aether, der directe Nachweis, dass der Dampf einer elektrisirten Flüssigkeit wieder elektrisch sei.

Ich habe nun eine sehr einfache und, wie ich glaube, bis auf einen wohl kaum zu umgehenden Punkt auch einwurfsfreie Methode gefunden, obige Thatsache einer Elektrisirung des Dampfes leicht und auch für Wasser zu zeigen. Ein Thomson'sches Elektrometer ist in der Art justirt, dass die beiden Quadrantenpaare mit je $+5$, resp. -5 Volt dauernd geladen sind, während die Lemniscate mit einer etwa 2 m entfernten, möglichst frei im Zimmer stehenden isolirten Kugel

Nr. I (3 cm Durchmesser) verbunden ist. Dieser Kugel steht in 2—3 m Entfernung eine zweite gut isolirte Kugel Nr. II (3 cm Durchmesser) gegenüber, welche mit Hilfe einer Influenzmaschine bis zum Potentiale von 25,000 Volt geladen werden kann. Zuerst ist die Lemniscate und Kugel Nr. I zur Erde abgeleitet, indess die Kugel Nr. II zu einem beliebigen Potentiale elektrisirt wird. Unterbricht man dann die Erdleitung und sind die Apparate genügend isolirt, so bleibt das Elektrometer absolut in Ruhe, aber nur, wenn Kugel Nr. II vollständig trocken ist. Befindet sich hingegen auf II ein selbst minimaler Wassertropfen, so wird nach Aufhebung der eben erwähnten Erdleitung die Lemniscate einen ziemlich beträchtlichen Ausschlag angeben, welcher nur dadurch erklärt werden kann, dass der von II weggehende Wasserdampf elektrisch ist

Statt der Kugel Nr. II wendete ich auch hohle Halbkugeln an, deren Ränder wulstförmig abgebogen und welche aussen sorgfältig mit Paraffin überzogen waren. In den Hohlraum dieser Kugeln kam dann die zu untersuchende Flüssigkeit; durch Einlegen von etwas Filtrirpapier, dessen Spitze ein wenig über die Oberfläche herausragt, kann die Erscheinung, welche der Reihe nach bei Wasser, Alkohol und Aether anstieg, besonders stark gemacht werden. Auch ein Gemisch von fester Kohlensäure und Aether gibt ein sehr auffallendes Resultat.

Man kann eine Art Gegenprobe in der Weise vornehmen, dass man nicht wie früher die influenzirte Kugel zur Erde ableitet, sondern durch ein zur Erde abgeleitetes Metallnetz vor einer Influenzirung schützt. Die befeuchtete Kugel II wird durch einige Minuten elektrisirt, dann zur Erde abgeleitet und hierauf das schützende Metallnetz entfernt. Der Elektrometerausschlag zeigt auch jetzt noch das Vorhandensein einer influenzirenden Dampfwolke an, welche sich allmählich zerstreut.

Aus verschiedenen Versuchen ergab sich aber, dass eine sichtbare Wirkung nur bei sehr grosser Dichte der Elektricität eintrat und dass auch dann noch die durch den Dampf mitgeführte Elektricitätsmenge eine sehr geringe war. Dieser Umstand dürfte die Ursache sein, warum Blacke ein negatives Resultat erhielt. Allerdings liegt in eben diesem Grunde die Möglichkeit eines Einwurfes, dass nämlich bei so hoher Dichte der Elektricität nicht mehr von einem Verdampfen im gewöhnlichen Sinne, sondern von einer Art Zerstäubung der Flüssigkeit die Rede sein könne.

Jedenfalls aber ist bewiesen, dass man durch starkes Elektrisiren einer Flüssigkeitsoberfläche eine durch längere Zeit frei schwebende, elektrisirte Dampfwolke oder Wolke aus Flüssigkeitströpfchen bilden, resp. deren Influenzwirkung nachweisen kann.

Universität Wien, Phys. Cabinet.

Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn E. Lampe zu meiner Abhandlung: „Die Schwere analytisch dargestellt als ein mechanisches Princip rotirender Körper".

Von

J. W. Häussler.

Gegen meine in Bd. 22 dieser Zeitschrift unter der vorstehenden Ueberschrift veröffentlichten Abhandlung hat Herr E. Lampe in Bd. 23 S. 571—574 einige Einwände erhoben, welche die Unzulässigkeit meiner Deductionen beweisen sollen. Herr Lampe geht bei seinen Auseinandersetzungen nicht von meinen, sondern von anderen Voraussetzungen aus, erhält also auch ein anderes Resultat.

Herr Lampe schreibt: „Principiell ist einzuwenden, dass die Existenz einer zwischen zwei Körpern wirkenden Kraft nie durch eine mathematische Rechnung erwiesen werden kann, es sei denn, dass die Voraussetzungen der Rechnung die zu beweisende mechanische Beziehung bereits enthalten." — Ich stimme hiermit vollständig überein. Die verlangten Voraussetzungen finden sich in meiner Abhandlung S. 501: „da die Schwere eine Eigenschaft der Himmelskörper [1]) ist, welche man nicht gut als nicht vorhanden annehmen kann, so wollen wir die Untersuchung von dem Gesichtspunkte aus führen, als ob wir von der Existenz der Schwere nichts wüssten."

Die Existenz der Schwere wird also nicht in Abrede gestellt; es wird jedoch als zweifelhaft angenommen, ob eine anziehende Kraft vorhanden ist, oder nicht. Diese Annahme, sowie die bekannte Thatsache, dass ein Gegenstand, wenn derselbe auf der Oberfläche der Erde entgegengesetzt der Richtung der Schwere verschoben wird, doch keine kinetische Energie nach dieser Richtung in sich aufnimmt, genügen als Voraussetzung zu meiner Untersuchung. Will man jedoch nicht so weit gehen, so kann man engere Grenzen für die Annahme ziehen; man setzt dann die Schwere als eine Kraft voraus, welche in Bezug auf ihre Richtung, Grösse und Ursache unbekannt ist.

---

1) Nicht der Materie.

Herr Lampe glaubt, ich habe die Existenz der Schwere als nicht vorhanden voraussetzen wollen. Da dies nicht in meiner Absicht lag, so erledigt sich dadurch der ad I angeführte Einwand des Hrn. Lampe. Der Einwand ad II sagt: „dass ich die Massenverringerung dm auf die ganze Masse der Kugel vertheilt habe" —. Dieser Einwand ist nicht recht verständlich. Bekanntlich denkt man sich bei einem rotirenden Körper die ganze Masse desselben in einem Punkte concentrirt, welcher um die Einheit der Länge von der Rotationsaxe entfernt ist. Aendert sich die Masse des rotirenden Körpers, so ändert sie sich in diesem Punkte. Ich wüsste nicht, warum die Masse eines rotirenden Körpers, wenn sich dessen Volumen ändert, nicht als eine veränderliche Grösse aufgefasst werden könnte.

An derselben Stelle glaubt Herr Lampe mich in Bezug auf das Vorzeichen corrigiren zu müssen, weil ich die Masse m, wenn sie um einen unendlich kleinen Werth verkleinert wird, durch $m + dm$ und nicht durch $m - dm$ ausgedrückt habe. Es ist bisher immer üblich gewesen, dass die Differentiale mit den positiven Vorzeichen gebildet werden und zwar deshalb weil sie nachher vom Anfangswerthe des veränderlichen Zustandes bis zum Endwerthe desselben integrirt werden. Ist der Endwerth kleiner wie der Anfangswerth, so hat das Integral selbstverständlich einen negativen Werth. Würde ich das Differential mit dem negativen Vorzeichen bilden, wie es Herr Lampe wünscht, so müsste ich umgekehrt vom Endwerthe bis zum Anfangswerthe integriren. Der Werth des Integrals wird in beiden Fällen derselbe; der letzte Fall ist jedoch gegen die hergebrachte Regel.

Schliesslich hat Herr Lampe es unternommen, von neuem die Veränderung zu berechnen, welche die Rotationsgeschwindigkeit der Erde erfährt, wenn auf derselben in einem gegebenen Punkte ein Kilogramm einer Substanz um die Länge von einem Meter gehoben wird. Bei der zu diesem Zwecke aufgestellten Gleichung hat Herr Lampe für die Arbeit dL kein Glied eingesetzt; natürlich kann sich auch am Schlusse der Rechnung dieses Glied nicht in der Gleichung vorfinden. Dasselbe muss aber auf alle Fälle eingesetzt werden. Man wird dies leicht einsehen, wenn man die Gleichung des Herrn Lampe benutzt, um die Veränderung zu berechnen, welche die Drehgeschwindigkeit der Erde erfährt, wenn an einem der beiden Pole ein Gegenstand gehoben wird. Die Gleichung des Herrn Lampe gibt dafür den Werth $d\omega = 0$; d. h. die Drehgeschwindigkeit der Erde bleibt constant. Lässt man aber nun den gehobenen Gegenstand zur Erde wieder zurückfallen, so erhält derselbe durch den Fall eine gewisse kinetische Energie, während die Drehgeschwindigkeit der Erde constant bleibt. Es würde also in diesem Falle eine gewisse kinetische Energie erregt werden, ohne dass

dafür ein entsprechendes Aequivalent auf eine andere Weise frei würde. Die Gleichung des Herrn Lampe kann demnach auf keinen Fall richtig sein.

Die Aufgabe, welche ich gestellt habe, kann mit der Annahme, dass die Schwere eine Eigenschaft der Materie sei, überhaupt nicht gelöst werden. Dies wird ganz besonders klar, wenn man diese Annahme macht, und die Rechnung in der von mir gegebenen Weise durchführt. Man erhält genau dieselben Gleichungen, welche ich aufgestellt habe, auch die Gleichung S. 509

$$g = \frac{4}{5}\pi^2 q\ (r^2 - r_1^2) - 4R\pi^2 r^2 \cos\vartheta.$$

Wenn man nun aber hierin die Rotationen r und r_1 gleich Null werden lässt, so erhält man

$$g = 0,$$

d. h. wenn die Erde keine rotirende Bewegung hätte, so wäre die Beschleunigung beim freien Fall gleich Null; ein in die Höhe gehobener Körper würde, wenn er losgelassen würde, nicht zur Erde zurückfallen. Man kommt also auf diese Weise zu dem Resultat, dass die Schwere keine Eigenschaft der Materie sein kann.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 24. Mai 1887.

Vorsitzender: Major A. v. Obermayer.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Prof. Dr. E. Fleischl v. Marxow hält den angekündigten Vortrag: „Ueber die chemischen Wirkungen des Herzstosses".

Wien, 10. October 1887.

Der Secretär.

Protokoll der ordentlichen Generalversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 25. October 1887.

Vorsitzender: Major A. v. Obermayer.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Nachdem der Vorsitzende einen kurzen Bericht über das abgelaufene Vereinsjahr erstattet, verliest er einen vom Hoffmann-Comité in Berlin eingelaufenen Brief, in welchem die Gesellschaft eingeladen wird, sich an der Hoffmann-Feier zu betheiligen. Er schlägt vor, ein Comité zur entsprechenden Beschlussfassung einzusetzen und am Schlusse der Sitzung zu wählen.

Herr Prof. Dr. Franz Exner hält den angekündigten Vortrag: „Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft".

Herr Dr. Hans Molisch spricht: „Ueber Wurzelausscheidungen".

Die Wahl der Vereinsfunctionäre ergibt: als Präsidenten Herrn Dr. Guido Goldschmiedt, als Vicepräsidenten Herrn Prof. Dr. Sigm. Exner, als Schriftführer Herrn O. W. Fischer.

Ins Hoffmann-Comité werden gewählt die Herren: Major A. v. Obermayer, Prof. Dr. A. Lieben, Prof. Dr. L. v. Barth und der Vereinskassier Herr A. v. Waldheim.

Schliesslich wird als neues Mitglied Herr Adalbert v. Bithó aufgenommen.

Wien, 8. November 1887.

Der Secretär.

Ueber **Meyers Konversations-Lexikon**, von dem soeben der 9. Band der jetzt erscheinenden, vollständig umgearbeiteten 4. Auflage ausgegeben wurde, bemerkte die „Deutsche Rundschau", die sonst mit Lobsprüchen sehr sparsam ist, in ihrem neuesten Heft: „Es ist nicht möglich, die Aufgabe eines solchen Werkes höher zu erfassen, als hier geschehen, noch auch in jedem Betracht, dem litterarischen, artistischen und rein technischen, vollkommener zu erfüllen. — Keine Frage, dafs es, wenn vollendet, alles, was auf diesem Gebiet jemals in Deutschland geleistet worden ist, übertreffen und auch die Probe des Auslandes siegreich bestehen wird." Wir unterschreiben dieses rühmende Urteil aus eigener Anschauung, denn wir haben das Werk erst jüngst als einen wahren Hausschatz bezeichnet und dessen Anschaffung angelegentlichst empfohlen. Dafs der 9. Band noch vor dem Weihnachtsfeste ausgegeben wurde, wird jeder von den Vielen begrüfsen, die das hervorragende Werk als prächtiges und wertvolles Geschenk zu verwenden beabsichtigen. (3|1)

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale

Elektrische Maasssystem

im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis M. 1.—.

Verlag von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig.**

Soeben erschien:

der fünfte Jahrgang 1888

des

Kalender für Elektrotechniker.

Herausgegeben von

F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant geb. Preis 4 M., dazu Beilage brosch. 60 Pf.

Der neue Jahrgang hat abermals viele Erweiterungen erfahren, sowohl in der Physik (Magnetismus, Photometrie), als in der Elektrotechnik (Messmethode). Mehrere Tabellen sind neu berechnet und an passenden Orten Zusätze gemacht worden. In Anbetracht des stets wachsenden Materials erschien es nothwendig, diesmal einen Theil desselben abzuscheiden und in einer Beilage unterzubringen.

Nachstehende Inhaltsübersicht wird die jetzige Vertheilung des umfangreichen Materials auf Taschenbuch und Beilage veranschaulichen.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Warmbrunn, Quilitz & Co., Berlin C., Rosenthalerstrasse 40. (1a/1)	Physikal. und chemische Apparate u. Instrumente für Laboratorien u. Vorlesungen.
Schuckert, S., Nürnberg. (13a/1)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT. Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte

Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a/1)

Die billigste und reichhaltigste naturwissenschaftliche Wochenschrift ist

„Der Naturwissenschaftler"

Preis vierteljährlich Mark 2,—

Des **Naturwissenschaftlers** Programm ist:

Schilderung der Fortschritte und Errungenschaften sämtlicher Gebiete der Naturwissenschaft und deren praktischer Anwendung in **Schule** und **Haus, Industrie, Handel** und **Verkehr** in **leicht fasslichen, anregenden** Aufsätzen, deren Verständnis durch **Illustrationen** möglichst näher gebracht wird.

☞ Probenummern gratis und franko durch die Verlagshandlung

Berlin SW. 48. **Riemann & Möller.** (1/1)

Verlag von **Friedrich Vieweg & Sohn** in **Braunschweig.**

(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

Soeben erschien:

Die mechanische Wärmetheorie.

Von **R. Clausius.**

Erster Band. **Entwickelung der Theorie, soweit sie sich aus den beiden Hauptsätzen ableiten lässt, nebst Anwendungen. Dritte umgearbeitete und vervollständigte Auflage.** Mit Holzstichen. gr. 8. geh. **Preis 8 Mark.** (2/1)

Verlag von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig.**

Taschenbuch für Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von Ingenieur **S. Freiherr v. Gaisberg.**

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

klein 8. VIII und 128 Seiten. Preis gebunden 2 M. 40 Pf.

APR 3 1888

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 2. Heftes.

Ueber die Bahn eines freien Theilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe. Von Friedrich Roth. (Schluss.) S. 65.
Seismograph mit elektrischem Registrirapparat. Von Dr. Carl Fröhlich. S. 79.
Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation. Von Prof. Adalbert Rysánek. S. 90.
Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite. Von Dr. O. Tumlirz. S. 115.
Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 8. November 1887. S. 133.
Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 22. November 1887. S. 134.
Eingesendete Bücher. S. 135.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,
Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 1).

Jahrgang 1888 Nr. 3 enthält:

Rundschau. — **Neue Versuche über den galvanischen Lichtbogen.** Von Dr. E. Lecher. — **Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Leitungsvermögens der Elektrolyte von den in ihnen enthaltenen pulverförmigen, dielektrischen Medien.** Von H. Lux, Breslau. — **Die Frage des reichspostamtlichen Telephonmonopols.** — **Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens.** — **Literatur.** Josef Krämer, Kalender für Elektrotechnik pro 1888. — F. Uppenborn, Kalender für Elektrotechniker. — **Kleinere Mittheilungen.** Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung in Berlin. — Die elektr. Beleuchtung des Burgtheaters in Wien. — **Finanzielle und industrielle Nachrichten.** Zur Kupferhausse. — Metallpreise. — **Patente.** — **Briefkasten der Redaction.**

Jahrgang 1888 Nr. 4 enthält:

Rundschau. — **Rotations-Dynamometer.** (Patent Donath Bánki.) Von Ganz & Co. in Budapest. — **Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Leitungsvermögens der Elektrolyte von den in ihnen enthaltenen pulverförmigen, dielektrischen Medien.** Von H. Lux, Breslau. (Fortsetzung.) — **Elektromagnetische Stimmgabel.** Von F. Uppenborn. — **Ueber Fabrikbeleuchtung.** Von F. Kröttlinger. — **Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung.** Ueber Edlund's Disjunctionsströme. Von Dr. E. Lecher. — Photographische Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge. Von E. Mach und P. Salcher. — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachricht. Prof. Balfour Steward †. — Telephonie. Uebelstand im Stadtfernsprechbetriebe in Berlin. — Fernsprechverbindungen mit Köln. — Telephondienst in Wien. — Erweiterung des Telephonnetzes in Oesterreich. — Telegraphie vom Zuge aus. — Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung in Augsburg. — Elektr. Strassenbeleuchtung in Berlin. — Elektr. Beleuchtung in Hamburg, Dresden, Genf, Pressburg, Debreczin, Temesvár. — Verschiedenes. Preisliste von Stöcker & Co. in Leipzig. — Ausführung preisgekrönter Kandelaber in Berlin. — Erlass der Statthalterei in Wien. — Patentprocess der Firma Siemens & Co. in Charlottenburg gegen mehrere Nürnberger Firmen. — **Finanzielle und industrielle Nachrichten.** Kosten der elektr. Beleuchtung der königl. Theater in Berlin. — Gründung des elektrotechn. Geschäftes Lau, Haaicke & Co. in Hamburg. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, Verlagsbuchhandlung.

HARVARD COLLEGE
APR 3 1883
LIBRARY.

Ueber die Bahn eines freien Theilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe.

Von

Friedrich Roth.

(Schluss.)

III.

Bestimmung der relativen Bahnen, wenn Kräfte vorhanden sind, welche der Scheibe entlang wirken.

C.

Die gegebene Kraft wirke vom Drehungspole aus abstossend und stehe im geraden Verhältnis der Entfernung. Der Reibungswiderstand fehle.

Diese Aufgabe und die beiden nachfolgenden (D und E) haben insofern eine allgemeinere Bedeutung, als in ihnen gleichzeitig der Fall mit enthalten ist, dass die Ebene der Bahn näherungsweise für das sphärisch gekrümmte Stück einer Fläche gesetzt wird, wenn die Fläche sich um eine durch den Nabelpunkt hindurchgehende Achse dreht, und gleichzeitig eine unveränderliche Kraft in der Richtung der letzteren wirkt. Dies findet z. B. statt bei der Bewegung auf der Oberfläche von Rotationskörpern, welche sich gleichmässig um ihre lothrechte Achse drehen, wenn das bewegte Theilchen nur dem Einflusse der Schwerkraft unterworfen ist. Da es sich nur um eine Annäherung handelt, können wir das unendlich kleine Stück der gegebenen Fläche durch die Oberfläche der im Nabelpunkte berührenden Kugel ersetzen. Dann aber wird, wenn ψ den Bogenabstand des bewegten Körpers von der Achse bedeutet, der längs der Kugeloberfläche wirkende Antheil der parallel zur Achse wirkenden Kraft p ausgedrückt durch $p \sin \psi$. Bei Auflösung des $\sin \psi$ in eine Reihe bliebe bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von ψ nur $p \cdot \psi$, ein Ausdruck, der sich auf der berührenden Ebene in Const. r verwandeln würde.

Auch bieten diese Aufgaben die Möglichkeit des Ueberganges von unseren Voraussetzungen zu denen, wie sie den physikalischen Verhältnissen der wagerechten Ebene auf der Erdoberfläche entsprechen.

Wollen wir nämlich unsere Folgerungen auf eine solche nahe dem Pole der Erde liegende Ebene übertragen, so haben wir nur w als die Winkelgeschwindigkeit der täglichen Umdrehung aufzufassen und in die Formel der gegebenen Kraft im $-w^2 \cdot r$ einzufügen, weil dies diejenige Beschleunigung vorstellt, welche in der Nähe des Poles dem durch die Achsendrehung der Erde entstehenden Fliehbestreben das Gleichgewicht hält. Allgemein ist diese Beschleunigung, wenn β die geographische Breite und R den Erdhalbmesser vorstellt, in der Richtung des Längenkreises $-R\cos\beta \cdot \sin\beta \cdot w^2$, am Nordpole also, wo $\sin\beta$ zu eins und $R\cos\beta$ zu unserem radius vector r wird, $-rw^2$, wie wir behauptet. Nun ist ferner nicht schwer zu beweisen, dass das, was für die relative Bewegung auf einer wagerechten Ebene am Pole gilt, im wesentlichen für jede solche Ebene in beliebiger Breite wahr bleiben muss, wenn man nur in den betreffenden Formeln für die Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung das Product derselben in den Sinus der geographischen Breite einführt. Und so enthalten denn die Auflösungen der nachfolgenden Aufgaben gleichzeitig die allgemeinen Grundzüge für die Bahnen eines freien Theilchens auf einer wagerechten Ebene bei Berücksichtigung der Umdrehung der Erde um ihre Achse und bei dem Vorhandensein einer Kraft, die von einem Punkte dieser Ebene aus in derselben Weise wirkt, wie in den nachstehenden Untersuchungen für eine sich drehende Scheibe angenommen wird. Es dürfte wohl am Platze sein, hier darauf hinzuweisen, dass wir unter der letzteren uns eine Ebene vorstellen, auf welcher ein im Raume ruhender Punkt, wenn ein äusserer Anstoss fehlt, auch absolut an seiner Stelle bleibt, während auf der Niveaufläche ein relativ stillstehender Körper in Beziehung zu ihr an seinem Orte beharrt. Doch kehren wir zu unsrer Aufgabe zurück.

Ist f der Coefficient im Ausdrucke der Kraft, so dass $+fr$ diejenige Beschleunigung vorstellt, mit welcher die Einheit der Masse vom Drehungspole fortgetrieben wird, so haben wir nach den in den früheren Abschnitten gegebenen Erklärungen als die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2w \cdot \frac{dy}{dt} + (w^2 + f)\,x, \qquad (43$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2w\frac{dx}{dt} + (w^2 + f)\,y, \qquad (44$$

in der Form $F(x, t) = 0$, mithin unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise

$$x^{IV} + 2(w^2 - f)\,x'' + (w^2 + f)^2 x = 0,$$

$F(y, t)$ dem gleich, nur überall y statt x.

Setzt man jetzt $x = e^{\lambda t}$, so hat man zur Berechnung von λ eine einfache biquadratische Gleichung zu lösen, deren Wurzeln sind

$$\lambda_1 = iw + \sqrt{f}, \quad \lambda_2 = iw - \sqrt{f},$$
$$\lambda_3 = -iw + \sqrt{f}, \quad \lambda_4 = -iw - \sqrt{f}.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe in die allgemeine Formel

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t}$$

bekommt man nach Umwandlung der Glieder mit imaginären Exponenten in trigonometrische Functionen und nach der dadurch nöthig werdenden Constantenvertauschung:

$x = e^{\sqrt{f}\cdot t}(A\cos\cdot wt + B\sin\cdot wt) + e^{-\sqrt{f}\cdot t}(D\cos\cdot wt + E\sin\cdot wt)$, eine Gleichung, der man durch Anwendung neuer unveränderlicher Hilfsgrössen die einfache Gestalt geben kann

$$x = k\cdot e^{\sqrt{f}\cdot t}\cdot\cos(m - wt) + k_1 e^{-\sqrt{f}\cdot t}\cos(n - wt). \qquad (45$$

Zur Auffindung des Ausdruckes $y = F(t)$ gibt uns Gl. 43

$$2wy' = x'' - w^2 x - fx.$$

Bildet man sich durch Ableitung von Gl. 45 nach t den Differentialquotienten x'' und setzt in die letzte Gleichung ein, so bekommt man, zur Abkürzung T für $\overline{m - wt}$, T_1 für $\overline{n - wt}$ geschrieben:

$$y' = k\cdot e^{\sqrt{f}\cdot t}(-w\cos T + \sqrt{f}\cdot\sin T) + k_1 e^{-\sqrt{f}\cdot t}(-w\cos T_1 - \\ -\sqrt{f}\cdot\sin T_1).$$

Dies ist aber offenbar das Differential von

$$y = k\cdot e^{\sqrt{f}\cdot t}\sin(m - wt) + k_1 e^{-\sqrt{f}\cdot t}\cdot(\sin n - wt). \qquad (46$$

Nennen wir die beiden in der Formel für x vorkommenden Summanden x_1 und x_{II}, die Glieder bei y entsprechend y_1 und y_{II} und setzen

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \quad x_{II}^2 + y_{II}^2 = r_{II}^2$$
$$\text{arc}\cdot\text{tg}\cdot(y_1 : x_1) = \vartheta_1, \quad \text{arc}\cdot\text{tg}\cdot(y_{II} : x_{II}) = \vartheta_{II},$$

so leuchtet aus der Betrachtung von Gl. 45 und Gl. 46 sofort ein, dass man sich die gesuchte Bahn durch die Zusammensetzung zweier logarithmischer Spiralen entstanden denken kann, deren Curvengleichungen bezw. sind

$$r_1 = k\cdot e^{\sqrt{f}\cdot t} = k\,e^{\frac{m\sqrt{f}}{w}}\cdot e^{-\frac{\sqrt{f}}{w}\cdot\vartheta_1},$$
$$r_{II} = k_1\cdot e^{-\sqrt{f}\cdot t} = k_1 e^{-\frac{n\sqrt{f}}{w}}\cdot e^{\frac{\sqrt{f}}{w}\vartheta_{II}}.$$

Wir haben somit wieder jene eigenthümliche krumme Linie vor uns, auf welche wir schon bei der Lösung der Aufgaben II und III B

gestossen sind. Es genügt jetzt, auf meine früheren ausführlichen Darlegungen dieses Gegenstandes hinzuweisen; und es bliebe uns nur noch übrig, zu untersuchen, wie in unserem Falle die einzelnen Schneckenlinien gewunden sind und in welcher Richtung sie durchlaufen werden.

Da

$$\frac{d\vartheta_{\mathrm{I}}}{dt} = \frac{d\vartheta_{\mathrm{II}}}{dt} = -w$$

und nach der Voraussetzung die Linksdrehung die positive ist, so findet in den beiden die Doppelspirale bildenden Curven die Bewegung in der Weise statt, dass der Leitstrahl im Sinne des Uhrzeigers sich dreht. Ferner ist

$$\frac{dr_{\mathrm{I}}}{d\vartheta_{\mathrm{I}}} = -\frac{\sqrt{f}}{w} \cdot r_{\mathrm{I}}, \quad \frac{dr_{\mathrm{II}}}{d\vartheta_{\mathrm{II}}} = +\frac{\sqrt{f}}{w} r_{\mathrm{II}};$$

folglich öffnet sich die Schneckenlinie I, weil ihr Leitstrahl mit wachsendem ϑ_{I} abnimmt, nach rechts, die II. dagegen nach links. Wir haben also — bis auf die für jede besondere Aufgabe zu bestimmenden Constanten — ganz dieselben Verhältnisse wie bei derjenigen Bahn, welche nach unseren im II. Abschnitt mitgetheilten Berechnungen von einem Theilchen beschrieben wird, das sich auf der umschwingenden Scheibe nur durch den Reibungswiderstand $-av$ gehemmt ohne jede treibende Kraft bewegt, und wir können somit das oben S. 16 des vorigen Jahrganges gesperrt Gedruckte als Lösung der jetzigen Aufgabe ohne Veränderung gelten lassen und die auf S. 16—19 folgenden Erörterungen nach entsprechender Constantenverwandlung auf die hier behandelte Aufgabe übertragen.

D.

Es bleibe alles wie bei der vorigen Aufgabe, nur wirke die Kraft nicht abstossend, sondern anziehend nach dem Drehungspole hin.

Der anziehende Punkt werde wieder Coordinatenanfang. Um von der Annahme einer abstossenden Kraft zu einer anziehenden überzugehen, haben wir nur f mit einer negativen Zahl, die $-\varphi$ sei, zu vertauschen. In dem ersten Theile der mathematischen Entwicklungen kann man dann f zunächst stehen lassen und somit die ersten Formeln der vorigen Aufgabe wieder benutzen; erst bei den Wurzeln der Differentialgleichungen müssen wir eine Veränderung vornehmen, indem wir setzen

$$\lambda_1 = i(w + \sqrt{\varphi}), \quad \lambda_2 = i(w - \sqrt{\varphi}),$$
$$\lambda_3 = -i(w - \sqrt{\varphi}), \quad \lambda_4 = -i(w + \sqrt{\varphi}).$$

Da diese Werthe ganz imaginär sind, so erhalten wir nach bekannten Regeln der Analysis:

$$\begin{aligned} x = {} & C_1\left[\cos\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t} + i\sin\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t}\right] + \\ & + C_2\left[\cos\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t} - i\sin\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t}\right] + \\ & + C_4\left[\cos\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t} - i\sin\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t}\right] + \\ & + C_3\left[\cos\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t} - i\sin\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t}\right]. \end{aligned}$$

Durch Einführung neuer Constanten verwandelt sich dies in:

$$\left.\begin{aligned} x = M\cos\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t} + N\sin\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t} + P\cos\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t} + \\ + Q\sin\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t}. \end{aligned}\right\} \quad (47$$

Zur Berechnung von y bietet uns Gl. 43 die Beziehung

$$2wy' = x'' - w^2x + \varphi x.$$

Fassen wir nun die beiden ersten Glieder der Gl. 47, welche $(w+\sqrt{\varphi})\,t$ enthalten, unter der Bezeichnung X_1, die beiden letzten unter X_2 zusammen, so dass

$$x = X_1 + X_2,$$

so ist

$$x'' = -(w+\sqrt{\varphi})^2 \cdot X_1 - (w-\sqrt{\varphi})^2 \cdot X_2.$$

Die Einsetzung dieses Ausdruckes in die Gleichung für $2wy'$ führt zu dem Schlusse:

$$y' = -(w+\sqrt{\varphi}) \cdot X_1 - (w-\sqrt{\varphi}) \cdot X_2$$

und mithin durch Integration zu dem Werthe von y:

$$\left.\begin{aligned} y = -M\sin\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t} + N\cos\sqrt{(w+\sqrt{\varphi})\,t} - \\ - P\sin\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t} + Q\cos\sqrt{(w-\sqrt{\varphi})\,t}. \end{aligned}\right\} \quad (48$$

Wählen wir neue unveränderliche Grössen, indem wir setzen

$$\begin{aligned} M &= k\cdot\cos m, & P &= k_1\cos n, \\ N &= k\sin m, & Q &= k_1\sin n, \end{aligned}$$

so vereinfachen sich die Gleichungen 47 und 48 zu

$$x = k\cdot\cos\cdot\sqrt{m-(w+\sqrt{\varphi})\,t} + k_1\cos\cdot\sqrt{n-(w-\sqrt{\varphi})\,t}, \quad (49$$

$$y = k\sin\cdot\sqrt{m-(w+\sqrt{\varphi})\,t} + k_1\sin\sqrt{n-(w-\sqrt{\varphi})\,t}. \quad (50$$

Eine einfache Probe auf die Richtigkeit dieser Gleichungen bietet uns die Anwendung derselben auf die Bahn, welche ein freies Theilchen auf einer wagerechten Ebene nahe dem Nordpol der Erde beschreibt, wenn es allein seiner Trägheit überlassen bleibt. Wir haben uns dann nur unter w die Winkelgeschwindigkeit der täglichen Drehung der Erde

vorzustellen und für $r \cdot \varphi$ denjenigen Theil der Massenanziehung der Erde einzuführen, der infolge der ellipsoidischen Gestalt der letzteren die Körper längs des Meridians nach den Polen zu treibt und sie hindert, der durch die Achsendrehung der Erde entstehenden Schwungkraft zu folgen. Diese polwärts gerichtete Beschleunigung aber ist, wie schon im Anfange der vorigen Nummer erklärt worden, gleich $-r \cdot w^2$. Demnach ist in dem besonderen zu behandelnden Falle φ gleich w^2, mithin $\overline{w - \sqrt{\varphi}}$ Null, und die Gleichungen 49 und 50 gestalten sich zu

$$\text{H)} \qquad \begin{cases} x = k \cos(m - 2wt) + k_1 \cos n, \\ y = k \sin(m - 2wt) + k_1 \sin n, \end{cases}$$

Formeln, denen man nach Auflösung der trigonometrischen Functionen die Gestalt geben kann:

$$\text{K)} \qquad \begin{cases} x = A \cos(2wt) + B \sin(2wt) + D, \\ y = B \cos(2wt) - A \sin(2wt) + E, \end{cases}$$

wo A, B, D und E allgemein unveränderliche Grössen bedeuten. Diese letztere Darstellungsweise (K) entspricht derjenigen, die ich für die Gleichungen der in Rede stehenden Bahn in meiner 1882 erschienenen Programmabhandlung „die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche" gewählt habe, und die Nullsetzung von A und D führt zu derjenigen Form, in welcher Sprung in seinen „Bahnlinien eines freien Theilchens auf der rotirenden Erdoberfläche" die Curvengleichung des Trägheitskreises aufgestellt hat (Wiedenmann's Annalen 1881).

Ausserdem gibt uns Gl. H:

$$(x^2 - k_1 \cos n)^2 + (y - k_1 \sin \cdot n) = k^2,$$

woraus unmittelbar einleuchtet, dass die hier als besonderer Fall zu suchende Bahn ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt nicht im Pole selbst liegt. Die Uebereinstimmung dieser Folgerungen mit den von andern und auf verschiedene Weise abgeleiteten Ergebnissen bietet uns somit die Bestätigung für die Richtigkeit unserer obigen Behauptungen.

Die Natur der in der vorliegenden Aufgabe gesuchten allgemeinen Curve erkennen wir leicht aus den Gleichungen 49 und 50. Denn bei Anwendung der oben gebrauchten Abkürzungen erhellt sofort, dass

$$X_1^2 + Y_1^2 = k^2, \quad X_2^2 + Y_2^2 = k_1^2$$

$$\overline{Y_1 : X_1} = \operatorname{tg}[m - (w + \sqrt{\varphi})t], \quad \overline{Y_2 : X_2} = \operatorname{tg}[n - (w - \sqrt{\varphi})t].$$

Folglich durchläuft der bewegte Punkt in Beziehung zu der sich drehenden Scheibe den Umfang eines Kreises (Halbmesser k_1) mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\sqrt{\varphi} - w}$, links herum also, wenn $\varphi > w^2$, rechts herum, wenn $\varphi < w^2$; und dieser ganze Kreis wird gleichzeitig parallel zu sich so

verschoben, dass sein Mittelpunkt auf dem Umfange eines andern um den Coordinatenpol beschriebenen ruhenden Kreises (Halbmesser k) mit der Winkelgeschwindigkeit $-(w+\sqrt{\varphi})$, mithin immer im Sinne des Uhrzeigers weiter rückt. Die Bewegung in beiden Kreisen ist eine gleichmässige; die Bahn ist demnach ein Epicyklus im Sinne des Ptolemäus.

Die leicht abzuleitende Beziehung

$$r^2 = x^2 + y^2 = k^2 + k_1^2 + 2k \cdot k_1 \cos \overline{m - n - 2\sqrt{\varphi} \cdot t},$$

in welcher w ganz fehlt, sagt uns ferner, dass der Abstand des bewegten Theilchens vom Coordinatenpol von der Umdrehungsgeschwindigkeit der Bildebene unabhängig ist. Dasselbe gilt von dem Winkel, den der vom Drehungspole nach dem Mittelpunkt des beweglichen Kreises gezogene Leitstrahl mit dem zum jeweiligen Curvenpunkte gehörigen Halbmesser des letzteren Kreises bildete.

Zum Schlusse möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass ein Epicyklus, bei welchem — wie dies hier der Fall ist — die Umdrehung in beiden Kreisen mit gleichmässiger Geschwindigkeit erfolgt, auch als Epicykloide dargestellt werden kann, wenn man nur die Beschränkung fallen lässt, dass der curvenerzeugende Punkt in dem Umfange des rollenden Kreises liegt, und gestattet, dass er in der Ebene des letzteren an einer beliebigen, durch die Bedingungen der Aufgabe zu bestimmenden Stelle angebracht werden kann.

E.

Die Voraussetzungen der Aufgabe mögen dieselben bleiben wie in C und D, aber es trete ein Reibungswiderstand hinzu, der im geraden Verhältnisse der Geschwindigkeit wirkt.

Den Fall der Abstossung und der Anziehung behandeln wir dabei gleichzeitig, indem wir zunächst mit f rechnen und uns erst am Schlusse entscheiden, welchen Einfluss die Art des Vorzeichens des Coefficienten ($+f$ oder $-\varphi$) der gegebenen Kraft in den betreffenden Formeln ausübt. Dann haben wir jetzt zu den Bedingungsgleichungen von C (43 und 44) nur die Projectionen der Reibung $-ax'$ und $-ay'$ hinzuzuzählen und erhalten so

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2w\frac{dy}{dt} - a\frac{dx}{dt} + (w^2 + f)x, \tag{51}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2w\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} + (w^2 + f)y. \tag{52}$$

Rechnet man sich nun aus Gl. 51 y' als $F(x, t)$ aus, bildet daraus die höheren Ableitungen von y nach t und setzt die Ergebnisse in die

einmal differentiirte Gl. 52 ein, so kommt man auf die Form $F(x, t) = 0$, nämlich

$$x^{IV} + 2ax''' + 2(w^2 - f)x'' + a^2x'' - 2a(w^2 + f)x' + (w^2 + f)^2x = 0.$$

Die Auffindung des Integrals, welches dieser Formel genügt, gipfelt (nach Einführung von $e^{\lambda t}$ für x) in der Auflösung einer Gleichung, die für λ des vierten Grades ist, aber durch den einfachen Kunstgriff, dass man auf beiden Seiten $-4w^2\lambda^2$ hinzufügt, in den rein biquadratischen Ausdruck übergeht:

$$(\lambda^2 + a\lambda)^2 - 2(\lambda^2 + a\lambda)(w^2 + f) + (w^2 + f)^2 = (\pm 2w\lambda i)^2.$$

Die zugehörigen Wurzeln haben die allgemeine Gestalt:

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm wi \pm \frac{1}{2}\sqrt{4f + a^2 \mp 4awi},$$

wobei zu beachten, dass die Vorzeichen der beiden imaginären Glieder immer einander entgegengesetzt sein müssen. Die hier vorkommenden Quadratwurzeln zerlegen wir in die Summe zweier Quadratwurzeln, ganz so wie auf S. 7 im II. Abschnitt $\sqrt{a^2 \mp 4awi}$. Für die dann entstehenden Summanden führen wir wiederum Abkürzungen ein, indem wir schreiben

$$\beta_1 \text{ für } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4f + a^2) + \sqrt{(4f + a^2)^2 + 16a^2w^2}}{2}},$$

$$\gamma_1 \text{ für } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-(4f + a^2) + \sqrt{(4f + a^2)^2 + 16a^2w^2}}{2}}.$$

Dann sind unter Beachtung der zwischen den Vorzeichen der einzelnen Glieder herrschenden Beziehungen die Wurzeln der nach λ zu lösenden Gleichung:

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + wi + \beta_1 - i\gamma_1,$$

$$\lambda_2 = -\frac{a}{2} + wi - \beta_1 + i\gamma_1,$$

$$\lambda_3 = -\frac{a}{2} - wi + \beta_1 + i\gamma_1,$$

$$\lambda_4 = -\frac{a}{2} - wi - \beta_1 - i\gamma_1.$$

Vertauscht man hier β_1 mit β, γ_1 mit γ, so bekommt man genau dieselben Werthe von λ, wie wir sie oben an der eben genannten Stelle abgeleitet hatten. Es kann deshalb keinem Zweifel unterliegen, dass auch die dort gefundene Formel für x (Gl. 14 auf S. 8) nach Anfügung der Indices an β und γ der jetzigen Aufgabe genügt, selbstverständ-

lich, solange über den Zahlenwerth der Constanten, deren Bezeichnung wir beibehalten, volle Freiheit der Bestimmung gelassen wird. Wir haben demnach:

$$x = \varrho \cdot e^{\left(\beta_1 - \frac{a}{2}\right)t} \cdot \cos\overline{(\gamma_1 - w)t - \chi} + \varrho_1 e^{-\left(\beta + \frac{a}{2}\right)t} \cdot \cos\cdot\overline{(\gamma_1 + w)t - \chi_1}. \quad (53$$

Zur Aufsuchung des Ausdruckes $y = F(t)$ bilden wir zunächst aus Gl. 51:

$$y' = \frac{x'' + ax' - w^2x - fx}{2w}.$$

An der angezogenen Stelle der früheren Aufgabe hatten wir statt dessen

$$y' = \frac{x'' + ax' - w^2x}{2w}.$$

Der jetzige Werth von y' unterscheidet sich also nur dadurch von dem früheren, dass im Zähler $- fx$ dazu getreten ist. Wir können mithin die dort auf S. 8 und 9 angedeutete Entwicklung auch hier benutzen, wenn wir bei β und γ den Index 1 hinzufügen und dann die Formel für $2wy'$ um fx verringern. Bei der Zusammenziehung der zu gleichen Veränderlichen gehörigen constanten Factoren haben wir zu erwägen, dass, wie eine einfache Ausrechnung beweist,

$$\beta_1^2 - \gamma_1^2 = \frac{a^2}{4} + f, \; 2\beta_1\gamma_1 = aw,$$

$$\text{d. h. } \beta_1^2 - \gamma_1^2 = \beta^2 - \gamma^2 + f, \; \beta_1\gamma_1 = \beta\gamma.$$

Da nun $\overline{\beta_1^2 - \gamma_1^2}$ als Summand in denjenigen Coefficienten auftritt, die zu dem Cosinus der Winkel $\overline{(\gamma_1 - w)t - \chi}$ und $\overline{(\gamma_1 + w)t - \chi_1}$ gehören, und da dieselben trigonometrischen Functionen in dem Werthe von x ausschliesslich vorkommen, so hebt sich in dem entstehenden Ausdrucke für $2wy'$ überall das ausserhalb des Wurzelzeichens stehende f weg, sodass das Endergebnis sich nur durch den Index bei β_1 und γ_1 von der früheren im II. Abschnitte für y' abgeleiteten Gleichung unterscheidet. Mithin muss die Function von t, welche die Ordinate y selbst darstellt, der auf S. 9 (Bd. 23) stehenden Formel 15 vollständig entsprechen, d. h. es ist

$$y = \varrho \cdot e^{\left(\beta_1 - \frac{a}{2}\right)t} \cdot \sin\overline{(\gamma_1 - w)t - \chi} - \varrho_1 e^{-\left(\beta_1 + \frac{a}{2}\right)t} \sin\overline{(\gamma_1 + w)t - \chi_1}. \quad (54$$

die Bahn setzt sich also auch hier wieder aus zwei logarithmischen Spiralen zusammen. Der Neigungswinkel (ε_{I} und ε_{II}) der Tangenten gegen den Fahrstrahl ist auch jetzt in beiden Schneckenlinien seinem

absoluten Werthe nach derselbe. Die eine Spirale ist das Spiegelbild der anderen. Denn es ist $\cot g\, \varepsilon_{\mathrm{I}} = -\cot g\, \varepsilon_{\mathrm{II}}$. Setzt man nämlich

$$\frac{2\beta_1 - a}{2(\gamma_1 - w)} = -\frac{2\beta_1 + a}{2(\gamma_1 + w)},$$

so folgt durch Wegschaffung der Nenner und Aufhebung der gleichen Glieder

$$2\beta_1\gamma_1 = aw,$$

eine Folgerung, deren Richtigkeit wir schon oben eingesehen haben.

Die Seite, nach welcher die einzelnen Schneckenlinien sich öffnen, und die Richtung, in der sie durchlaufen werden, hängt ab von dem Vorzeichen des Coefficienten von t im Exponenten von e und davon, ob $\overline{\gamma_1 - w}$ und $\overline{\gamma_1 + w}$ grösser oder kleiner als Null sind. Im Betreff der zweiten Spirale, deren Polarcoordinaten durch die Gleichungen bestimmt sind

$$r_{\mathrm{II}} = \varrho_1 \cdot e^{-\left(\beta + \frac{a}{2}\right)t}, \quad \vartheta_{\mathrm{II}} = (\gamma_1 + w)t - \chi_1,$$

und von der wir, wie bei der ersten Voraussetzung oben in II (bis S. 17) annehmen wollen, dass sie auf dem Umfange der ruhenden Spirale $(r_{\mathrm{I}}, \vartheta_{\mathrm{I}})$ parallel zu sich gleitet, ändert sich nichts gegen früher; denn $\overline{\beta_1 + \frac{a}{2}}$ und $\overline{\gamma_1 + w}$ bleiben ebenso wie $\overline{\beta + \frac{a}{2}}$ und $\overline{\gamma + w}$ stets positiv.

Von der Spirale I hatten wir an jener Stelle bewiesen, dass sie sich nach rechts öffnet und von dem Mittelpunkte der andern im Sinne des Uhrzeigers durchlaufen wird. Dies hatten wir daraus geschlossen, dass $\overline{\beta + \frac{a}{2}}$ stets positiv, $\overline{\gamma - w}$ dagegen auf alle Fälle negativ bleibt.

Nehmen wir an, dass w Null sei, so machen wir den Werth von β_1 kleiner; er wird aber dann zu

$$\frac{1}{2}\sqrt{4f + a^2},$$

ist also grösser als $\frac{a}{2}$, solange f eine positive Zahl, d. h. solange die gegebene Kraft eine abstossende ist. Da nun in Wirklichkeit w nicht verschwindet, so muss dieser Schluss von dem nicht verkleinerten β_1 erst recht gelten; $\overline{\beta_1 - \frac{a}{2}}$ ist folglich ebenso wie $\overline{\beta - \frac{a}{2}}$ grösser als Null, wenn der bewegte Körper vom Drehungspole aus abgestossen wird.

Vergrössern wir den Radikanden der inneren Wurzel des Ausdruckes von γ_1 um $64w^2(w^2+f)$, so gestaltet sich derselbe zu

$$(a^2+4f)^2+16w^2(a^2+4f)+64w^4=(a^2+4f+8w^2)^2,$$

und γ_1 wird zu w. Ist nun f eine positive Zahl, so ist auch $\sqrt{w^2+f}$ und mit diesem das Binom, das ich zu der Grundzahl der inneren Quadratwurzel von γ_1 hinzugefügt habe, positiv. Wir haben dann durch Vergrösserung von γ_1 den Werth von w erhalten; folglich ist γ_1 kleiner als w oder γ_1-w negativ. Wenn also die gegebene Kraft vom Coordinatenpol aus abstossend wirkt, so ist die Bahn, was die Natur der beiden Schneckenlinien und die Richtung der Einzelbewegungen in ihnen angeht, die nämliche wie in dem Falle, wo das freie Theilchen zwar auch durch einen Reibungswiderstand gehemmt wird, sonst aber allein dem Gesetze der Beharrung folgt.

Diese Schlüsse können in ihrer Allgemeinheit nicht mehr gelten, sobald die gegebene Kraft anziehend wirkt. Denn ist f gleich $-\varphi$, so wird für

$$w=0\ \beta_1 \text{ zu } \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4\varphi}.$$

Solange a^2 grösser als 4φ, bleibt dies eine reelle Zahl, aber β_1 ist kleiner als $\frac{a}{2}$. In Wirklichkeit verschwindet w nicht, es hängt daher von dem Zahlenwerthe dieser Grösse ab, ob in einem bestimmten Falle $\beta_1-\frac{a}{2}$ grösser oder kleiner als Null wird. Setzen wir w gleich $\sqrt{\varphi}$, eine Annahme, die, wie wir am Schlusse der vorigen Aufgabe sahen, zu der Trägheitsbahn auf wagerechter Ebene führt, so wird $\beta_1-\frac{a}{2}$ zu Null. Denn wir ändern dann den Werth von β_1 nicht, wenn wir, wie vorhin bei γ_1, zu der Basis der inneren Wurzel, $64w^2(w^2-\varphi)$ hinzuzählen. Dadurch aber wird

$$\beta_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-4\varphi+a^2-4\varphi+8w^2}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4(w^2-\varphi)}=\frac{1}{2}a.$$

Während wir es also hierbei der Ausrechnung eines Beispieles in bestimmten Zahlen überlassen müssen, wie wir uns über das Vorzeichen des Ausdruckes $\beta_1-\frac{a}{2}$ zu entscheiden haben, lässt sich in Betreff der Winkelgeschwindigkeit γ_1-w ein allgemeiner Gesichtspunkt gewinnen. Wir wir oben sahen, nimmt γ_1 den Werth w an, wenn wir in seiner Formel zu dem Radikanden $(a^2+4f)^2+16a^2w^2$ das Product $64w^2(w^2+f)$ hinzuzählen. Dies muss auch wahr bleiben, wenn wir

f mit $-\varphi$ vertauschen. Solange nun $w^2 > \varphi$, ist $64\,w^2(w^2-\varphi)$ eine positive Zahl, und wir müssen γ_1 vergrössern, um es gleich w zu machen; $\gamma_1 - w$ ist folglich negativ, und diejenige Schneckenlinie (I), die wir uns als ruhend dachten, wird von dem Mittelpunkte der Spirale II im Sinne des Uhrzeigers durchlaufen; ist aber w^2 kleiner als φ, so ist $64\,w^2(w^2-\varphi)$ negativ, γ_1 wird mithin durch Verringerung gleich w, $\gamma_1 - w$ ist also positiv. Dies bedeutet aber, dass die ruhende Schneckenlinie links herum durchlaufen wird.

Zur Erläuterung des Gesagten seien noch die wichtigsten Ergebnisse zweier Beispiele mitgetheilt. Nehmen wir die oben im II. Abschnitt S. 19 gebrauchten Zahlenwerthe und setzen $\varphi = 25$, 4φ demnach gleich 100, so ergibt sich für $\beta_1 - \frac{a}{2}$ ein negativer Bruch (— 0,0186). Da nun $w^2 = \pi^2$ nur 9,8696 beträgt, so ist hierbei $w^2 < \varphi$, folglich $\gamma_1 - w$ positiv. Die Spirale I wird also von dem Mittelpunkte der II entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers durchlaufen, und dabei nähert sich die Spirale II, weil $\beta - \frac{a}{2} < 0$, dem Coordinatenpol. Die Grundspirale öffnet sich also ebenso wie früher nach rechts, nur die Richtung der Bewegung längs ihres Umfanges ändert sich.

Nimmt man dagegen φ zehnmal kleiner, zu 2,5, so bekommt $\beta_1 - \frac{a}{2}$ einen positiven Werth (0,049). Da nun ausserdem, weil jetzt $w_1 > \varphi$, $\gamma_1 - w$ kleiner als Null wird, so bleiben bei dieser Grösse von φ die Verhältnisse der Bewegung in der Grundspirale wie bei der im II. Abschnitt behandelten Trägheitsbahn.

Der Wendepunkt für das Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit $\gamma_1 - w$, wo diese durch Null hindurchgeht, liegt, wie wir schon sahen, bei $w = \sqrt{\varphi}$. Dieser Punkt ist auch noch insofern von Wichtigkeit, als er uns eine Probe auf die Richtigkeit unserer Hauptformeln gestattet. Wie schon wiederholt erwähnt, enthält die Gleichung $w^2 = \varphi$ die Bedingung für die Bewegung eines freien Theilchens auf einer wagerechten Ebene am Nordpol, wenn dabei jede treibende Kraft fehlt. Wir hatten vorhin nachgewiesen, dass dann β_1 gleich $\frac{a}{2}$ wird; folglich verwandeln sich in diesem bestimmten Falle die Gleichungen 53 und 54 zu

(L
$$\begin{cases} x = \varrho \cdot \cos\chi + \varrho_1 e^{-at} \cdot \cos(2wt - \chi_1), \\ y = -\varrho \sin\chi - \varrho_1 e^{-at} \cdot \sin(2wt - \chi_1). \end{cases}$$

Eine leichte Umänderung gibt:

M)
$$\begin{cases} x - \varrho\cos\chi = \varrho_1 e^{-at}\cos(\chi_1 - 2wt), \\ y + \varrho\sin\chi = \varrho_1 e^{-at}\sin(\chi_1 - 2wt). \end{cases}$$

Diese Formeln entsprechen aber ganz denjenigen, die wir im Octoberhefte des 20. Bandes dieser Zeitschrift S. 688—691 abgeleitet haben, wenn man nur dort die geographische Breite gleich 90° und f gleich Null nimmt. Man hat nur zu setzen

$\varrho \cos \chi$ an Stelle des dortigen C_2
$-\varrho \sin \chi$ „ „ „ „ C_4,
mithin $x - \varrho \cos \chi$ für das dort stehende x_2 (oder x_3),
und $y + \varrho \sin \chi$ „ „ „ „ y_2 (oder y_3),
ϱ_1 anstatt R, χ_1 für μ,
oder $\varrho_1 \cos \chi$ für E, $\varrho_1 \sin \chi_1$ für G.

Durch diese Probe wird also die Richtigkeit der in dieser Aufgabe gezogenen Schlüsse bestätigt.

Bei den sieben Aufgaben, die wir in dieser Schrift behandelt haben, sind es nur drei Curvenarten, durch welche die gesuchte Bahn dargestellt wird, nämlich die Evolvente, der Epicyklus und endlich in fünf oder, wenn wir die letzte Aufgabe doppelt zählen, in sechs Lösungen jene logarithmische Doppelspirale, die wir, wenn wir ein griechisches Wort dafür gebrauchen wollten, als „Ephelix“ bezeichnen müssten. Es ist auf den ersten Blick auffallend, dass dieselbe Curvengattung den verschiedensten voneinander abweichenden Bedingungen genügen kann; ich habe selbst am Schlusse des Theiles A des III. Abschnittes es offen ausgesprochen, wie mich die Entdeckung überraschte, dass die Natur der Bahn auch nach dem Hinzukommen einer Kraft sich nicht ändere, und habe daran Veranlassung genommen, dort eine Probe auf die Richtigkeit meiner Folgerungen hinzuzufügen.

Ein kurzes Nachdenken lehrt jedoch, dass es ganz verkehrt sein würde, in der scheinbaren Gleichheit der Ergebnisse einen Grund zum Zweifel an der Richtigkeit der betreffenden Lösungen zu finden. Zunächst vergesse man nicht, dass die allgemeine Evolvente sowohl wie auch die logarithmische Doppelspirale ausserordentlich vielgestaltig sind, so dass bei einer Ausführung der Zeichnung der Bahn unter verschiedenen Voraussetzungen die darzustellenden krummen Linien so abweichend voneinander werden, dass man ohne die mathematische Formelsprache schwerlich auf den Gedanken einer Gemeinsamkeit der Curvenzüge kommen würde. Auch wiederholen sich ja in den Theilen der vorstehenden Arbeit gewisse Annahmen; vom Einfacheren zum Verwickelteren fortschreitend haben wir denselben Gegenstand später unter Zulassung immer grösserer Schwierigkeiten von neuem behandelt, so dass die letzten Aufgaben die vorhergehenden als besondere Fälle in sich schliessen. Eine gewisse Aehnlichkeit der Lösungen ist daher nothwendig und in der Natur der Sache begründet.

Ausserdem ist es in der theoretischen Mechanik gar nichts Ungewöhnliches, dass dieselbe krumme Linie den verschiedensten Bedingungen der Bewegung genügt. So gibt die Ellipse nicht bloss dann die Bahn eines bewegten Theilchens an, wenn eine Kraft in umgekehrtem Quadrate der Entfernung von einem festen Punkte aus anziehend wirkt, sondern auch, wenn die Anziehung im einfachen Verhältnisse mit der Entfernung vom anziehenden Punkte wächst. Die Parabel ist nicht nur die Wurflinie, bei welcher wir die Schwerkraft uns überall gleich stark und gleich gerichtet denken, sondern sie ist auch die Bahn eines Kometen, wenn in irgend einer Zeit seine Geschwindigkeit in einem bestimmten Verhältnisse zu Entfernung und zur Massenanziehung der Sonne steht. Diese Beispiele, deren Zahl jeder Mathematiker aus der theoretischen Mechanik beliebig vermehren könnte, werden, so hoffe ich, den letzten Rest der Bedenken zerstreuen, die im Geiste des Lehrers vielleicht auftauchten, als er sah, dass in der vorstehenden Abhandlung in einer grösseren Anzahl von Fällen derselbe allgemeine analytische Ausdruck verschiedenen Annahmen über die Natur der Kräfte genügte.

Buxtehude im October 1887.

Seismograph mit elektrischem Registrirapparat.

Von

Dr. **Carl Fröhlich.**

Die zeitweise auftretenden, bald schwächeren, bald stärkeren Bewegungen der Erdrinde, die „Erdbeben", zeigen sich in der Regel als wellenförmig fortschreitende, schaukelnde Bewegung des Bodens, die, von einem Centrum, dem eigentlichen Orte der subterranen Katastrophe ausgehend, sich radiär verbreiten, und bei genauer Beobachtung die Lage dieses Punktes genau bestimmen lassen.

Direct senkrecht über der Stelle des Erdinneren, von welcher aus ein Angriff auf die obersten Schichten des Erdbodens erfolgt, an dem Epicentrum, geschieht entweder eine mehr oder weniger rasche Erhebung, oder eine Senkung.

Entfernter von dieser Centralstelle wird nun die Erdoberfläche bei einem Stosse eine Elevation, bei Senkung eine Depression in der Richtung nach dem Centrum erfahren.

Wären beispielsweise in einiger Entfernung rings um den Centralherd eine Anzahl freischwingender Pendel aufgehängt, so müssten dieselben bei einer Elevation des Bodens sämmtlich aus der ursprünglichen Lage *a* (Fig. 1) in die Lage *b* übergehen, sich also von dem Centrum entfernen. Umgekehrt verhielte es sich, wenn eine Einsenkung stattfände. Dann müssten sämmtliche Pendel sich dem Centralpunkte nähern. Ein direct über dem Centralpunkte aufgehängtes Pendel würde in keine horizontale Schwingung versetzt, jedoch in eine verticale, wenn das Aufhängemittel elastisch wäre, z. B. aus einer Spiralfeder bestünde. Dann würde bei Senkung des Aufhängepunktes das Pendel sich verkürzen, bei Hebung sich verlängern.

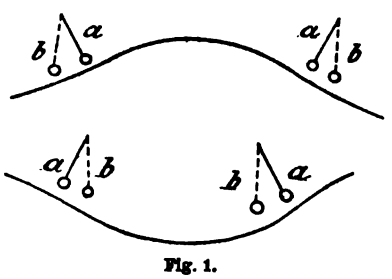


Fig. 1.

Auf diesen Principien beruht der vom Verfasser construirte Apparat zum Nachweise schwacher Erdbewegungen, die ohne besondere Hilfsmittel der Beobachtung entgehen würden, zum Nachweise der Richtung und der Zeit des ersten Stosses, der Lage des Epicentrum, der Intensität und zeitlichen Aufeinanderfolge der einzelnen Stösse.

An einer aus dünnem Messingdrahte gefertigten Spirale *a* (Fig. 2) ist das etwa 300 g schwere Metallgewicht *b* frei aufgehängt. Dasselbe taucht mit seiner unteren Spitze in das Quecksilbergefäss *c*, und ist dadurch mit dem einen Pol des Elementes *g* leitend verbunden. Diesem Gewichte stehen, den vier Himmelsrichtungen entsprechend, vier durch die Schrauben *e* verstellbare Contactfedern *d* gegenüber. (Der Deutlichkeit halber sind in der Zeichnung nur zwei Contactfedern angegeben.) An dem oberen Ende des Gewichtes *b* befindet sich die kreisrunde Contactscheibe *g*, der gleichfalls zwei Contactfedern *h* und h_1 durch die Schrauben *i* beliebig genähert werden können. Das ganze System ist in einem festen Gehäuse angebracht, das an einer massiven sonstigen Erschütterungen nicht zugänglichen Mauer fest und unverrückbar befestigt wird.

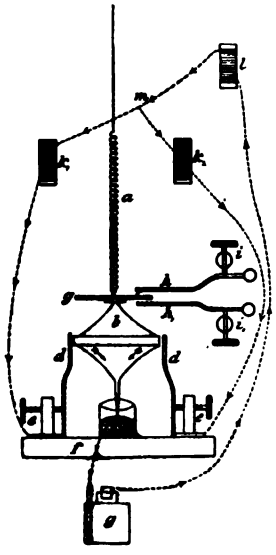


Fig. 2.

Sind nun die vier Contactfedern *d* dem Gewichte *b* möglichst genähert, ohne es indessen zu berühren, so muss bei der geringsten Abweichung des Gehäuses aus der ursprünglichen verticalen Lage das Gewicht nothwendig je nach der Richtung der Abweichung an eine der Contactfedern anschlagen.

Ferner wird bei einer Hebung des Systems (durch Stoss von unten) die Contactscheibe *g* vermöge der elastischen Aufhängung an die Feder h_1, bei einer Senkung an *h* anschlagen.

Jede dieser Contactfedern steht in leitender Verbindung mit je einem Elektromagnete einer Auslösevorrichtung, ähnlich wie dieselbe in Hotels zum Nachweise der Zimmernummern gebräuchlich ist. Die sechs Enddrähte dieser sechs Elektromagnete vereinigen sich danach bei *m* zu einer weiteren Drahtverbindung, welche zu einer Vorrichtung führt, die, ähnlich wie die eben angegebene construirt, am Boden einer Regulatoruhr angebracht ist, und dieselbe durch elektrische Auslösung zum Stillstehen dadurch bringt, dass ein herabfallender Hebel das Pendel hemmt. Es wird also jedesmal, sobald das Gewicht *b* oder die Contactscheibe *g* eine der Contactfedern berührt, auch die Uhr

zum Stillstehen gebracht, dadurch die Zeit des ersten Erdstosses und durch die jeweils herabgefallene Signalscheibe der Elektromagnete k_1 bis k_6 die Richtung des Stosses ersichtlich.

Im selben Momente wird der Stromkreis, der bisher in dem Pendelhemmungsapparate keine Unterbrechung erfuhr, durch das Abfallen des Hebels geöffnet, und dadurch verhütet, dass nach dem ersten Stosse durch das allenfallsige weitere Anschlagen des Gewichtes *b* an die anderen Contactfedern auch die übrigen Richtungsapparate (k_2 bis k_6) ausgelöst würden und so die ursprüngliche Richtung des Stosses resp. der wellenförmigen Erdbewegung zweifelhaft liessen.

Mit dem Oeffnen dieses Stromkreises wird ein Nebenkreis mit Läutewerk geschlossen, das nun solange alarmirt, bis der Beobachter die Hemmungsvorrichtung der Uhr wieder einstellt.

Die Construction dieses Pendelhemmungs-Apparates veranschaulicht Fig. 3.

Dem Elektromagneten *a* steht der um *e* drehbare Hebelanker *b* gegenüber, welcher den um *c* drehbaren Hebelarm *f* während der Ruhezeit des Magneten aufrecht stützt.

Der Drehungs-Punkt *c* steht mit dem einen Drahtende *g* des Elektromagnets *a* in leitender Verbindung.

Hinter dem Hebel *f* sind auf einer isolirten Platte das Messingplättchen *h* mit der Feder *k* und das Plättchen *i* mit dem Contactstifte *l* so angebracht, dass der Hebel *f* frei darüber hinwegspielen kann. Jedes derselben ist je mit den Leitungsdrähten *m* und *n* in leitender Verbindung. Der bei *m* eintretende Strom geht also, falls im Apparat (Fig. 2) ein Stromschluss entsteht, durch *h*, die Feder *k* zu *c*, von da durch *g*, den Elektromagneten *a* zurück durch Apparat Fig. 1 zu *o*. Im selben Momente wird aber der Anker von *a* angezogen, der Hebel *f* fällt in der Richtung

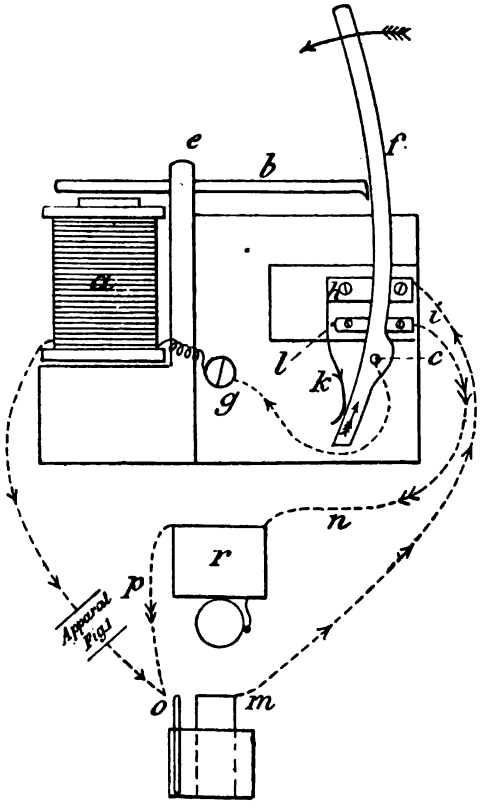


Fig. 3.

des beigezeichneten Pfeiles auf das Pendel der Uhr, um es zu hemmen, dadurch kommt die Feder *k* auf den Contactstift *l* zu liegen, und das untere Ende des Hebels *f* entfernt sich, kommt ausser Contact mit der Feder *k*. Der von *h* eintretende Strom kann also nicht mehr über *c* zu *g*, sondern gelangt durch *l* zu *i*, von da zum Läutwerk *r* und durch *p* zum Pole *o*. Die Glocke läutet nun so lange, bis *f* wieder in seine ursprüngliche Stellung zurückgebracht und dadurch die Feder *h* von dem Contactpunkte *l* entfernt wird und dem unteren Ende des Hebels *f* wieder anliegt. Damit ist der Apparat zu weiteren Beobachtungen wieder eingestellt. Eine frühere von mir als zu umständlich wieder verlassene Einrichtung zum Nachweise verticaler Stösse ist in Fig. 4 gegeben. Es wurden hier die Schwankungen eines am längeren Arme mit dem Gewichte *a* belasteten, am kürzeren durch die Spiralfeder *d* balancirten Doppelhebels, dessen Drehungspunkt in *c* liegt, benutzt, um mit den beiden oben und unten befindlichen Contactfedern *b* und b_1 ebenso wie in Fig. 2 einen Contact zu erzielen. Der Apparat hat allenfalls den Vortheil, dass er von den Horizontalschwankungen des Gewichtes *b* unabhängig ist, complicirt aber die Construction unnöthigerweise.

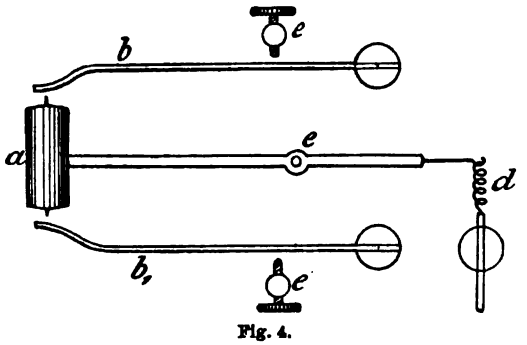


Fig. 4.

An dem bis jetzt beschriebenen Apparate kann also ersehen werden:

1. Die Himmelsrichtung der horizontalen Erdbewegung, und zwar nach dem erstmaligen Anschlage des Gewichtes, nach welcher Richtung eine Senkung des Bodens stattfand, da dasselbe an diejenige Contactfeder anschlägt, die der Richtung der Senkung entspricht.

2. Falls der Apparat sich zufällig senkrecht über der Centralstelle befände, die verticale Richtung, die der erste Stoss hatte, ob eine Erhebung oder eine Senkung stattfand.

3. Die Zeit, welche dem ersten Stosse entspricht.

Es bleibt dabei immer noch unentschieden, wo der Centralpunkt, das Epicentrum der Erderschütterung gesucht werden muss, da eben eine erstmalige Hebung oder Senkung des Bodens einen direct entgegengesetzten Einfluss auf den Apparat hat. Wenn derselbe z. B. im ersteren Falle Süd anzeigte, so würde er im letzteren Falle Nord an-

geben, und da man nicht wissen kann, welcher Art die centrale Bewegung war, so ist man auch nicht im Stande, zu bestimmen, ob dieselbe nord- oder südwärts zu suchen ist.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn mehrere Apparate auf weit auseinanderliegende Orte vertheilt sind.

Denken wir uns einen Apparat in *A* (Fig. 5) befindlich, einen zweiten in *B*, einen in *C* und einen vierten in *D*. Von diesen vier Apparaten wird ein Erdbeben gemeldet, das zur selben oder doch nahezu zur selben Zeit durch dieselben signalisirt wurde.

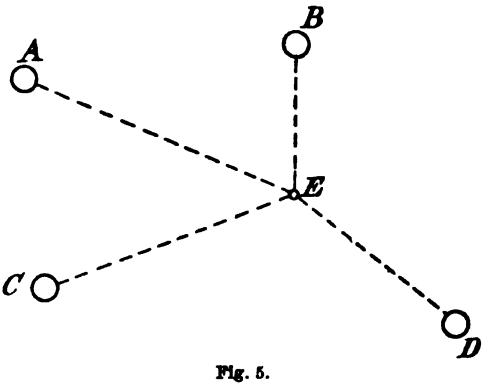


Fig. 5.

Der Apparat *A* zeigt eine Senkung an in der Richtung nach SO, *B* nach S, *C* nach NO und *D* nach NW. Diese vier Richtungen schneiden sich in dem Punkte *E*, folglich muss hier das Epicentrum der Bewegung gesucht werden, und zwar muss eine Senkung des Bodens stattgefunden haben, da alle Apparate sich nach dieser Richtung hin neigten.

Würde umgekehrt der Apparat *A* NW, *B* N, *C* SW, *D* SO als Bewegungsrichtung angeben, so müssten, da diese Richtungen direct auseinandergehen, dieselben nach rückwärts verlängert gedacht werden, wo sie sich in *E* schneiden. Alle Apparate neigten sich nach der *E* abgewandten Seite, es muss also in *E* eine Hebung des Bodens stattgefunden haben.

Auf diese Weise ist es möglich, die Lage des Epicentrum zu bestimmen, was besonders da einen Werth hat, wo dasselbe submarin ist, folglich von Anwohnern nicht direct wahrgenommen werden kann.

Auch als Warnungssignal für die Inwohner vulkanischer Gegenden lässt sich der Apparat verwenden, der dann in seiner Construction wesentlich vereinfacht wird. Da es hier auf genauere Richtungsbestimmungen nicht ankommt, so wäre nur nöthig, dem Contactgewichte anstatt der vier Contactfedern einen Ring mit mehreren Contactschrauben beizugeben, und in den Stromkreis ein Läutwerk einzuschalten, das beim Anschlagen des Gewichtes an eine der Schrauben alarmirt. Dadurch würden die Bewohner von den leisesten, sonst gar nicht bemerkbaren Schwankungen in Kenntnis gesetzt und besonders während der Nacht aus dem Schlafe geweckt, auf die drohende Gefahr aufmerksam gemacht.

Nebst der Feststellung der Zeit und Richtung des ersten Erdstosses bildet nun aber ein weiteres sehr wichtiges Moment die genaue Beobachtung des Verlaufes: der Dauer und zeitlichen Aufeinanderfolge der einzelnen Stösse, ihrer Intensität, und somit der Gesammtdauer des Erdbebens. Der zu diesem Behufe construirte Registrirapparat basirt auf folgenden Grundprincipien:

Wird durch eine horizontale Bewegung des Bodens das Gewicht *b* (Fig. 2) den Contactfedern *d*, oder durch eine verticale die Scheibe *g* den Federn hh_1 genähert, so wird je nach dem Grade des heftigeren oder leiseren Anschlagens infolge des Nachgebens der Federn ein länger oder kürzer dauernder Stromschluss bewirkt. Dieser Strom wird nun durch eine Zweigleitung auf einen Schreibapparat übertragen, der in Fig. 6 gegeben ist.

Eine Magnetisirungsspirale *a* trägt an ihrem Kopfe die Rolle *c*. Ueber diese läuft ein Faden, an dessen einem Ende der leichte hohle Eisencylinder *b*, am anderen der Metallstreifen *d* mit der Schreibfeder *e* befestigt ist. *f* dient als Führung des Streifens, der an seinem unteren Ende durch das leichte Gewicht *i* belastet ist.

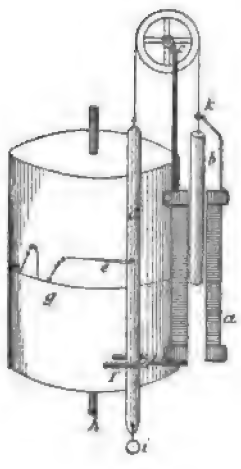


Fig. 6.

Die Feder *e* liegt einer mit berusstem Papiere bezogenen Trommel *g* an, die durch ein in der Zeichnung weggelassenes Uhrwerk in langsame Umdrehung versetzt werden kann.

Wird nun ein Strom durch die Rolle *a* gesandt, so zieht dieselbe den Cylinder *b* in ihre Höhlung, und zwar um so tiefer, je länger und intensiver der Strom einwirkt. Dadurch wird der Streifen *d* mit der Schreibfeder *c* gehoben; lässt der Strom nach, so wird *d* durch das Gewicht *i* wieder herabgezogen, bis *b* an den Ring *k* anstösst und am weiteren Austreten aus der Spirale gehindert ist.

Solcher Schreibvorrichtungen werden drei in verschiedenen Höhen der rotirenden Trommel angelegt, eine, die die Anschläge des Gewichtes *b* (Fig. 2) an die, Nord und Süd entsprechenden Contactfedern registrirt, eine für die Schwankungen von Ost und West und eine dritte zum Aufzeichnen der verticalen Bewegungen. Auf diese Weise werden die stärkeren oder schwächeren Anstösse des Gewichtes an die Contactfedern durch mehr oder weniger steile und excursive Curven auf der rotirenden Trommel dargestellt, und somit der ganze Verlauf des Erdbebens fixirt. Schlägt bei heftiger Erderschütterung das Gewicht *b* rasch und energisch an eine der Contactfedern an und geschieht infolge

dessen der Stromanschluss schnell und intensiv, so wird auch der betreffende Eisencylinder rasch in die Höhlung seiner Magnetisirungsspirale hineingezogen und die Curve infolge dessen hoch und rasch ansteigend.

Geschieht dagegen der Contact langsam und mit wenig Energie, wie bei ganz schwachen Erderschütterungen, so wird in umgekehrter Weise die Curve infolge des nur kurz dauernden Stromschlusses niedrig, schräg aufsteigend, da hier auch die Stromüberleitung nicht momentan erfolgt, sondern gewissermaassen nach und nach zu Stande kommt, resp. der Widerstand der Platincontacte durch die langsamere Annäherung auch langsamer abnimmt.

Fig. 7.
Künstlich erzeugte Curven.

Der Apparat zeichnet also nicht nur die Erdstösse nach ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge, sondern auch nach ihrer Intensität. Fig. 7 und Fig. 8 geben ein Bild dieser Curven.

In Fig. 7 bedeutet *c* einen einmaligen, schwachen, *d* bis *e* mehrere aufeinander folgende stärkere, *f* bis *g* viele rasch aufeinander gefolgte Stösse, ein förmliches Beuteln.

Die unter der Abscisse befindliche unterbrochene Linie bezeichnet die einzelnen Secunden, also die Zeit, innerhalb welcher der ganze Vorgang sich abspielte. Es wären also in diesem Falle vom ersten Stosse *c* bis *g*, wo der Schreibapparat wieder in Ruhe kam, 29 Secunden verflossen, und wenn z. B. der Chronometer für den ersten Stoss *c* die Zeit $1^h\ 45'\ 30''$ angegeben hat, so erfolgte die zweite Erschütterung *d* um $1^h\ 45'\ 34''$, die dritte, stärkste *f* um $1^h\ 45'\ 44''$.

Fig. 8 zeigt die Curven, die der an einer Erschütterungen zugänglichen Wand befestigte Apparat während des Vorbeifahrens eines Wagens

zeichnete. Der Apparat war fein eingestellt, und die im Zimmer kaum bemerkbaren Erschütterungen wurden durch diese Curven wiedergegeben.

Hierbei möge übrigens noch Eines bemerkt werden. Wird eine der Contactfedern *d* (Fig. 2) mittels ihrer Stellschraube dem Gewichte *b* soweit genähert, dass sie dasselbe schliesslich berührt, so geräth das Gewicht in vollständig gleichmässige Schwingungen und der Schreib-

Fig. 8.
Durch einen vorüberfahrenden Wagen erzeugte Curven.

apparat zeichnet, ohne dass eine Erschütterung von aussen die Veranlassung wäre, gleichförmige Curven.

Wir haben hier das Spiel des sog. Trevelyan-Instrumentes (vergl. Tyndall, Wärme, III. Aufl. § 113). Im Momente des Contactes erwärmen sich die beiden Contactpunkte, dehnen sich aus, infolge

Fig. 9.

dessen wird das Gewicht zur Seite geschleudert, fällt abgekühlt wieder zurück, und nun wiederholt sich derselbe Vorgang.

Es dürfen also diesen nur auf fehlerhaftem Einstellen des Apparates beruhenden Erscheinungen keine seismische Bedeutung beigelegt werden.

Fig. 9 zeigt eine solche Curve.

Es kann also, wie wir gesehen haben, der Apparat in seiner einfachsten Form als blosse Warnungsvorrichtung, in complicirterer Form zur Angabe der Zeit und Richtung allein gebraucht werden, oder endlich in Verbindung mit dem Schreibapparate als Registrirwerk, das den ganzen Verlauf des Erdbebens vom ersten Stosse an selbständig aufzeichnet.

Zu letzterem Behufe ist schliesslich noch die Einschaltung einer Stromunterbrechungsvorrichtung nothwendig. Es geht nämlich die eine Zweigleitung beispielsweise vom Säulchen *d* (Fig. 10) zum Registrirapparate *o* und von da zurück zur Batterie *q*. Somit ist ein Stromkreis *q c b — d e o q* gebildet, der zwischen *b* und *d* durch Anschlagen von *b* an *d* geschlossen werden kann.

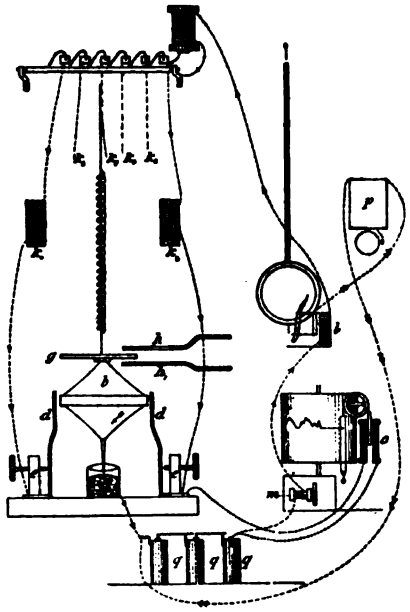


Fig. 10.

Stehen aber, wie in Fig. 2 bei dem einfachen Richtungsapparate, die Drahtenden sämmtlicher Elektromagnete k_1 bis k_6 bei *m* unter sich in Verbindung, so kann, wenn auch der Strom durch den Apparat *l* (siehe auch Fig. 3) unterbrochen wird, doch noch ein Zweigstrom *q* (Fig. 10) nach *c*, *b*, *d*, *e*, k_1, *m* (Fig. 1), k_2, *e*, *o* (Fig. 10) *q*, ebenso bei den übrigen zwei mit den beiden anderen hier nicht gezeichneten Schreib- resp. Registrirapparaten verbundenen Contactfedern, und es könnten somit bei heftigerer Bewegung von *b* doch noch eine oder die andere Richtungsscheibe abfallen und somit die Richtung des ersten Stosses zweifelhaft lassen.

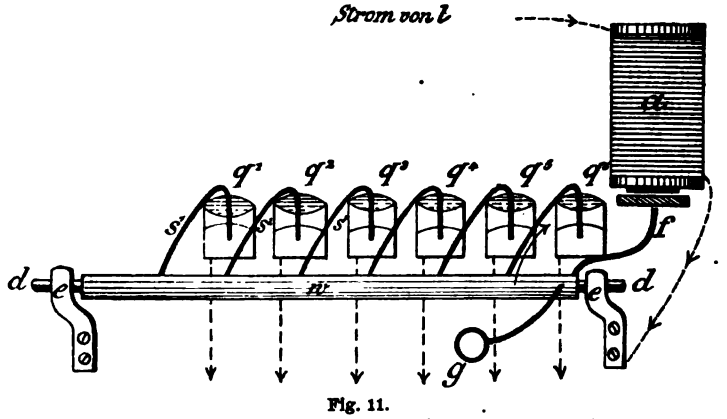


Fig. 11.
Stromverzweigung zu den einzelnen Signalapparaten k_1 bis k_6.

Um dies zu verhüten, dient der Apparat Fig. 11: derselbe besteht aus 6 voneinander isolirten Quecksilbernäpfchen q_1 bis q_6, denen eine in den Lagern *c* um die Zapfen *d* drehbare eiserne Welle gegenüber-

steht; an dieser Welle sind 6 Drahtbügel s^1 bis s^6 derart befestigt, dass selbe zugleich in je eines der Quecksilbernäpfe eintauchen, und so die Stromverbindung derselben mit der Welle w und dem Lager c herstellen, jedoch beim Umdrehen der Welle nach rückwärts aus den Näpfen sich herausheben. Diese Umdrehung wird durch ein an der Welle befestigtes schwereres Gegengewicht g bewirkt. Das System, bei eingetauchten Bügeln mittels des Ankers des in Ruhe befindlichen Elektromagneten a und den an der Welle w befestigten Hebelarm f in der gezeichneten Stellung gehalten, fällt zurück, sobald der Elektromagnet a seinen Anker anzieht. Jedes der Quecksilbernäpfe steht schliesslich mit einem der Elektromagnete k_1 bis k_6 (Fig. 10) in Verbindung und der von l kommende Strom findet also seinen Weg durch a (Fig. 11) zu e, die Welle w und einen der Bügel s zu je einem oder dem anderen Signalapparate. Sobald also nach Auslösung des Apparates die Bügel aus den Näpfchen herausgehoben sind, besteht keine Stromverbindung mehr zwischen den Enddrähten der Signalapparate, wie bei m (Fig. 2).

Fassen wir nun den Gang des ganzen Apparates nochmal kurz zusammen, so geht bei einem stattgehabten Contacte von b oder g (Fig. 10) an eine der Contactfedern der Batteriestrom zunächst von q zu m, löst das Triebwerk der Trommel aus, dieselbe beginnt zu rotiren, läuft von da zu l, arretirt die Uhr, und schliesst die Zweigleitung $l\,p\,q$ des Alarmwerkes, kommt dann durch n (= a Fig. 11) zu dem betreffenden Signalapparat, dessen Scheibchen herunterfällt, von da durch die getroffene Contactfeder nach b, c, zurück zur Batterie. Im selben Momente sind durch das Spiel des Apparates (Fig. 11) die einzelnen Signalapparate voneinander isolirt.

Dagegen bestehen noch die drei Zweigleitungen der drei Registrirvorrichtungen o, einer, welche die Schwingung des Pendels b in der Richtung Nord—Süd, einer zweiten für Ost—West und einer dritten, welche die Verticalbewegung nach ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge und ihrer Intensität als Curven der berussten rotirenden Trommel aufzeichnen. Die Trommel wird vorher mit Glanzpapier bezogen, dieses über einer Campherflamme berusst, und so kann nach dem Aufzeichnen der Curven dasselbe abgenommen und die Zeichnung mittels Durchziehen durch Colophoniumspiritus fixirt werden. Bei der Construction des Apparates muss Rücksicht darauf genommen werden, dass die Elektromagnete der Hauptleitung weniger Widerstand haben als die Rollen der Zweigleitung, da im anderen Falle der Strom sogleich in der Nebenleitung sich ausgleichen und die Signalscheiben etc. nicht auslösen würde.

Die Hauptvortheile des Apparates gegenüber anderen besteht in seiner ungemein grossen Empfindlichkeit, sowie darin, dass der Haupt-

apparat, das Contactgewicht *b* sammt den Contactfedern (Fig. 2) abseits des Beobachtungslocales in einem, sonstigen Erschütterungen nicht zugänglichen Raume angebracht, und mit den übrigen, im eigentlichen Observatorium befindlichen Apparaten lediglich durch Leitungsdrähte verbunden werden kann.

Anmerkung. Der Apparat, wie er in Fig. 2 dargestellt ist, ohne Registrirapparat, war bei der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Wiesbaden ausgestellt. Der Registrirapparat ging erst während der letzten Wochen seiner Vollendung entgegen. Beide Apparate zusammen sowohl als auch der Richtungsapparat allein können in beliebiger Ausstattung von der Firma Schäfer & Montanus in Frankfurt a. M. bezogen werden, welche Firma dieselben direct nach den Angaben des Verfassers zusammenstellt.

Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation.

Von

Prof. **Adalbert Rysánek.**

Einleitung.

Als ich diese Abhandlung schrieb, war mir von den verschiedenen dynamischen Erklärungen der Gravitation nur Le Sage's Hypothese vom Aetherhagel und vom gegenseitigen Schutze, den jede Masse der gegenüberliegenden vor diesem Hagelschauer bietet, bekannt. Die Analogie mit der kinetischen Gastheorie führte mich weiter zu der Annahme, dass der Schweräther mit Geschwindigkeiten, die alle möglichen Richtungen haben können und nach dem Maxwell'schen Gesetze vertheilt sind, herumfliege: da ferner die Gesammtmasse gegen den Aetherhagel Schutz bietet, so schloss ich weiter auf eine solche Feinheit des Schweräthers, dass er die Massen der Himmelskörper zu durchdringen im Stande sei. Um endlich auf das Gravitationsgesetz zu kommen, nahm ich meine Zuflucht zu der nicht unwahrscheinlichen Annahme, dass der Schweräther auf dem Wege durch die Himmelskörper einen Theil seiner Energie und zwar proportional der im Körper zurückgelegten Strecke und der daselbst vorhandenen Massendichte verliere. Letztere Annahme des Energieverlustes gibt das Gravitationsgesetz vollkommen wieder und kann als eine andere Ausdrucksweise desselben betrachtet werden. Die absorbirte Energie geht theils auf die Atome der groben Materie theils auf die des Lichtäthers über, wobei Schweräther und Lichtäther als voneinander verschiedene Stoffe aufzufassen sind. Zu dieser Unterscheidung wurde ich durch die Unabhängigkeit der Schwere von dem Bewegungszustande der groben Materie veranlasst. Diese Unabhängigkeit drängt zu einer so enormen mittleren Geschwindigkeit des Schweräthers, dass seine Identität mit dem Lichtäther vorderhand ausgeschlossen bleiben muss. Aus der Energieabsorption lässt sich weiter die innere Wärme der Himmelskörper erklären. Das sind die Ideen, welche der nachfolgenden Abhandlung zu Grunde liegen.

Nach Beendigung dieser Abhandlung begann ich auf Anregung von mehreren Seiten die einschlägigen Arbeiten Anderer zu studiren. In

Isenkrahe's „Räthsel der Schwerkraft" werden die Schweratome, um den Geschwindigkeitsverlust derselben beim Durchdringen der Körper zu erklären, als unelastisch vorausgesetzt und diese Eigenschaft als eine aus der Starrheit der Atome nothwendig sich ergebende Folge hingestellt. Diese Auffassung widerspricht jedoch dem Principe von der Erhaltung der Energie, an welchem überall, wo es sich um Uebertragung der Bewegung handelt, festgehalten werden muss. Wenn Wärmestrahlen von einem Körper absorbirt werden oder wenn zwei Bleikugeln zusammenstossen, so erfolgen die Stösse zwischen den Körper- und Aetheratomen so, dass dabei an Energie nichts verloren geht. Wir können diese Eigenschaft der Atome mit dem Namen Elasticität bezeichnen, jedoch würden wir die Grenzen der Physik überschreiten, wollten wir auch auf die inneren Vorgänge in den Atomen bei dieser Bewegungsübertragung eingehen. Zur Annahme unelastischer Atome lässt sich Isenkrahe durch die Betrachtung verleiten, dass unter der Voraussetzung vollkommener Elasticität die Gegenwart eines Körperatomes auf den Bewegungszustand des ringsumherfliegenden Schweräthers keinen Einfluss ausübt. Denken wir uns ein Körperatom an der Grenze eines Moleküls zwar ringsum vom Schweräther aber auf einer Seite in der nächsten Nähe auch von Körper- und Lichtatomen umgeben, so werden die Stösse, die es auf der einen Seite vom Schweräther empfängt, auf der andern Seite nicht immer wieder auf den Schweräther übergehen, sondern auch zum Theil an die Licht- und Körperatome, und diese übertragene Energie kann als Wärme entweichen.

Tolver Preston spricht in seiner „Dynamischen Erklärung der Gravitation" (Sitzungsb. d. k. Akademie d. Wissensch., Wien. 87. Bd. 4. Heft) von einer fast (?) vollkommenen Durchdringlichkeit der groben Materie und vom Geschwindigkeitsverluste des Schweräthers bei diesem Durchgange unter Aufrechthaltung des Principes von der Erhaltung der Energie, aber das wichtigste, nämlich das Gesetz dieses Geschwindigkeitsverlustes ist übergangen und überhaupt ist seine Erklärung der Gravitation in ein geheimnisvolles Dunkel gehüllt.

Jarolimek weist in seiner Abhandlung „Ueber die Gravitation" (Sitzungsb. d. k. Akademie d. Wissensch., Wien. 88. Bd., 3.—4. Heft) auf die verschiedenen Weglängen der Schweratome untereinander hin. Zur Erklärung des Gravitationsgesetzes kommt es bei ihm auf die Stösse zwischen den Schweratomen selbst an. Die Schweratome, welche von dem einen Körper mit einem Geschwindigkeitsverluste geflogen kommen, können einen anderen nur dann erreichen, wenn sie unterwegs nicht durch andere Schweratome daran gehindert werden. Diese Erklärung unterscheidet sich wesentlich von der meinigen, bei welcher es auf den

Energieverlust der Schweratome im Körper, also auf die Weglängen beim Zusammenstosse der Schweratome mit den Körperatomen, nicht aber der Schweratome untereinander ankommt, während der Energieverlust durch den zwischen beiden sich anziehenden Körpern befindlichen Schweräther, als dagegen verschwindend klein wegfällt.

In dem Aufsatze von Odstrčil: „Ueber den Mechanismus der Gravitation" (Sitzungsb. d. k. Akademie d. Wissensch., Wien. 89. Bd., 3. Heft) wird vorausgesetzt, dass der Aether als elastisches Medium einen Druck auf die darin befindlichen Körperatome ausübe und diese dem Drucke ein wenig nachgeben. Aus der daraus sich ergebenden Verschiebung des Aethers wird der Verlust an potentieller Energie dieses Mediums berechnet und daraus die Fernwirkung zweier Massen abgeleitet. Die Schwerkraft tritt hier wieder als qualitas occulta in der Elasticität auf. Dieser Druck kann nach Analogie des Gasdruckes doch nur eine Folge der progressiven Bewegung des Schweräthers sein. Letzterer ist als ruhendes Medium nicht wahrscheinlich. Uebrigens stimme ich mit Odstrčil darin überein, dass auch aus meinen Formeln die Proportionalität der Atommasse mit dem Atomquerschnitt hervorgeht.

§ 1. Schweräther.

Eine gegenseitige Einwirkung zweier Himmelskörper durch den leeren Raum ohne Vermittlung eines andern Mediums ist nicht denkbar. Wollen wir also die Anziehungen der Himmelskörper unseres Sonnensystems erklären, so müssen wir ein solches den Weltraum oder wenigstens unser Sonnensystem erfüllendes Medium voraussetzen. Dieses Medium soll nun nicht bloss die Rolle eines Uebermittlers der gegenseitigen Einwirkung spielen, sondern vielmehr selbst der Urheber der Gravitation sein. Damit nun dieses Medium den Himmelskörpern Bewegung mittheilen könne, soll angenommen werden, dass es selbst in Bewegung sei und dass diese Mittheilung durch Stösse geschehe. Ich setze weiter voraus, dass die Atome dieses Mediums progressiv sich bewegen und zwar so, dass bei hinreichend grosser Anzahl derselben alle Richtungen vertreten sind und dass die Geschwindigkeiten unter sie nach dem Maxwell'schen Gesetze vertheilt sind, d. h. unter einer hinreichend grossen Anzahl N von Atomen besitzen eine zwischen v und $v + dv$ liegende Geschwindigkeit $N(v)$ Atome, welche gegeben sind durch die Gleichung:

$$N(v) = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2G^2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3v^2}{2G^2}} v^2 dv. \qquad (1$$

Hier bedeutet $\frac{\nu G^2}{2}$ die mittlere Energie dieses Mediums, unter ν

die Masse eines Atomes verstanden. Dieses Medium werde ich mit dem Namen Schweräther bezeichnen und von diesem voraussetzen, dass er wegen seiner ausserordentlichen Feinheit die Himmelskörper zu durchdringen im Stande sei. Auf diesem Wege stösst jedoch ein Theil des Schweräthers mit der groben Materie zusammen, wobei es zu einem Verluste der kinetischen Energie desselben kommt, welcher eine Erwärmung des durchdrungenen Körpers zur Folge hat. Wenn es sich nun um die Berechnung des Energieverlustes handelt, so kann man die Betrachtung so anstellen, als ob man es mit dem Stosse unvollkommen elastischer Atome zu thun hätte. Damit soll aber durchaus nicht die vollkommene Elasticität des Schweräthers aufgegeben werden, denn durch diese Stösse geht von der Gesammtenergie nichts verloren. Im Nachfolgenden will ich nun zeigen, wie sich aus diesen Prämissen das Newton'sche Gravitationsgesetz ableiten lässt.

§ 2. Schweräthermasse, welche gegen ein Atom stösst.

Denken wir uns (Fig. 1) ein Körperatom O in diesem Schweräther und beschreiben wir um O mit dem Radius R eine Kugel und hierauf von O aus einen Strahlenkegel mit dem Raumwinkel $d\omega$, so schneidet dieser Kegel aus der Kugelfläche das Flächenelement $df = R^2 d\omega$ heraus (in Fig. 1 GH). Befindet sich nun irgendwo auf df ein Schweratom A, so wird O von A erreicht, wenn A in einer Richtung fliegt, welche eine um O mit dem Radius ϱ der Wirkungssphäre zwischen Körper- und Aetheratom beschriebene Kugel trifft.

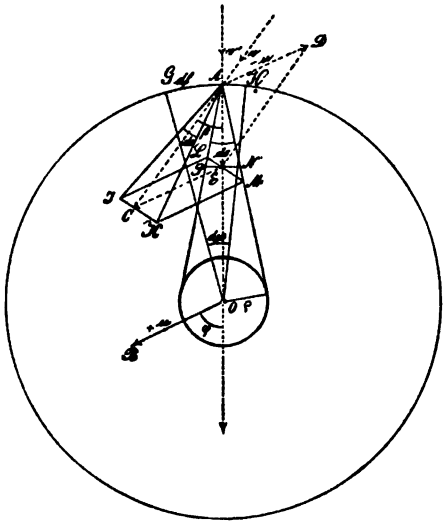


Fig. 1.

Diese Richtungen geben einen Strahlenkegel mit der Spitze in A, mit dem Raumwinkel $d\sigma$ und, wenn ϱ gegen OA sehr klein [1]) ist, der Basis $\varrho^2\pi$, so dass $R^2 d\sigma = \varrho^2\pi$ ist. In der Raumeinheit befinden sich nun $N(v)$ Schweratome, welche eine zwischen v und $v + dv$ liegende Geschwindigkeit haben, wo $N(v)$ aus der Gl. 1 zu nehmen ist, unter N die Gesammtzahl der Schweratome in der Raumeinheit verstanden.

1) Das Gravitationsgesetz gilt nicht für beliebig kleine Entfernungen.

Es befinden sich also in der Raumeinheit $N(v)\frac{d\sigma}{4\pi}$ Schweratome, welche eine dem Strahlenkegel $d\sigma$ entsprechende Richtung haben. Durch df gehen während des unendlich kleinen Zeitteilchens dt gegen $\varrho^2\pi$ alle Schweratome von der Geschwindigkeit v, welche in einem geraden über df als Basis mit der Höhe $v\,dt$ errichteten Cylinder liegen und eine $d\sigma$ entsprechende Richtung haben. Die Anzahl dieser Schweratome ist: $v\,dt \cdot df \cdot N(v)\frac{d\sigma}{4\pi}$, oder wenn man $df = R^2 d\omega$ und $d\sigma = \frac{\varrho^2\pi}{R^2}$ setzt: $M(v) \cdot v \cdot \varrho^2\pi \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \cdot dt$. Multiplicirt man diese Anzahl mit der Masse ν eines Schweratomes, dividirt durch dt und integrirt bezüglich v von Null bis Unendlich, so erhält man für die in einer Secunde mit O zusammenstossende Schweräthermasse μ den Werth:

$$\mu = N \cdot V \cdot \varrho^2\pi \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \qquad (2$$

Hier bedeutet V die mittlere Geschwindigkeit des Schweräthers.

Es soll nun weiter der Fall untersucht werden, wo O eine Geschwindigkeit u (OB in Fig. 1) hat, welche mit dem verlängerten Strahle AO einen Winkel φ einschliesst. An der Anzahl der Stösse wird nichts geändert, wenn wir dem Körperatome O und dem Schweräther eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit ertheilen, welche der Geschwindigkeit u gleich und entgegengesetzt ist. Dann ist O mit dem Strahl OA in Ruhe und zur Geschwindigkeit v jedes Schweratomes kommt noch diese gemeinschaftliche Geschwindigkeit hinzu. Es fragt sich nun, welche Richtung muss die Geschwindigkeit v des Schweratomes A haben, damit v und diese gemeinschaftliche Geschwindigkeit u eine resultirende Geschwindigkeit v' geben, deren Richtung innerhalb des Raumwinkels $d\sigma$ liegt, in welchem O von A getroffen wird. $AC = v$ sei eine solche Richtung, welche mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $AD = u$ zusammengesetzt, eine Geschwindigkeit $AE = v'$ gibt, die in $d\varrho$ hineinfällt. Setzt man $\sphericalangle CAE = \beta$, so gelten die beiden Gleichungen:

$$u : v = \sin\beta : \sin\varphi \qquad (3$$

$$\text{und } v' = v\cos\beta - u\cos\varphi \qquad (4$$

Der Winkel β kann für $u \gtrless v$ nur im 1. Quadranten liegen und erreicht für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den grössten Werth, der gegeben ist durch: $\sin\beta = \frac{u}{v}$. Dagegen kann φ alle Werthe von o bis π annehmen. Wie man nun zu AC den Strahl AE gefunden hat, so suche man zu allen Strahlen des geraden Kegels, dessen Spitze in A, dessen Raumwinkel do und dessen Basis JK bei C gleich $v^2 do$ sein soll, die entsprechenden Strahlen,

und man bekommt so einen zweiten schiefen Kegel mit der Spitze in A, dem Raumwinkel $d\sigma$ und einer Basis LM bei E, welche mit der Basis $v'do$ des ersten Kegels parallel und ihr gleich ist. Denn wie man durch C die Strecke CE parallel und gleich AD gezogen hat, so zieht man durch jeden Punkt der Basis JK des 1. Kegels parallele und gleiche Strecken zu AD, wodurch diese Basis nur parallel zu sich selbst verschoben wird. In diesem 2. Kegel ist der Normalschnitt PN bei E gegeben durch: $v'^2 d\sigma = v^2 \cos\beta\, do$, woraus folgt: $do = \frac{v'^2}{v^2 \cos\beta} \cdot d\sigma$. Die Zahl der Schweratome, welche in der Raumeinheit eine do entsprechende Richtung und eine zwischen v und $v + dv$ liegende Geschwindigkeit haben, ist: $N(v)\frac{do}{4\pi}$. Errichtet man über df einen geraden Cylinder mit der Höhe $v'dt$, so ist die Anzahl a aller Schweratome mit den Geschwindigkeiten v bis $v + dv$, welche während dt durch df hindurchgehend die Richtung do haben, gegeben durch: $a = N(v)\frac{do}{4\pi} \cdot v'\, df\, dt$. Substituirt man aus $R^2 d\sigma = \varrho^2\pi$ und $R^2 d\omega = df$ die Werthe von $d\sigma$ und df in a, so erhält man durch Multiplication mit ν und Division durch dt für die in der Secunde in der Richtung $d\omega$ an O anstossende Schwerätherma sse μ, deren Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ liegen, den Werth:

$$\mu = \nu \cdot N(v) \cdot \varrho^2\pi \cdot \frac{v'^2}{v^2 \cos\beta} \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \qquad (5$$

Ist u gegen v sehr klein, so gibt diese Gl. 5:

$$\mu = \nu \cdot N(v) \cdot v\varrho^2\pi \left[1 - 3\cos\varphi \cdot \frac{u}{v} + (4\cos^2\varphi - 1)\left(\frac{u}{v}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{5}{2}\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right)\left(\frac{u}{v}\right)^3 - \ldots\right]\frac{d\omega}{4\pi}. \qquad (6$$

Integrirt man die Gl. 6 nach v von 0 bis ∞, so findet man für die Schwerätherma sse μ, welche in der Richtung $d\omega$ in einer Secunde an O stösst:

$$\mu' = \nu \cdot N \cdot V \cdot \varrho^2\pi \left[1 - 3\cos\varphi \cdot \frac{u}{V} + \frac{9\pi}{16}(4\cos^2\varphi - 1)\left(\frac{u}{V}\right)^2 - \ldots\right]\frac{d\omega}{4\pi} (7$$

Setzt man in Gl. 7 $d\omega = 2\pi \sin\varphi d\varphi$ und integrirt nach φ von o bis π, so erhält man die Schwerätherma sse μ'', welche in einer Secunde von allen Seiten und mit allen Geschwindigkeiten an O stösst. Beschränkt man sich auf die zweite Potenz von $\frac{u}{V}$, so findet man:

$$\mu'' = \nu \cdot N \cdot V \cdot \varrho^2 \pi \cdot \left[1 + \frac{3\pi}{16}\left(\frac{u}{V}\right)^2\right]. \quad (8$$

Anmerkung. Wenn $u = v$ ist, so folgt aus den Gleichungen 3, 4 und 5, erstens, wenn φ im 1. Quadranten liegt: $\beta = \varphi$, $v' = 0$ und $\mu = 0$, zweitens, wenn φ im 2. Quadranten liegt: $\beta = 180^0 - \varphi$, $v' = -2v \cos\varphi$ und

$$\mu = \nu \cdot N(v) \cdot v \cdot \varrho^2 \pi \cdot \cos^2\varphi \cdot \frac{d\omega}{4\pi}. \quad (9$$

Nimmt man an, dass alle Schweratome dieselbe Geschwindigkeit v haben, so ist $N(v) = N$. Setzt man in Gl. 9 $d\omega = 2\pi \sin\varphi d\varphi$ und integrirt nach φ von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so erhält man für die von allen Seiten anstossende Masse μ den Werth:

$$\mu = \frac{4}{3}\nu \cdot N \cdot v \cdot \varrho^2 \pi. \quad (10$$

Dividirt man die Gl. 10 durch ν, so bekommt man für die Anzahl a der von allen Seiten kommenden Stösse: $a = \frac{4}{3} N \cdot v \cdot \varrho^2 \pi$ und daraus lässt sich die mittlere Weglänge $\lambda = \frac{v}{a} = \frac{3}{4N \cdot \varrho^2 \pi}$ ableiten, welche Clausius auf anderem Wege für Gasmolekule gefunden hat.

§ 3. Stoss des Schweräthers gegen ein Körperatom.

In der Richtung DE (Fig. 2) stossen Schweratome, jedes mit der Masse ν und Geschwindigkeit v, nacheinander an das ruhende Körperatom O mit der Masse ν_1 central an, d. h. so, dass jedes Schweratom gegen das Centrum O des in O senkrecht auf DE errichteten Kreises $\varrho_1^2 \pi$ (GH in Fig. 2) fliegt, wo ϱ_1 der Radius der Wirkungssphäre zwischen Schweratom und Körperatom O ist. Wir wollen weiter der Allgemeinheit wegen annehmen, dass die normale Geschwindigkeit v eines Schweratomes beim Abprallen von einer festen Wand sich in $q \cdot v$ verwandelt. Für vollkommen elastische Schweratome ist $q = 1$, für unelastische ist $q = o$, für unvollkommen elastische kann q eine Function von v sein und liegt zwischen 0 und 1. Für die aus dem Stosse des Schweräthers gegen O hervorgehende Kraft k hat man: $k = (1 + q) \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot \mu_1 v$, wo μ_1 die in einer Secunde anstossende Schwerätherмasse bedeutet. Wenn aber die parallel zu DE kommenden Schweratome gegen einen anderen Punkt der Kreisfläche GH sich bewegen, so sind die Stösse excentrisch. Beschreiben wir um O als Cen-

trum eine Kugel mit dem Radius ϱ_1 und von O aus einen Strahlenkegel mit dem Raumwinkel $d\sigma$, so schneidet dieser auf der Kugelfläche bei A das Element $\varrho_1^2 d\sigma$ heraus. Kommen nun Schweratome (jedes als Kugel mit dem Radius AK gedacht) mit der Masse μ_1 während einer Secunde in der Richtung DE an $\varrho_1^2 d\sigma$ mit ihren Mittelpunkten an, so stossen sie mit dem Körperatom O, das wir uns ebenfalls als Kugel mit dem Radius OK vorstellen, in K excentrisch zusammen. Es ist $AK + KO = \varrho_1$. In der Richtung OB erfolgt dieser Stoss mit der Geschwindigkeit $v \cos \alpha$, wenn $\sphericalangle DOA = \alpha$ ist. Die Kraft in der Richtung OB ist:

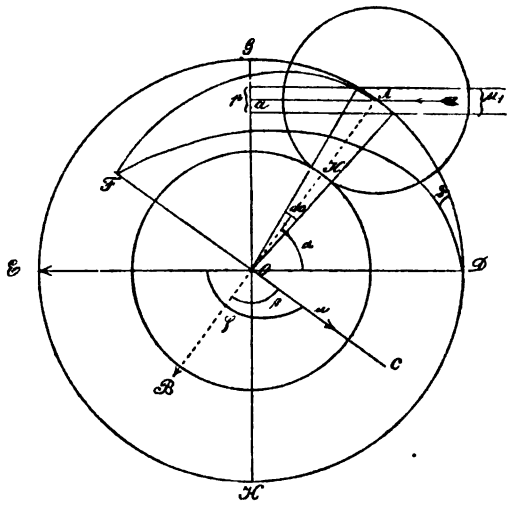


Fig. 2.

$$(1 + q) \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot \mu_1 v \cos \alpha.$$

Kommt in der Richtung DF die Schweräthermasse μ in der Secunde gegen die ganze Kreisfläche GH und ist p die Projection von $\varrho_1^2 d\sigma$ auf GH, so hat man: $p = \varrho_1^2 d\sigma \cdot \cos \alpha$, $\mu_1 : \mu = p : \sigma_1^2 \pi$ und

$$\mu_1 = \mu \cdot \cos \alpha \cdot \frac{d\sigma}{\pi}.$$

Die Stosskraft k' längs OB ist:

$$k' = (1 + q) \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot \mu v \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{d\sigma}{\pi}. \qquad (11$$

Die Componente von k' längs OE ist:

$$(1 + q) \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot \mu v \cdot \cos^3 \alpha \frac{d\sigma}{\pi}.$$

Die resultirende Kraft k, welche von den Stössen der in der Richtung DE gegen die Halbkugel GDH mit der Geschwindigkeit v kommenden Schweratome herrührt, findet man, wenn man in dieser Componente

$d\sigma = 2\pi \sin\alpha d\alpha$ setzt, und nach α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ integrirt. Man erhält:

$$k = \frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} \cdot \mu v.$$

Führt man für μ den Werth aus Gl. 2 ein, wo jedoch ϱ_1 statt ϱ zu setzen ist, so hat man:

$$k = \frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} \cdot \nu \cdot N(v) \cdot v^2 \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot \frac{d\omega}{4\pi}.$$

Integrirt man hier nach v von 0 bis ∞, so hat man für die Kraft K aller Schweratome, die in der Richtung DE gegen O anstossen:

$$K = (1+q) \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} \cdot \frac{\nu \cdot N G^2}{2} \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot \frac{d\omega}{4\pi}. \qquad (12$$

Statt G könnte man auch die mittlere Geschwindigkeit V einführen durch die Gleichung:

$$G^2 = \frac{8}{3\pi} \cdot V^2.$$

Der Factor q ist bei dieser Integration als unabhängig von v angenommen.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, wo O selbst auch eine Geschwindigkeit u in der Richtung OC besitzt. In der Richtung OB erfolgt nun der Stoss entsprechend der Geschwindigkeit $v\cos\alpha - u\cos\beta$, wenn $\sphericalangle BOC = \beta$ gesetzt wird. Statt des Ausdruckes 11 bekommt man jetzt als Kraft k' längs OB:

$$k' = (1+q) \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} \cdot \mu \cos\alpha\,(v\cos\alpha - u\cos\beta)\frac{d\sigma}{\pi}. \qquad (12a$$

Die Componente c dieser Kraft k' längs OC ist: $c = k'\cos\beta$. Bezeichnet man $\sphericalangle EOC$ mit φ, verlängert CO, BO und EO bis zum Durchschnitt mit der Kugelfläche in F, A und D, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke FAD: $\cos\beta = \cos\varphi.\cos\alpha + \sin\varphi.\sin\alpha\cos\vartheta$, wenn $\vartheta = \sphericalangle F(OD)A$ ist. Integrirt man c über die halbe Kugelfläche GDH, welche den in der Richtung DE aufliegenden Schweratomen zugewendet ist, so bekommt man als Resultirende k:

$$k = \frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} \cdot \mu\left[v\cos\varphi - \frac{u}{2}(1+\cos^2\varphi)\right].$$

Setzt man hier für μ den bereits berechneten Werth aus Gl. 6, integrirt nach v von 0 bis ∞ und beschränkt man sich auf die 2. Potenz von $\frac{u}{V}$, so findet man:

$$K = \frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} \cdot \nu N V^2 \cdot \varrho_1^2 \pi \left[\frac{16}{3\pi} \cos\varphi - (1+7\cos^2\varphi)\frac{u}{V} + \right. \\ \left. + (\cos\varphi + 11\cos^2\varphi)\left(\frac{u}{V}\right)^2 \right] \frac{d\omega}{8\pi}. \quad (13$$

Der Factor q ist hier von v unabhängig angenommen.

Anmerkung: Um die längs OC wirkende Resultirende der von allen Seiten gegen O kommenden Stösse zu finden, setze man in Gl. 13 $d\omega = 2\pi \sin\varphi . d\varphi$ und integrire nach φ von 0 bis π. Man erhält so als Widerstand w des Schweräthers gegen das mit der Geschwindigkeit u fliegende Körperatom O, wenn man sich auf die 1. Potenz von $\frac{u}{V}$ beschränkt:

$$w = -\frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} \cdot \nu N \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot \frac{5}{3} u \cdot V. \quad (14$$

§ 4. Schweräthermasse, welche beim Durchgang durch einen Körper zum Anstosse kommt.

Wir setzen voraus, dass der Schweräther in einer bestimmten Richtung durch ein aus ruhenden Körperatomen bestehendes homogenes System fliege. Dieses theilen wir senkrecht zu dieser Richtung durch Ebenen, welche voneinander um die mittlere Entfernung δ zweier Nachbaratome abstehen, in Schichten. Die Anzahl der gegen die 1. Ebene ankommenden Schweratome sei a. Von diesen kommen beim Durchgang durch die 1. Schichte s zum Anstosse. Von den $a - s$ in die 2. Schichte kommenden stossen

$$(a-s)\frac{s}{a}$$

an und

$$(a-s)\left(1-\frac{s}{a}\right)$$

gehen ohne Anstoss hindurch. Von den letzteren werden in der 3. Schichte

$$(a-s)\left(1-\frac{s}{a}\right)\frac{s}{a}$$

anprallen und

$$(a-s)\left(1-\frac{s}{a}\right)^2$$

weitergehen u. s. f. Es gehen also von a Schweratomen durch $(n+1)$ Schichten

$$(a-\varepsilon)\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)^n$$

ungehindert hindurch. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schweratom in einer Schichte anstösst, ist $\frac{\varepsilon}{a}$. Wenn f die Basis eines Schichtentheiles ist, worin n_2 Körperatome sind, und ϱ_2 der Radius der Wirkungssphäre zwischen Körper- und Aetheratom ist, so hat man:

$$\frac{\varepsilon}{a}=\frac{n_2\varrho_2^2\pi}{f}.$$

Wenn nun N_2 Körperatome sich in der Raumeinheit befinden, so ist

$$n_2 : N_2 = f\delta : 1 \text{ und } \frac{\varepsilon}{a} = N_2\varrho_2^2\pi\cdot\delta.$$

Bedeutet l den durch diese $(n+1)$ Schichten zurückgelegten Weg, so ist $l=(n+1)\,\delta$ oder $l=n\delta$, wenn δ gegen l sehr klein ist. Ist $\frac{\varepsilon}{a}$ ein sehr kleiner Bruch, so kann man statt $(a-\varepsilon)$ bloss a schreiben und man erhält als Anzahl A der auf dem Wege l ohne Anstoss hindurchgehenden Schweratome:

$$A=a\left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]^{-N_2\varrho_2^2\pi l}, \text{ wenn } \varepsilon=-N_2\varrho_2^2\pi\cdot\delta=-\frac{\varepsilon}{a} \text{ ist.}$$

Für ein sehr kleines ε kann man $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e$ setzen, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes ist. Die Anzahl der frei durchgehenden Schweratome ist also: $a\cdot e^{-N_2\varrho_2^2\cdot\pi l}$ und die der anstossenden: $a\left(1-e^{-N_2\cdot\varrho_2^2\pi l}\right)$. Hat nun jedes Schweratom die Masse ν und setzt man die ankommende Schweräthermasse $a\cdot\nu=\mu$, so ist die anstossende Masse μ' gegeben durch:

$$\mu'=\mu\left(1-e^{-N_2\cdot\varrho_2^2\pi\cdot l}\right). \qquad (15$$

Falls aber $N_2\cdot\varrho_2^2\pi\cdot l$ eine sehr kleine Zahl ist, so kann man auch setzen:

$$\mu'=\mu\cdot N_2\cdot\varrho_2^2\pi\cdot l \qquad (16$$

Die anstossende Schweräthermasse ist also der Dichte des durchdrungenen Körpers und dem in ihm zurückgelegten Wege proportionirt. Dieses Resultat führt dann in seinen weiteren Folgen zum Newton'schen Gravitationsgesetze.

Ist das Körperatomsystem nicht homogen, so zerlege man l in Elemente. Die auf dem Wegelemente dl anstossende Schweräthermasse μ'' ist dann:

$$\mu''=\mu\,.\,N_2\cdot\varrho_2^2\pi\cdot dl \qquad (17$$

Die ganze auf dem Wege l anstossende Masse bekommt man durch Integration von Gl. 17. Zu der Gl. 17 könnte man auch durch folgende einfache Betrachtung gelangen. Wenn das Schweratom in dem ruhenden Körper einen Weg zurückgelegt hat, der gleich kommt der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{1}{N_2 \cdot \varrho_2^{\,2} \pi},$$

so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mit einem Körperatom zusammenstösst, gleich 1 oder es wird auf dieser Strecke durch das System anstossen. Ist jedoch dieser Weg dl sehr klein gegen λ, so ist die Wahrscheinlichkeit des Anstossens:

$$\frac{dl}{\lambda} = N_2 \cdot \varrho_2^{\,2} \pi \cdot dl$$

und von a Schweratomen, jedes mit der Masse ν, werden also

$$a\,\nu \cdot N_2 \cdot \varrho_2^{\,2} \pi \cdot dl$$

anstossen wie in Gl. 17.

Die Gl. 16 gilt unter der Voraussetzung, dass $N_2 \cdot \varrho_2^2 \pi \cdot l = \frac{l}{\lambda}$ eine sehr kleine Zahl ist. Soll nun diese Gleichung für den Durchgang des Schweräthers durch die Himmelskörper unseres Sonnensystemes gelten, so muss λ die Länge des Sonnendurchmessers $l = 14 \times 10^{10}$ cm weit überragen. Führen wir den mittleren Abstand δ der Atome durch die Gleichung:

$$N_2 = \frac{1}{\delta^3}$$

ein, so erhalten wir:

$$N_2 \cdot \varrho_2^{\,2} \pi \cdot l = \pi \left(\frac{\varrho_2}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{l}{\delta} < 1,$$

mithin:

$$\varrho_2 < \delta \cdot \sqrt{\frac{\delta}{l\,\pi}}.$$

Setzen wir für δ den mittleren Abstand der Gasmoleküle, also etwa den für CO_2 gefundenen Werth: 22×10^{-8} cm, so ist dieser Abstand jedenfalls grösser als der mittlere Abstand der Atome. Wir finden $\frac{\varrho_2}{\delta} < 7 \times 10^{-10}$, daher $\varrho_2 < 1 \cdot 5 \times 10^{-16}$ cm als obere Grenze für den Radius der Wirkungssphäre zwischen Körper- und Schweratom.

Nehmen wir nun statt eines ruhenden ein mit der Geschwindigkeit u progressiv sich bewegendes Körpersystem an, so wird an der Anzahl

der anprallenden Schweratome nichts geändert, wenn wir dem Körper und dem Schweräther eine dieser Geschwindigkeit gleiche und entgegengesetzte ($-u$) ertheilen. Dann ist der Körper in Ruhe und die früher mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu den Schichten durchdringenden Schweratome haben jetzt die Geschwindigkeit: $v' = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos\varphi}$, wo φ der Winkel zwischen $+u$ und v ist. Statt des Weges l wird jetzt im Körper der Weg

$$l' = \frac{v'}{v} \cdot l$$

zurückgelegt. Die Gl. 16 verwandelt sich daher in:

$$\mu' = \mu \cdot N_1 \cdot \varrho_1^2 \pi \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{u}{v}\cos\varphi + \frac{u^2}{v^2}} \times l.$$

Ist u gegen v sehr klein, so kann man annäherungsweise setzen:

$$\mu' = \mu \cdot N_1 \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot l \cdot \left[1 - \cos\varphi \cdot \frac{u}{v} - (\cos^2\varphi - 1)\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^2 - \ldots\right]. \quad (18$$

Hat u wie etwa bei Gasen alle möglichen Richtungen, so multiplicire man den 2. Theil der Gl. 18 mit $2\pi \sin\varphi\, d\varphi$, integrire dann nach φ von o bis π und dividire endlich durch 4π, wodurch man als Mittelwerth erhält:

$$\mu' = \mu \cdot N_1 \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot l \left(1 + \frac{1}{3}\frac{u^2}{v^2} + \ldots\right). \quad (19$$

§ 5. Verlust an Bewegungsgrösse, welchen der Schweräther im Körper erleidet.

Die Kugel $ACBD$ (Fig. 3) soll uns ein unbewegliches Körperatom vorstellen. Parallel zur Richtung CE kommen a Schweratome in der Zeiteinheit mit Geschwindigkeiten, welche zwischen v und $v + dv$ liegen, gegen eine zu CE senkrechte Flächeneinheit an. Dann ist $a = N'(v)v$, wenn $N'(v)$ die in der Raumeinheit enthaltene Anzahl von Schweratomen, welche eine zwischen v und $v + dv$ liegende und zu CE parellele Geschwindigkeit haben, bedeutet. Gegen unsere Kugel mit dem grössten Kreise $\varrho^2\pi$ kommen also $a \cdot \varrho^2\pi$ Schweratome an, deren Bewegungsgrösse $\nu \cdot N'(v) \cdot v^2 \cdot \varrho^2\pi$ ist. Integrirt man diesen Ausdruck nach v von 0 bis ∞, so erhält man für die Bewegungsgrösse b aller in dieser Richtung anstossenden Schweratome:

$$b = N' \cdot \varrho^2\pi \cdot \nu G^2, \quad (20$$

wo N' die in der Raumeinheit enthaltene Anzahl von Schweratomen, welche zu CE paralleler Geschwindigkeiten haben, bedeutet. Diese Bewegungsgrösse b geht für die Richtung CE verloren, dafür aber stossen

auf der entgegengesetzten Seite ADB andere Schweratome an und prallen parallel mit CE mit der Geschwindigkeit u (FM in Fig. 3) ab. Es ist die Bewegungsgrösse b' dieser in der Zeiteinheit abprallenden Schweratome zu berechnen. Soll u mit OE parallel sein, so muss die Richtung von v (HF in Fig. 3), in welcher das Schweratom gegen die Kugel kommt, in der Ebene EOF liegen. Gegen das Flächenelement df bei F stösst in der Zeiteinheit mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ die Schweräthermasse: $\nu \cdot N'(v)\, v \cdot \cos\varphi \cdot df$, wo φ der Einfallswinkel KFH ist. Gegen die Zone: $2\varrho^2\pi \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$, wo $\vartheta = \sphericalangle FOE$ ist, kommt also die Masse: $\nu \cdot N'(v)\, v \cdot \cos\varphi \cdot 2\varrho^2\pi \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta$ an und verlässt die Kugel mit der Geschwindigkeit u in der Richtung FM parallel zu CE. Ein Theil der kinetischen Energie des anstossenden Schwer-Aethers geht als Wärme verloren. Wie beim Stosse unvollkommen elastischer Körper verwandelt sich die normale Geschwindigkeit $KF = v\cos\varphi$ der Schweratome in die entgegengesetzte $FL = q \cdot v \cdot \cos\varphi$, wo $q < 1$ ist, während die tangentiale Geschwindigkeit $BF = v \sin\varphi$ ungeändert bleibt. Dies führt zu den Gleichungen:

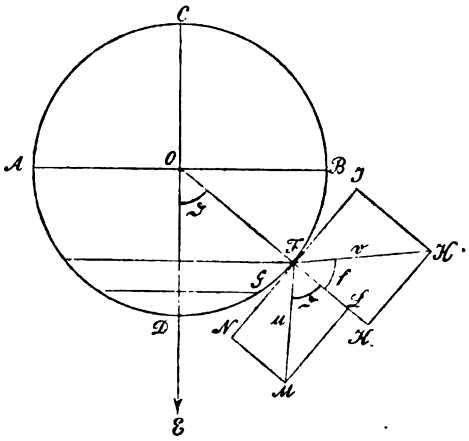


Fig. 3.

$$v \sin\varphi = u \sin\vartheta,\quad q \cdot v \cdot \cos\varphi = u\cos\vartheta,\quad \text{tang}\,\varphi = q \cdot \text{tang}\,\vartheta.$$

Die Bewegungsgrösse b' der von ADB parallel zu CE wegfliegenden Schweratome bekommt man also, wenn man in $\nu\, N'(v)\, v \cdot \cos\varphi \cdot 2\varrho^2\pi \sin\vartheta \cdot u \cdot d\vartheta$ die Grössen u und φ durch v und ϑ ausdrückt und dann nach ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und nach v von 0 bis ∞ integrirt, wobei q von v unabhängig gedacht wird. Wenn man der Kürze wegen

$$c = \frac{2q}{1-q^2} \log\text{ nat}\,\frac{1}{q}$$

setzt, so findet man das Resultat:

$$b' = c \cdot N'\ \varrho^2\pi \cdot \nu\ G^2 \text{ oder } b' = cb. \qquad (21$$

Der Factor c hat für $q = 1$, also wenn die kinetische Energie wie bei vollkommen elastischen Körpern durch den Stoss nicht geändert

wird und die Masse des Körperatomes in Vergleich zu der des Schweratomes sehr gross ist, auch den Grenzwerth 1 und $b = b'$, d. h. es findet durch die Gegenwart eines solchen unbeweglichen Atomes in keiner Richtung eine Veränderung der Bewegungsgrösse des Schweräthers, von welcher seine Stosskraft abhängt, statt. Für $1 > q > 0$ liegt auch c zwischen 1 und 0, es geht also durch den Stoss ein Theil der Bewegungsgrösse des Schweräthers verloren. Hat man statt eines Atomes ein Atomsystem, so muss die Bewegungsgrösse b der auf dem Wege durch dieses System anstossenden Schweratome berechnet werden und dieses b verwandelt sich nach dem Durchdringen des Körpers in $c.b.$ Die ohne Anstoss hindurchgehenden Schweratome erleiden keinen Verlust an Bewegungsgrösse.

§ 6. Stoss des Schweräthers gegen ein Körperatom, das durch die Nähe eines Körpers geschützt ist.

Es sei O (Fig. 4) ein ruhendes Körperatom, in dessen Nähe sich das Atomsystem oder der Körper K befindet. Construiren wir von O aus einen Strahlenkegel mit dem Raumwinkel $d\omega$, der aus K das Stück $ABHG$ von der Länge AG herausschneidet und verlängern wir diese Strahlen über O hinaus, so bekommen wir einen zweiten Strahlenkegel JOL ebenfalls mit dem Raumwinkel $d\omega$. Da O ruht, so kommt im Strahlenkegel JOL in einer Zeiteinheit mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ gegen O die Schweräthermasse

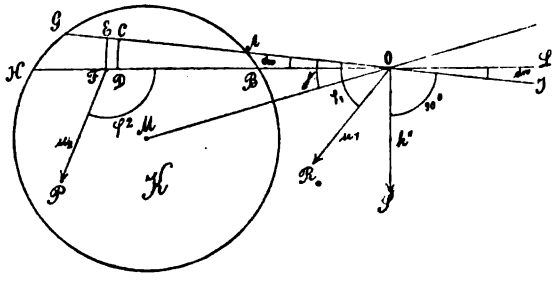


Fig. 4.

$$\mu = \nu \cdot N(v)\, v \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot \frac{d\omega}{4\pi}$$

heran. Daraus resultirt eine Kraft k_1 in der Richtung OA:

$$k_1 = \frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot \mu v.$$

In dem Strahlenkegel GOH verliert auf der Strecke GA der anstossende Schweräther an Bewegungsgrösse. Wir theilen GA in Elemente und legen vom Mittelpunkte O aus durch die Theilungspunkte Kugelflächen, wodurch das Stück $ABHG$ in Körperelemente zerfällt. Der Theilungspunkt C habe von O die Entfernung $CO = l$ und der

nächste E die Entfernung $EO = l + dl$. Im Elemente EC kommt nach Gl. 17 von der Masse μ die Masse $\mu \cdot N_2 \cdot \varrho_2^2 \pi \cdot dl$ zum Anstosse. Auf der ganzen Strecke GA stösst also die Masse

$$m = \mu \cdot \frac{\varrho_2^2 \pi}{\nu_2} \int_{l_1}^{l_2} d_2 \cdot dl$$

an, wo

$$l_1 = AO,\ l_2 = GO,\ \nu_2$$

die Masse eines Körperatomes in K und d_2 die Massendichte von K, mithin

$$N_2 \cdot \nu_2 = d_2$$

ist. Die ungehindert hindurchgehende Schweräthermasse $(\mu - m)$ stösst an O mit der Kraft:

$$\frac{1-q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot (\mu - m)\, v.$$

Von der zurückgehaltenen Masse m, deren Bewegungsgrösse mv sich beim Durchdringen des Körpers in $c \cdot mv$ verwandelt, kommt die Stosskraft:

$$\frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot c \cdot mv.$$

Daraus folgt eine Kraft k_2 in der Richtung OJ:

$$k_2 = \frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} (\mu - (1-c)\, m)\, v.$$

Es bleibt also in der Richtung von O nach A eine Kraft k, welche das Atom O gegen K treibt:

$$k = k_1 - k_2 = \frac{1+q}{2}(1-c) \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot mv.$$

Wenn man für m und μ die obigen Werthe einsetzt und nach v von 0 bis ∞ integrirt und der Kürze wegen

$$h = \frac{1+q}{2} \cdot (1-c) \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

setzt, so hat man:

$$k = h \cdot N \cdot \frac{\nu G^2}{2} \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot \frac{\varrho_2^2 \pi}{\nu_2} \cdot d\omega \cdot \int_{l_1}^{l_2} d_2 \cdot dl. \qquad (22$$

Berechnen wir nun die Anziehung der in $ABHG$ liegenden Masse auf O nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze. Das Körper-

element $CDFE$ hat das Volumen $l^2 \cdot d\omega \cdot dl$ und die Masse $l^2 \cdot d\omega \cdot d_2 \cdot dl$. Die Masse ν_1 des Atomes O wird von diesem Element, wenn wir mit γ die Gravitationsconstante bezeichnen, mit der Kraft

$$k' = \gamma \cdot \frac{l^2 \cdot d\omega \cdot d_2 \cdot dl \cdot \nu_1}{l^2}$$

oder

$$k' = \gamma \cdot \nu_1 \cdot d\omega \cdot d_2 \cdot dl \tag{23}$$

angezogen. Die Anziehung des Atomes O von Seiten der in $ABHG$ befindlichen Masse ist also:

$$k = \gamma \cdot \nu_1 \cdot d\omega \int_{h_1}^{h_2} d_2 \cdot dl. \tag{24}$$

Vergleichen wir die Gl. 24 mit Gl. 22, so folgt:

$$\gamma = h \cdot N \cdot \frac{\nu G^2}{2} \cdot \frac{\varrho_1^2 \pi}{\nu_1} \cdot \frac{\varrho_2^2 \pi}{\nu_2}. \tag{25}$$

Aus Gl. 25 ergibt sich, dass

$$\frac{\varrho_1^2 \pi}{\nu_1} \text{ und } \frac{\varrho_2^2 \pi}{\nu_2}$$

constante Grössen sind. Die Atommassen sind den Atomquerschnitten proportionirt. Statt

$$N \cdot \frac{\nu G^2}{2}$$

kann man auch einführen die mittlere kinetische Energie E des Schweräthers in der Raumeinheit. Die Gl. 25 kann also auch geschrieben werden:

$$\gamma = h \cdot E \cdot \frac{\varrho_1^2 \pi}{\nu_1} \cdot \frac{\varrho_2^2 \pi}{\nu_2}. \tag{26}$$

Setzt man in Gl. 26

$$\frac{\varrho_1^2 \pi}{\nu_1} = \frac{\varrho_2^2 \pi}{\nu_2} = p,$$

so hat man:

$$\gamma = h \cdot p^2 \cdot E. \tag{27}$$

Die Gravitationsconstante ist der mittleren Energie E des Schweräthers proportionirt. Die Gl. 22 können wir auch erhalten, wenn wir annehmen, dass das Körperelement $CDFE$ zur ganzen Kraft k nur den Theil k' beisteuert, so dass

$$k' = h \cdot N \cdot \frac{\nu \cdot G^2}{2} \cdot \varrho_1^2 \pi \cdot \frac{\varrho_2^2 \pi}{\nu_2} \cdot d\omega \cdot d_2 \cdot dl. \tag{28}$$

Durch Vergleichung von Gl. 28 mit Gl. 23 bekommen wir für γ ebenfalls den in Gl. 25 gegebenen Werth. Ist der Körper k homogen, so ist nach Gl. 24: $k = \gamma_1 \nu_1 d_2 (l_2 - l_1) d\omega$. Nun ist $l_2 - l_1$ die vom Schweräther im Körper K zurückgelegte Strecke $AG = w$. Setzen wir $\gamma \nu_1 d_2 = \varkappa$, so erhalten wir:

$$k = \varkappa \cdot w \cdot d\omega. \tag{29}$$

Die Anziehung des Atomes O ändert sich, wenn O selbst eine Geschwindigkeit u_1 besitzt, welche mit OG (Fig. 4) den Winkel φ_1 einschliesst. Zuerst setzen wir voraus, dass der Körper K nicht vorhanden wäre. Die Gl. 14 gibt uns dann den Widerstand w des Aethers, also eine Kraft, die der Geschwindigkeit u_1 entgegengesetzt ist. Das Vorhandensein von K hat zur Folge, dass im Kegel GOH die Schweräthermasse

$$\mu' = \mu \cdot \varrho_2^2 \pi \cdot \frac{1}{\nu_2} \int_{l_1}^{l_2} d_2 \cdot dl,$$

welche Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ hat, anstösst, wo μ durch Gl. 6 gegeben ist. Dabei geht die Bewegungsgrösse $(1 - c)\mu' \cdot v$ verloren. Das hat aber dieselbe Wirkung, wie wenn im Gegenkegel JOL der Schweräther mit dieser Bewegungsgrösse anstossen würde. Die daraus resultirende Kraft zerlegen wir in drei Componenten, k' in der Richtung OG, k'' senkrecht zu OG (OS in Fig. 4) in der durch OG und u_1 gelegten Ebene und auf derselben Seite, wo u_1 liegt, und endlich k''' senkrecht zu k' und k''. Um nun k', k'' und k''' zu bekommen, müssen wir die Gl. 12a resp. mit $\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\vartheta$ und $\sin\alpha\sin\vartheta$ multipliciren (dort wurde er mit $\cos\beta$ multiplicirt), für $d\sigma$ einsetzen $\sin\alpha \cdot d\alpha \cdot d\vartheta$ und nach ϑ von 0 bis 2π, nach α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ integriren, nachdem man wie dort $\cos\beta = \cos\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\varphi \cdot \sin\alpha\cos\vartheta$ gesetzt hat, und endlich statt μ, u und φ resp. $(1 - c)\mu'$, u_1 und φ_1 substituiren. Die durchgeführte Rechnung gibt folgendes Resultat:

$$\left.\begin{aligned} k' &= \frac{1+q}{2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot (1 - c)\mu' (v - u_1 \cos\varphi_1), \\ k'' &= -\frac{1+q}{4} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu} \cdot (1 - c)\mu' u_1 \sin\varphi_1, \quad k''' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Drückt man μ' durch μ aus, setzt nach Gl. 6:

$$\mu = \nu \cdot N(v)\, v \cdot \varrho_1^2 \pi \left[1 - \cos\varphi_1 \cdot \frac{u_1}{v}\right] \frac{d\omega}{4\pi},$$

wo ϱ, u und φ resp. durch ϱ_1, u_1 und φ_1 ersetzt sind, und integrirt nach v von 0 bis ∞, so findet man für die entsprechenden Kräfte K',

K' und K'', welche von allen verschiedenen Geschwindigkeiten der Schweratome herrühren:

$$K' = \left(1 - \frac{3\pi}{2} \cdot \cos\varphi_1 \cdot \frac{u_1}{V}\right) k \qquad (31$$

$$K'' = -\frac{3\pi}{16} \cdot \sin\varphi_1 \cdot \frac{u_1}{V} \cdot k. \qquad (32$$

In den Gleichungen 31 und 32 ist k aus der Gleichung 22 zu substituiren. Der Werth für K''' ist Null. Die Anziehung des Atomes O durch den Körper K hängt also vom Bewegungszustand des O ab, sie ist aber auch vom Bewegungszustande des Körpers K abhängig. Hat K eine progressive Bewegung mit der Geschwindigkeit u_2 und schliesst diese mit der Richtung HO den Winkel φ_2 (PFO in Fig. 4) ein, so hat man statt dl zu setzen:

$$dl\sqrt{1 - 2 \cdot \frac{u_2}{v} \cos\varphi_2 + \frac{u_2^2}{v^2}} \text{ oder } dl\left(1 - \frac{u_2}{v}\cos\varphi_2\right),$$

wenn u_2 gegen v sehr klein ist. Zu k in Gl. 22 kommt dann noch der Factor

$$\left(1 - \frac{3\pi}{8} \cdot \cos\varphi_2 \cdot \frac{u_2}{V}\right)$$

hinzu.

Soll die Gravitation von dem Bewegungszustande der sich anziehenden Körper unabhängig sein, so muss die mittlere Geschwindigkeit V des Schweräthers in Vergleich mit den Geschwindigkeiten der Körper sehr gross sein.

§ 7. Anwendungen.

Aus Gl. 29 ergibt sich für die Anziehung durch einen homogenen Körper K, dass, wenn das Atom O sich in einem hohlen Körper befindet und auf beiden Seiten einer jeden durch O gezogenen Geraden gleiche Längen durch K hindurchgehen, die Anziehung auf O gleich Null ist. Denn die Kräfte $\varkappa w \cdot d\omega$ sind in dem durch O gelegten Strahlenkegel $d\omega$ und seinem Gegenkegel gleich und entgegengesetzt. Ein Beispiel dieser Art ist ein beliebiger Punkt O in dem Hohlraume einer Kugelschale oder einer ellipsoidischen Schale, die von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzt ist.

Wenn das Atom O im Inneren eines vollen, homogenen Körpers liegt, so kann man die Anziehung auch so berechnen, dass man durch O Gerade zieht, welche bis zur Begrenzung reichen. Auf jeder geraden hat man zwei Abschnitte auf entgegengesetzten Seiten von O. Schneidet man den kleineren Abschnitt vom grösseren von der Begrenzung aus ab,

so bekommt man einen hohlen Körper und einen durch O gehenden vollen. Der Hohlkörper übt auf O keine Anziehung aus und es bleibt bloss die Anziehung des inneren Körpers auf einem Punkt O seiner Oberfläche. Ist z. B. O innerhalb einer Kugel, so ist dieser innere Körper von einer durch O gehenden concentrischen Kugelfläche begrenzt, beim Ellipsoid ist er ein ähnliches kleineres Ellipsoid.

Wenn das Atom O im Aehnlichkeitspunkte zweier ähnlicher oder symmetrisch ähnlicher homogenen Körper von derselben Dichte liegt, so sind die Anziehungen beider Körper auf O den 1. Potenzen entsprechender Strecken proportionirt. Denn demselben Raumwinkel $d\omega$ entspricht beim 1. Körper $\varkappa w d\omega$ und beim 2. die Kraft $\varkappa w' d\omega$, also Kräfte, die sich wie $w : w'$ verhalten.

Berechnen wir nun, wie stark ein Atom O (Fig. 4) durch eine homogene Kugel vom Radius R angezogen wird, wenn O vom Mittelpunkt M der Kugel die Entfernung $OM = e$ hat. Der Strahlenkegel $d\omega\,(GOH)$ schliesse mit OM den Winkel γ ein. Die Anziehungen in diesem Raumwinkel $d\omega$ ist: $\varkappa w d\omega$, die Componente dieser Kraft längs OM ist:

$$\varkappa w \cos\gamma\, dw \text{ und } w = 2R\sqrt{1 - \frac{e^2}{R^2}\sin^2\gamma}.$$

Die Anziehung A der ganzen Kugel in der Richtung OM ist:

$$A = 4R\pi \cdot \varkappa \cdot \int_0^{\beta} \sqrt{1 - \frac{e^2}{R^2}\sin^2\gamma} \cdot \cos\gamma \sin\gamma \cdot d\gamma,$$

wo β der Winkel zwischen OM und der von O an die Kugel gezogenen Tangente ist.

Man findet:

$$A = \varkappa \cdot \frac{4R^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{e^2}.$$

Setzt man für $\varkappa$ den Werth $\gamma \nu_1 d_2$ und für die Masse der Kugel M_2, so hat man:

$$A = \gamma \cdot \frac{M_2 \cdot \nu_1}{e^2}.$$

Wenn das Atom O eine Geschwindigkeit u_1 gegen den Mittelpunkt M der Kugel hat, so bekommt man nach Gl. 31 die in der Richtung des Strahlenkegels $d\omega$ wirkende Kraft gleich

$$\varkappa w\left(1 - \frac{3\pi}{2}\cos\gamma \cdot \frac{u_1}{V}\right) d\omega,$$

die Componente dieser Kraft längs OM bekommt man durch Multiplication mit $\cos\gamma$ und die Resultirende dieser Componente ist:

$$K' = \varkappa \cdot 4R\pi \cdot \int_0^{\beta} \left(1 - \frac{3\pi}{2}\cos\gamma\,\frac{u_1}{V}\right)\cos\gamma\sin\gamma\sqrt{1 - \frac{e^2}{R^2}\sin^2\gamma}\cdot d\gamma.$$

Ferner ist gemäss Gl. 32 die zum Strahlenkegel $d\omega$ senkrechte Kraft:

$$-\frac{3\pi}{16}\cdot\varkappa w\cdot\sin\gamma\cdot\frac{u_1}{V}\cdot d\omega.$$

Durch Multiplication mit $\sin\gamma$ erhält man die Componenten längs OM. Die Resultirende aller dieser Componenten ist:

$$K'' = -\frac{3\pi}{16}\varkappa\cdot 4R\pi\cdot\frac{u_1}{V}\int_0^{\beta}\sin^3\gamma\sqrt{1 - \frac{e^2}{R^2}\sin^2\gamma}\cdot d\gamma.$$

Durch Summation von K' und K'' bekommt man die gesammte Kraft K, welche O gegen M zieht:

$$K = \varkappa\cdot\frac{4R^3\pi}{3}\cdot\frac{1}{e^2} - \frac{3\pi}{32}\varkappa R\pi\times$$

$$\times\frac{u_1}{V}\left(11 + \frac{7R^2}{e} - \frac{7R^4 - 18R^2e^2 + 11e^4}{R\cdot e^3}\log\text{nat}\sqrt{\frac{e+R}{e-R}}\right).$$

Für $e = R$ hat man:

$$K = \varkappa\cdot\frac{4R\pi}{3}\left(1 - \frac{81\pi}{64}\cdot\frac{u_1}{V}\right).$$

Diese Kraft K wird noch vermindert durch den in Gl. 14 gegebenen Widerstand. Man sieht, dass auf der Erdoberfläche die Schwere durch die Fallgeschwindigkeit u_1 vermindert wird und zwar um den $\frac{81\pi}{64}\cdot\frac{u_1}{V}$ten Theil und nebstdem auch noch um den Widerstand des Schweräthers.

Wenn das ruhende Atom O im Inneren der Kugel in der Entfernung e vom Centrum M liegt, so construire man einen Strahlenkegel $d\omega$, welcher mit OM den spitzen Winkel γ einschliesst und die Länge w_1 hat, und durch Verlängerung über O einen zweiten von der Länge w_2. Aus beiden folgt eine von O nach M wirkende Componente: $\varkappa(w_1 - w_2)\times$ $\times\cos\gamma\cdot d\omega$. Da nun $w_1 - w_2 = 2e\cos\gamma$ ist, so ist die gesammte Anziehung

$$A = \varkappa\cdot 4e\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\gamma\sin\gamma\,d\gamma = \varkappa\cdot\frac{4e^3\pi}{3}\cdot\frac{1}{e^2}.$$

§ 8. Grenzen der Energie und mittleren Geschwindigkeit des Schweräthers.

Eine Kugel mit der Masse M_2 wirkt auf ein Atom mit der Masse ν_1 in der Entfernung e anziehend mit der Kraft: $\gamma \cdot \frac{M_2 \nu_1}{e^2}$. Wirkt jedoch M_2 auf eine 2. Kugel mit der Masse M_1, so hat man alle diese auf die einzelnen Atome von M_1 wirkenden Kräfte zu einer Resultirenden k längs der Centrale zusammenzusetzen, wodurch man bekanntlich

$$k = \gamma \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{e^2}$$

erhält (e die Entfernung der Mittelpunkte). Substituirt man für γ den Werth aus Gl. 26, so hat man:

$$k = h \cdot E \cdot (\varrho_1^2 \pi) \cdot (\varrho_2^2 \pi) \cdot \frac{M_1}{\nu_1} \cdot \frac{M_2}{\nu_2} \cdot \frac{1}{e^2}. \qquad (33$$

Nun ist

$$\frac{M_1}{\nu_1} = N_1 \text{ und } \frac{M_2}{\nu_2} = N_2,$$

unter N_1 und N_2 die Anzahl der Atome in den Kugeln verstanden. Nehmen wir nun zwei gleich grosse Kugeln von derselben materiellen Beschaffenheit in der Entfernung $e = 1$ an, so ist $N_2 = N_1$, $\varrho_2 = \varrho_1$ und $e = 1$. Hat jede Kugel das Volumen V und bedeutet N die Anzahl der Atome in Cubikmeter, so ist $N \cdot V = N_1$. Für diesen Fall bekommt man also:

$$k = h \cdot E \cdot (N \cdot \varrho_1^2 \pi)^2 \cdot V^2.$$

Nun haben wir in § 4 gefunden: $N \varrho_1^2 \pi < \frac{1}{l}$, wo $l = 14 \cdot 10^8$ m die Länge des Sonnendurchmessers ist. Daraus folgt: $k < h \cdot E \cdot 5 \times \times 10^{-19} V^2$. Wollen wir nun eine untere Grenze für E bekommen, so berechnen wir k für zwei Kugeln von Iridium-Platin mit dem specifischen Gewichte 22,8. Die Masse einer Kugel ist: $V \times 22{,}8 \times 1000 \times \frac{1}{g}$. Die Kraft, womit zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 m sich anziehen, ist: $6{,}47 \times 10^{-10}$ kg. Wir erhalten mithin:

$$k = 6{,}47 \times 10^{-10} \times 22{,}8^2 \times 1000^2 \times \frac{V^2}{9{,}8^2} = 35 \times 10^{-4} \times V^2.$$

Wenn wir berücksichtigen, dass h höchstens den Werth $\frac{1}{2\pi}$ haben kann, so folgt nun:

$$35 \times 10^{-4} < \frac{E}{2\pi} \times 5 \times 10^{-19},$$

mithin:

$$E > 4{,}4 \times 10^{16} \text{ Kilogrammmeter.}$$

In einem Cubikmeter Schweräther ist also eine so ungeheure Energie aufgespeichert, dass sie 44 Tausend Billionen Kilogrammmeter weit übersteigt.

Aus dieser grossen Energie des Schweräthers ergibt sich schon eine grosse mittlere Geschwindigkeit V. Eine untere Grenze für V können wir bekommen, wenn wir den Widerstand w des Schweräthers gegen ein bewegtes Atomsystem vergleichen mit der Anziehung a, welche dieses System von einem anderen erfährt. Der Widerstand gegen ein einziges Atom, welches die Geschwindigkeit u_1 hat, ist in Gl. 14 gegeben. Hat man statt eines Atomes ein System mit N_1 Atomen, so erhält man durch Multiplication mit N_1:

$$w = -\frac{5}{3}\cdot\frac{1+q}{2}\cdot\frac{\nu_1}{\nu_1+\nu}\cdot\nu N V^2\cdot N_1\varrho_1^2\pi\cdot\frac{u_1}{V}. \qquad (34$$

Nehmen wir nun an, dieses System N_1 sei der Neptun, welcher von einem anderen Systeme N_2, der Sonne, angezogen wird, so ist für den ruhenden Neptun gemäss Gl. 33:

$$a = h\cdot E\cdot N_1\varrho_1^2\pi\cdot N_2\varrho_2^2\pi\cdot\frac{1}{e^2}.$$

Da aber Neptun die Geschwindigkeit u_1 hat, so sind noch die aus dieser Bewegung gemäss Gleichung 31 und 32 folgenden Kräfte hinzuzufügen. Die aus Gl. 31 sich ergebende Correctur können wir weglassen, denn φ_1 ist nahe gleich 90°, und es bleiben bloss 2. Potenzen von $\frac{u_1}{V}$ übrig.

Dagegen vermehren die aus Gl. 32 folgenden Kräfte den Widerstand w und geben eine in der Richtung u_1 wirkende Kraft:

$$k = -\frac{3\pi}{16}\cdot h\cdot E\cdot N_1\varrho_1^2\pi\cdot N_2\varrho_2^2\pi\cdot\frac{1}{e^2}\cdot\frac{u_1}{V},$$

wo e der mittlere Abstand des Neptun von der Sonne ist. Addiert man k und w, so hat man die ganze Kraft, welche auf die Geschwindigkeit u_1 des Neptun verzögernd einwirkt. Setzt man vorderhand den absoluten Werth von

$$k + w < a,$$

ferner

$$\frac{1+q}{2} = 1,\ \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} = 1,\ h = \frac{1}{2\pi}\ \text{und}\ N_2 = N\cdot\frac{4R^3\pi}{3},$$

unter N die Atomanzahl in einem Cubikmeter der Sonne verstanden, und

$$N\varrho_2^2\pi < \frac{1}{2R},$$

wo R der Sonnenradius ist, so hat man:

$$\frac{3\pi}{8}\cdot\left(\frac{u_1}{2}+10\cdot\left(\frac{e}{R}\right)^2 u_1\right)<V.$$

Substituirt man $R=7{,}1\times10^8$ m, $e=4{,}59\times10^{12}$ m und $u_1=5550$ m, so ist:

$$\frac{3\pi}{8}\,(11100+2{,}3\times10^{12})<V.$$

Man bemerkt, dass k gegen w vernachlässigt werden kann. Es ist mithin $V>2{,}7\times10^{12}$ m und übersteigt weit die Geschwindigkeit des Lichtes von 3×10^8 m.

Um sich nun der Geschwindigkeit V noch mehr zu nähern, berechne man zunächst die Beschleunigung b des Neptun durch die Kraft a nach der Formel:

$$b=\frac{4e\pi^2}{T^2},$$

wo die Umlaufszeit $T=60126$ Tage ist. Man findet: $b=0{,}0000067$ m. Die Anziehungskraft a wäre also im Stande, wenn sie eine Secunde constant auf die Geschwindigkeit des Neptun verzögernd einwirken würde, dieselbe um 0,0000067 m zu vermindern. In 1000 Jahren würde diese Verminderung betragen:

$$\frac{67}{10^7}\times1000\times365\times24\times60^2\text{ m},$$

oder ungefähr 2×10^5 m. Da nun bisher keine Verzögerung in den Umlaufszeiten der Planeten wahrgenommen wurde, so nehmen wir an, dass der Widerstand $k+w$ eine so geringe Kraft sei, dass er erst in 1000 Jahren die Geschwindigkeit des Neptun um 1 m vermindern würde. Dann müsste aber

$$k+w=\frac{a}{2\times10^5}$$

sein, woraus

$$V<2{,}7\times10^{12}\times2\times10^5\text{ m}$$

folgen würde. Wir erhalten mithin

$$V<5{,}4\times10^{17}\text{ m}.$$

§ 9. Zusammenfassung.

Aus allem Vorangehenden folgt also, dass die Gravitation sich durch die Annahme eines Stoffes erklären lässt, dessen Theilchen mit einer mittleren, $5{,}4\times10^{17}$ m weit übersteigenden Geschwindigkeit nach allen möglichen Richtungen und mit Geschwindigkeiten, die nach dem

Maxwell'schen Gesetze vertheilt sind, sich bewegen und so fein sind, dass sie die Himmelskörper zu durchdringen im Stande sind. Die enorme Feinheit dieses Stoffes geht daraus hervor, dass der Radius der Wirkungssphäre zwischen einem Theilchen desselben und einem Körperatome weit unter $1{,}5 \times 10^{-18}$ m liegt. Auf diesem Wege durch die Körper wird ein Theil der Bewegungsgrösse dieses Stoffes zurückgehalten und zwar wächst dieser Theil proportionirt mit der Länge der im Körper zurückgelegten Strecke und mit der daselbst herrschenden Dichte, womit das Newton'sche Gravitationsgesetz in einer anderen Form ausgesprochen ist. Wegen der enormen Geschwindigkeit der Theilchen dieses Stoffes ist der Einfluss des Bewegungszustandes der Körper auf ihre gegenseitige Anziehung ein verschwindend kleiner. Aus demselben Grunde ist trotz der unendlichen Feinheit dieses Stoffes die in einem Cubikmeter desselben aufgespeicherte Energie so gross, dass sie $4{,}4 \times 10^{16}$ Kilogrammmeter bei weitem übersteigt.

Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite [1]).

Von

Dr. **O. Tumlirz.**

Die ebenen Luftwellen endlicher Schwingungsweite unterscheiden sich von denjenigen unendlich kleiner Schwingungsweite wesentlich in zwei Punkten. Während bei den letzteren — wir wollen von der Reibung vollständig absehen — sowohl die Form der Dichtigkeitscurve als auch die Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich immer gleich bleiben, erfährt bei den ersteren die Curve der Dichtigkeiten infolge der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Wellentheile eine beständige Aenderung ihrer Form (Stokes, Mach) und nimmt die anfangs sehr grosse Geschwindigkeit, mit welcher die Welle in den verschiedenen Punkten, die sie passirt, eintrifft, im Verlaufe der Bewegung rasch ab, um schliesslich in die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit überzugehen (Mach). Die Formänderung der Dichtigkeitscurve hat ausserdem noch eine höchst merkwürdige Eigenthümlichkeit dieser Wellen zur Folge. Da nämlich die grösseren Dichtigkeiten mit einer grösseren Geschwindigkeit fortschreiten, so werden sie mit der Zeit die kleineren, vorangehenden Dichtigkeiten einholen, und auf diese Weise einen Dichtigkeitssprung oder, wie Riemann es nennt, einen „Verdichtungsstoss" erzeugen.

Ob solche Verdichtungsstösse möglich sind und ob sie, wenn sie möglich sind, auch ungestört fortschreiten können, war schon mehrmals Gegenstand eingehender Betrachtung gewesen, ohne dass es gelungen wäre, die Sache endgiltig zu entscheiden. Stokes und Earnsharw sind der Ansicht, dass sich Verdichtungsstösse in der Natur nicht ungestört fortpflanzen können, während dies Riemann für thatsächlich möglich hält und es auch unternimmt, die Grösse ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu bestimmen. Bei dieser Bestimmung stellt sich Riemann allerdings nicht auf den Boden der Differentialgleichungen, aus deren Integral (Integral von Poisson) Stokes das Eintreten von

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 95 S. 367 (1887).

Verdichtungsstössen erschlossen hat, sondern er bedient sich dabei einer eigenen Betrachtung. Die Differentialgleichungen seien, meint er, unter der Voraussetzung abgeleitet, dass Moleculargeschwindigkeit und Dichtigkeit stetige Functionen des Ortes und ihre Derivirten endliche Grössen sind, und müssen daher beim Eintreten von Verdichtungsstössen für diese zu gelten aufhören.

Hierzu muss nun aber Folgendes bemerkt werden. Die Verdichtungsstösse sind eine Consequenz dessen, was die Differentialgleichungen aussagen. Hören diese zu gelten auf, dann verschwinden auch ihre Consequenzen. Aber die Gesetze, deren mathematischer Ausdruck die Differentialgleichungen sind, können in dem betrachteten Falle nie zu gelten aufhören, denn sie sagen ja nichts anderes aus, als dass das Product aus der Masse (einer zur Wellenebene parallelen Massenschicht) in ihre Beschleunigung der Resultirenden der wirkenden Druckkräfte gleich und die Masse selbst unveränderlich ist. Würde es gelingen, die Differentialgleichungen zu integriren und die dabei auftretenden Functionen aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen, dann wäre das Problem vollständig gelöst. Freilich ist das gegenwärtig nicht leicht möglich; es bleibt uns vorderhand nichts anderes übrig, als zu versuchen, ob nicht die Verbindung der in den Differentialgleichungen ausgesprochenen Gesetze mit anderen Principien, welche in dem betrachteten Fall unbedingten Anspruch auf Giltigkeit haben, die Sache leichter zum Ziele führt.

Ich habe vor mehreren Jahren in einer kleinen Arbeit über diesen Gegenstand [1]) das Princip der Energie herangezogen und gezeigt, dass, wenn in einer fortschreitenden Luftwelle endlicher Schwingungsweite Moleculargeschwindigkeit und Dichtigkeit in allen Theilen der Welle durch eine bestimmte Beziehung aneinander geknüpft sind, das Auftreten eines Verdichtungsstosses eine aus dem Princip der Energie fliessende Forderung ungiltig macht. Aus diesem Widerspruch habe ich geschlossen, dass an der Stelle des Verdichtungsstosses eine Aenderung eintreten muss, welche dessen Auflösung herbeiführt. Welche Beziehungen das sind, die eine Aenderung erfahren müssen, konnte ich damals nicht ermitteln.

In der vorliegenden Arbeit greife ich noch einmal auf diese Frage zurück. Ich gehe gleich von vorneherein vom Princip der Energie aus und leite zunächst aus diesem Princip und dem Princip der Erhaltung der Masse die beiden Differentialgleichungen, nämlich die Bewegungs-

1) Ueber die Fortschreitung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Naturw. Jahrbuch „Lotos". Neue Folge 1. Bd., Prag 1880. Wiedemann, Beiblätter der Physik, Bd. 4 S. 861.

gleichung und die Continuitätsgleichung ab. Wie man sieht, liefert also das Princip der Energie in dem betrachteten Falle keinen neuen Gedanken, denn die aus ihm hervorgehende Differentialgleichung ist bloss eine Verbindung der Bewegungsgleichung und der Continuitätsgleichung und geht mit Rücksicht auf die letztere in die erstere unmittelbar über. Aber das Princip der Energie kleidet die erwähnten Gesetze in eine neue Form, und darin liegt der Vortheil. Mittels der Differentialgleichungen entwickle ich noch einmal jene oben erwähnte Beziehung, welche beim Auftreten von Verdichtungsstössen zu gelten aufhört und wende dann das Princip der Energie unmittelbar auf jenen Wellentheil an, in dem der Verdichtungsstoss entsteht. Die letztere Operation ergibt nun, dass das Auftreten der Unstetigkeit eine Aenderung in der Beziehung zwischen der Moleculargeschwindigkeit und der Dichtigkeit zur Folge hat.

Wir erinnern uns da unwillkürlich an jenes bekannte Problem, welches Euler schon vor hundert Jahren gestellt hat, nämlich an die Frage, warum eine Welle (unendlich kleiner Schwingungsweite), welche das Erregungsgebiet bereits verlassen hat, nicht zu jeder Zeit, wenn wir sie von neuem als Erregungsgebiet betrachten, zwei nach entgegengesetzten Richtungen auseinandergehende Wellen erzeugen kann. Die Theorie hat diese Frage längst dahin beantwortet, dass nur eine Welle, und zwar die fortschreitende, hervorgehen kann, weil die Moleculargeschwindigkeit und die Dichtigkeit für die ganze Welle in einer bestimmten Beziehung zu einander stehen. Sollte diese Beziehung in irgend einem Augenblick zu gelten aufhören, dann werden auch zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen hervorgehen.

In dem Fall, den wir betrachten, besteht bis zum Eintreten der Unstetigkeit zwischen der Moleculargeschwindigkeit und der Dichtigkeit überall dieselbe Beziehung. Das Auftreten der Unstetigkeit, des Verdichtungsstosses, ändert an der Stelle, wo er auftritt, diese Beziehung und gibt daselbst der Welle, wie die Differentialgleichungen zeigen, jene charakteristische Eigenschaft, welche einem Erregungsgebiet zukommt, aus dem zwei Wellen nach entgegengesetzten Richtungen hervorgehen, mit anderen Worten, die Unstetigkeitsstelle wird zum Ausgangspunkt einer nach rückwärts laufenden Wellenbewegung, die so lange stattfindet, als die Unstetigkeit besteht. Durch diese rückwärts laufende Wellenbewegung wird zugleich der Verdichtungsstoss aufgelöst.

Was nun die zweite Eigenschaft der Luftwellen endlicher Schwingungsweite anbelangt, nämlich die Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Entfernung von der Schallquelle, so habe ich in der erwähnten Schrift darauf aufmerksam gemacht, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, die mit der Grösse der Moleculargeschwindig-

keit und der Grösse der Dichtigkeit steigt und sinkt, deshalb kleiner wird, weil die grösseren Dichtigkeiten sich zufolge ihrer grösseren Fortpflanzungsgeschwindigkeit von den kleineren nachfolgenden Dichtigkeiten immer mehr entfernen und dadurch die Wellenbewegung, deren Gesammtenergie stets dieselbe bleiben muss, auf immer grössere Massen übertragen und geschwächt wird. Dieser Grund ist, wie ich jetzt erkenne, nicht ganz ausreichend. Es ist richtig, dass die ausserordentlich grosse Geschwindigkeit, mit welcher sich die Wellen, die Prof. Mach untersucht hat, zu Anfang ihrer Bewegung fortgepflanzt haben, nur auf Rechnung der grössten Dichtigkeiten fallen kann; und dass diese den kleineren Dichtigkeiten vorauseilen, dabei den Anfang der Welle überschreiten und so die Welle verlängern, ist ohne weiteres klar. Aber die Verlängerung an sich braucht noch kein Grund zur Schwächung zu sein. Denn in einer Welle, in welcher Moleculargeschwindigkeit und Dichtigkeit durch eine bestimmte Beziehung aneinander geknüpft sind, wird der Abstand zwischen den grössten Dichtigkeiten und den nachfolgenden kleineren Dichtigkeiten auch immer grösser, ohne dass die Energie, solange kein Verdichtungsstoss eintritt, kleiner wird. Die Schwächung tritt erst dadurch auf, dass Verdichtungsstösse rückwärtslaufende Wellen erzeugen. Wir sehen also, dass die mit der Verlängerung der Welle zusammenhängende Schwächung und die dadurch hervorgerufene Verminderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle als Ganzes nur in der Weise zu Stande kommt, dass sich bei dieser Verlängerung fortwährend Verdichtungsstösse bilden, welche rückwärtslaufende Wellen erzeugen.

Dies ist der Hauptgrund. Verstärkt wird derselbe noch durch die bei grossen Moleculargeschwindigkeiten nicht unbedeutende innere Reibung und durch die Strahlung, welche nach Stefan der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional ist und nur bei unendlich kleinen Verdichtungen, also bei unendlich kleinen Aenderungen der absoluten Temperatur keine Rolle spielt.

1.

Da die Luftwellen solche Zustandsänderungen sind, dass von einer merklichen Wärmeleitung nicht die Rede sein kann, so können wir immer die Annahme machen, dass dieselben längs adiabatischer Curven vor sich gehen. Wir stellen uns vor, dass die ebenen Wellen in einer geraden, cylindrischen Röhre vom Querschnitt Eins, deren Axe die x-Axe ist, fortschreiten und betrachten zu einer Zeit t jenen Wellentheil, welcher zwischen den Abscissen x und $x + dx$ liegt. Aus der Annahme, dass zwischen diesem Wellentheil und den benachbarten Wellentheilen kein Wärmeaustausch stattfindet, wird der Zuwachs der

Energie U dieses Wellentheiles in der Zeit dt gleich der von aussen zugeführten Arbeit dS oder

$$dU = dS \qquad (1$$

sein.

Die Grösse U ist gleich der Summe aus der actuellen Energie (lebendige Kraft) und der potentiellen Energie. Den Ausdruck für die letztere hat man bekanntlich aus dem Princip der Energie auf Grund der sog. Gesetze der Gase [1]) abgeleitet, allerdings unter der Voraussetzung, dass der Zustand eines Gases, mithin auch die potentielle Energie desselben eine Function von bloss zwei Argumenten (Volumen und Spannung oder Volumen und Temperatur) ist, eine Voraussetzung, deren Richtigkeit wir, strenge genommen, nur für Gleichgewichtszustände oder von diesen unendlich wenig verschiedene Zustände behaupten können. Wir wollen nun aber im Folgenden die Annahme machen, dass bezüglich der materiellen Theilchen eines Gases nicht ähnliche Verhältnisse bestehen wie bezüglich der elektrischen Theilchen, deren Wechselwirkung wesentlich durch die relative Bewegung beeinflusst wird, mit anderen Worten, wir wollen annehmen, dass die potentielle Energie der Gase für den Fall einer starken relativen Bewegung der Theilchen ganz denselben Ausdruck besitzt wie für den Fall der relativen Ruhe.

Der Abscisse x mögen die Dichtigkeit ϱ, die Moleculargeschwindigkeit u, der Druck p und die absolute Temperatur T entsprechen. Alsdann ist

$$U = \frac{1}{2} u^2 \varrho\, dx + C_v T \varrho\, dx + \text{const}$$

und

$$dS = pu\, dt - \left(pu + \frac{\delta (pu)}{\delta x} dx \right) dt,$$

wo C_v die specifische Wärme für constantes Volumen bedeutet. Da die Masse $\varrho\, dx$ ungeändert bleibt, so nimmt die Gl. 1 die Gestalt

$$\varrho (u\, du + C_v dT) = - \frac{\delta (pu)}{\delta x} dt \qquad (2$$

an.

1) 1. Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz; 2. das Gay-Lussac'sche, bezw. Joule-Regnault'sche Ergebnis, dass ein Gas, wenn es sich ausdehnt, ohne Arbeit zu leisten, seine Temperatur nicht ändert, und 3. das Regnault'sche Gesetz, dass die specifische Wärme für constantes Volumen bei den Gasen constant ist. (Vergl. unter anderen C. Neumann, Mechan. Wärmetheorie, S. 25.)

Bei dem unter 2. erwähnten Versuche waren zwei Gefässe durch einen cylindrischen Kanal verbunden; das eine Gefäss enthielt Luft von sehr hohem Druck, das andere war luftleer. Stellte der Hahn die Verbindung her, dann stürzte die Luft aus dem ersten Gefäss in das zweite und erzeugte dadurch im Kanal ebene Luftwellen endlicher Schwingungsweite.

Wir haben angenommen, dass die Zustandsänderungen längs adiabatischer Curven erfolgen; es besteht somit zwischen dem Druck und der Dichtigkeit das Poisson'sche Gesetz oder

$$p = A\varrho^{\frac{C_p}{C_v}} = A\varrho^k,$$

wobei A eine Constante, C_p die specifische Wärme für constanten Druck und k das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen bezeichnen, und dem entsprechend für die absolute Temperatur die Beziehung

$$T = \frac{A}{C_p - C_v}\varrho^{\frac{C_p - C_v}{C_v}}.$$

Werden diese beiden Werthe in Gl. 2 substituirt, dann erhalten wir die Gleichung

$$\varrho u\frac{du}{dt} + A\varrho^{k-1}\left(\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\frac{\delta u}{\delta x}\right) = -kAu\varrho^{k-1}\frac{\delta\varrho}{\delta x}, \qquad (3$$

welche mit der Continuitätsgleichung als dem Ausdruck des Princips von der Erhaltung der Masse

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

verbunden, die Schlussgleichungen

$$\varrho\frac{du}{dt} = -kA\varrho^{k-1}\frac{\delta\varrho}{\delta x} \qquad (4$$

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\frac{\delta u}{\delta x} = 0 \qquad (5$$

liefert.

2.

Riemann transformirt die letzten Gleichungen in der Weise [1]), dass er zunächst beide Gleichungen durch ϱ dividirt und die Gl. 5, mit

$$\pm\sqrt{kA}\varrho^{\frac{k-1}{2}}$$

multiplicirt, zu Gl. 4 hinzuaddirt.

$$\left(\frac{\delta u}{\delta t} \pm \sqrt{kA}\varrho^{\frac{k-1}{2}}\frac{\delta\log\varrho}{\delta t}\right) + u\left(\frac{\delta u}{\delta x} \pm \sqrt{kA}\varrho^{\frac{k-1}{2}}\frac{\delta\log\varrho}{\delta x}\right)$$
$$\pm\sqrt{kA}\varrho^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\delta u}{\delta x} \pm \sqrt{kA}\varrho^{\frac{k-1}{2}}\frac{\delta\log\varrho}{\delta x}\right) = 0.$$

1) Riemann's Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen 4 und 5 dadurch, dass er die Beziehung zwischen dem Druck und der Dichtigkeit durch eine allgemeine Function $\varphi(\varrho)$ ausdrückt.

Setzt man hierin:

$$\frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} + u = 2r \tag{6}$$

und

$$\frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} - u = 2s, \tag{7}$$

so zerfällt die Gleichung, je nachdem man $\pm$ wählt, in

$$\frac{\delta r}{\delta t} = -\left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)\frac{\delta r}{\delta x} \tag{8}$$

und

$$\frac{\delta s}{\delta t} = -\left(u - \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)\frac{\delta s}{\delta x}, \tag{9}$$

woraus unmittelbar

$$dr = \frac{\delta r}{\delta x}\left\{dx - \left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)dt\right\} \tag{10}$$

und

$$ds = \frac{\delta s}{\delta x}\left\{dx - \left(u - \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)dt\right\} \tag{11}$$

hervorgeht.

Die Erläuterung dieser Gleichungen gibt Riemann[1]) folgendermassen: „r bleibt constant, wenn x sich mit t so ändert, dass

$$dx = \left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)dt$$

ist und es bleibt s constant, wenn x sich mit t so ändert, dass

$$dx = \left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)dt \text{ ist.}“$$

„Ein bestimmter Werth von r oder von

$$\frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} + u$$

rückt daher zu grösseren Werthen von x mit der Geschwindigkeit

$$\sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}} + u$$

fort, ein bestimmter Werth von s oder von

$$\frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} + u$$

1) Zur näheren Orientirung verweise ich auf die unmittelbar vorhergehende Bemerkung unter dem Strich.

zu kleineren Werthen von x mit der Geschwindigkeit

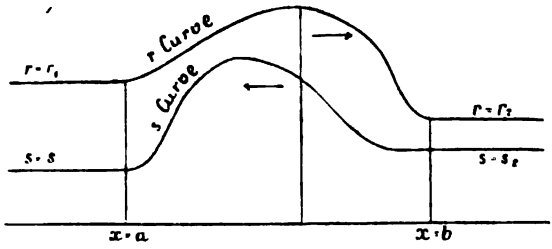
$$\sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}} - u.\text{“}$$

„Ein bestimmter Werth von r wird also nach und nach mit jedem vor ihm stattfindenden Werth von s zusammentreffen, und die Geschwindigkeit seines Fortrückens wird in jedem Augenblick von dem Werth von s abhängen, mit welchem er zusammentrifft.“

Wir wollen nun Folgendes annehmen. Zur Zeit $t = 0$ möge zwischen den Abscissen $x = a$ und $x = b$ eine Gleichgewichtsstörung eingetreten sein, wodurch die in diesem Gebiet liegenden Schichten eine starke Verdichtung oder Verdünnung und zugleich eine grosse Geschwindigkeit erhalten haben.

Ausserhalb des Gebietes sollen die Dichtigkeit und die Molecular-geschwindigkeit für die kleineren x die Werthe ϱ_1 u_1, für die grösseren x die Werthe ϱ_2 u_2 besitzen, und dem entsprechend sollen r und s mit r_1 s_1, bezw. r_2 s_2 bezeichnet werden. Alsdann können wir uns die Werthe r und s, welche in dem Erregungsgebiet Functionen von x und ausserhalb desselben constant sind, durch die beistehenden Curven dargestellt denken. Nach dem Obigen sind es die Ordinaten, welche in unveränderter Grösse nach rechts und links fortschreiten; die beiden Curven treten auseinander, ändern aber dabei zufolge des Umstandes, dass die Ordinaten nicht nur untereinander eine verschiedene, sondern auch mit der Zeit variable Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben, fortwährend ihre Gestalt.

In dem Moment, wo ein Werth r das Gebiet der constanten s betritt, bleiben für dieses r die Grössen ϱ und u und mithin auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit constant. Ganz dasselbe gilt für jenen Werth s, welcher in das Gebiet $r = \text{const}$ eintritt. Weil aber die Fort-



pflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Werthe r eine Function dieser Werthe ist, so wird nichtsdestoweniger auch in diesem Fall die Form der Dichtigkeitscurve eine beständige Aenderung erfahren. Zwischen den beiden fortschreitenden Wellen stellt sich ein Zustand her, in dem

überall $r = r_1$ und $s = s_2$ ist, in dem also Dichtigkeit und Strömungsgeschwindigkeit constant sind.

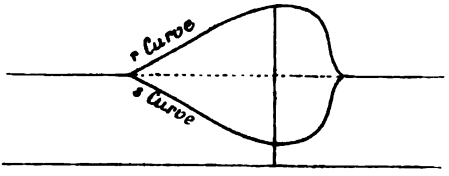
Sind für die nach rechts fortschreitenden Werthe r die damit zusammenfallenden Werthe s durchwegs constant, dann gibt die Gl. 7 eine bestimmte Beziehung zwischen der Dichtigkeit ϱ und der Moleculargeschwindigkeit u. Und ganz dasselbe gilt nach Gl. 6 für die nach links abgehenden Werthe s, wenn sie alle das Gebiet der constanten r betreten haben.

Wäre zur Zeit $t = 0$ die Moleculargeschwindigkeit überall gleich Null, also $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2$ und $r = s$, dann würden die beiden gezeichneten Curven congruent sein und zusammenfallen. Es würden dann die Werthe r und s im ersten Moment mit der gleichen Geschwindigkeit auseinandertreten, und würde die Dichtigkeit, welche einem bestimmten r zukommt, zufolge der Beziehung

$$\frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} = 2r - u$$

mit der Zeit in dem Maasse kleiner werden, als die Geschwindigkeit u wächst, und zwar so lange, bis das Gebiet der constanten s erreicht ist. Aehnliches gilt für die nach links abgehenden s.

Wäre zur Zeit $t = 0$ die Dichtigkeit überall gleich ϱ_0 und die Moleculargeschwindigkeit in dem Gebiete $a \leqq x \leqq b$ von endlicher Grösse, ausserhalb aber gleich Null, dann wäre $r_1 = s_1 = r_2 = s_2$. Die beiden Curven bilden jetzt in allen Punkten ausserhalb des Erregungs-



gebietes ein und dieselbe Gerade und sind in dem Erregungsgebiet zu dieser Geraden symmetrisch. Es könnte in diesem Fall vorkommen, dass, wenn zur Zeit $t = 0$ u grösser als

$$\sqrt{kA}\,\varrho_0^{\frac{k-1}{2}}$$

ist, zu Beginn der Bewegung die beiden Werthe r und s nicht nach entgegengesetzten Richtungen, sondern nach derselben Seite fortschreiten.

Die Transformation der Differentialgleichungen, welche Riemann vornimmt, führt auf eine sehr einfache Weise zum Resultat. Bei der Behandlung solcher theoretischen Fragen ist es im allgemeinen von

Wichtigkeit, dass man bei der Wahl von Transformationen auf die Ergebnisse verwandter Probleme oder aber auf die Resultate der Erfahrung auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt. Treten aus einem Erregungsgebiet der beschriebenen Art zwei Schallwellen unendlich kleiner Schwingungsweite heraus, dann schreiten dieselben mit constanter Geschwindigkeit fort und besteht für beide eine bestimmte Beziehung zwischen der Oscillations-Geschwindigkeit und der Dichtigkeit. Die Benutzung der ersten Eigenschaft bringt die Differentialgleichung

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2} = a^2 \frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2},$$

in der φ das Geschwindigkeitspotential und a eine Constante bedeuten, mittels der Transformation [1])

$$x - at = \xi, \qquad x + at = \eta$$

sofort auf die höchst einfache Form

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta\xi\delta\eta} = 0.$$

In dem vorliegenden Falle würde die Benutzung dieser Eigenschaft die Differentialgleichungen nicht vereinfachen, in Riemann's Transformation aber kommt die zweite Eigenschaft zur Geltung.

3.

Die verschiedenen Werthe r haben eine verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit und ebenso die verschiedenen Werthe s. Haben die beiden Wellen sich getrennt, dann wird, wie schon erwähnt, in beiden zwischen der Moleculargeschwindigkeit und der Dichtigkeit eine bestimmte Beziehung bestehen und deshalb einem bestimmten Werthe r auch ein bestimmter Werth von ϱ und ebenso ein bestimmter Werth von u zugehören. Wir können dies in der Weise ausdrücken, dass wir schreiben

$$\varrho = f(r) \text{ oder } r = g(\varrho).$$

Wird die letztere Gleichung mit der Gl. 8 verbunden, dann geht aus ihr die Beziehung

$$\frac{\delta\varrho}{\delta t} = -\left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)\frac{\delta\varrho}{\delta x} \qquad (12$$

und eine ähnliche Beziehung für die Geschwindigkeit u hervor. Und ferner können wir jetzt auch an Stelle des eingangs ausgesprochenen Satzes sagen, dass es die verschiedenen Dichtigkeiten (Moleculargе-

1) Kirchhoff, Mechanik 23. Vorl. § 2.

schwindigkeiten) sind, welche mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten.

Dieser letztere Umstand führt nun nothwendigerweise zu der Consequenz, dass einmal an einer Stelle die grösseren Dichtigkeiten die kleineren voranschreitenden vollständig einholen und dadurch in der Dichtigkeitscurve eine Unstetigkeit erzeugen. Selbstverständlich wird dies zuerst dort eintreten, wo die relative Geschwindigkeit gegen die benachbarten Wellentheile am grössten ist.

Um diesen Fall näher zu untersuchen, wollen wir die vereinfachende Annahme machen, dass zur Zeit $t = 0$ ausserhalb des Erregungsgebietes die Strömungsgeschwindigkeit überall den Werth Null und die Dichtigkeit überall den Werth ϱ_0 gehabt hat. Alsdann ist $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2$.

Der erste Anfang und das letzte Ende der Welle haben nahezu dieselbe Beschaffenheit wie das Medium ausserhalb des Erregungsgebietes zur Zeit $t = 0$, d. h. ihre Dichtigkeit ist nahezu gleich ϱ_0 und ihre Moleculargeschwindigkeit nahezu Null. Da beide mit der gewöhnlichen Schallgeschwindigkeit fortschreiten, so können wir ihre Abscissen zur Zeit t mit $m + at$ und $n + at$ bezeichnen, wo m und n zwei Constanten und a die Schallgeschwindigkeit bedeuten.

Wir gehen aus von der totalen Energie der fortschreitenden Welle, für welche sich mit Rücksicht auf den für U aufgestellten Ausdruck die Gleichung ergibt

$$\Sigma U = \int_{m+at}^{n+at} (\tfrac{1}{2}\varrho u^2 + C_v \varrho T + \text{const.})\, dx. \qquad (13$$

Diese Grösse darf keine Aenderung erfahren, denn wir haben ja von vorneherein jeden Wärmeverlust und jeden Wärmegewinn, ferner jede Reibung und die Wirkung äusserer Kräfte vollständig ausgeschlossen; oder in Zeichen

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = a\left(\frac{1}{2}\varrho u^2 + C_v \varrho T\right)_{m+at}^{n+at} + \int_{m+at}^{n+at} \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2}\varrho u^2 + C_v \varrho T\right) dx = 0. \qquad (14$$

Weil nun für $x = m + at$ und $x = n + at$ die Grösse ϱT den gleichen Werth hat und $u = 0$ ist, so verschwindet der erste Theil. Im zweiten Theil haben wir T und nach der Voraussetzung auch u als Function von ϱ zu betrachten und können daher, wenn wir den in der Klammer stehenden Ausdruck mit $F(\varrho)$ bezeichnen, schreiben

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = \int_{m+at}^{n+at} \frac{\delta F(\varrho)}{\delta \varrho} \frac{\delta \varrho}{\delta t}\, dx = 0.$$

oder mit Hilfe von Gl. 12

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = -\int_{m+at}^{n+at} \frac{\delta F(\varrho)}{\delta t}\left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)\frac{\delta \varrho}{\delta x}\,dx = 0.$$

Setzen wir noch

$$-\frac{\delta F(\varrho)}{\delta \varrho}\left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right) = \psi(\varrho)$$

und bedenken wir, dass die Grösse ϱ für ein bestimmtes t bloss eine Function von x, mithin $\frac{\delta \varrho}{\delta x} dx = d\varrho$ ist, so wird die letzte Gleichung zu

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = \int_{\varrho_0}^{\varrho_0} \psi(\varrho)\, d\varrho = 0$$

oder

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = \int_{\varrho_0}^{\varrho max} \psi(\varrho)\, d\varrho + \int_{\varrho max}^{\varrho_0} \psi(\varrho)\, d\varrho = 0. \qquad (15$$

Diese Gleichung enthält eine sehr wichtige Bedingung. Dieselbe ist, wie man sieht, immer dann und nur dann erfüllt, wenn die Function $\psi(\varrho)$ in allen Theilen der Welle endlich, stetig und eindeutig ist.

Was wird nun aber aus dieser Beziehung, wenn in der Vorderseite der Welle ein Verdichtungsstoss entsteht, so dass die Curve der Dichtigkeiten zwischen den Dichtigkeiten ϱ_g und ϱ_h — die Abscisse heisse ξ — senkrecht zur Abscissenaxe verläuft? Wir zerlegen zunächst den Ausdruck in Gl. 13 in mehrere Glieder. Da die Dichtigkeiten ϱ_g und ϱ_h in der Rückseite der Welle ebenfalls vertreten sind und dort zur Zeit t die Abscissen g und h haben, so wählen wir für die Theilintegrale die Grenzen: $m + at$ und g, g und h, h und ξ_{-0}, ξ_{+0} und $n + at$.

Bei der Differentiation nach t verschwindet nun das Integral mit den Grenzen h und ξ_{-0} für sich und heben sich ferner das erste und letzte Integral auf, weil für diese Integrale die Beziehung 12 fortbesteht. Uebrig bleibt nur das zweite Integral, mit dem wir somit die Gleichung

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\int_g^h \left(\frac{1}{2}\varrho u^2 + C_v \varrho T + \text{const.}\right) dx$$

oder wenn wir berücksichtigen, dass die Grenze g und h in der Zeit dt die Aenderungen

$$dg = \left(u_g + \sqrt{kA}\,\varrho_g^{\frac{k-1}{2}}\right) dt$$

$$dh = \left(u_h + \sqrt{kA}\,\varrho_h^{\frac{k-1}{2}}\right) dt$$

erfahren,

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = \left[\left(\frac{1}{2}\varrho u^2 + C_v \varrho T + \text{const.}\right)\left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right)\right]_{x=g}^{x=h} -$$

$$- \int_{\varrho_g}^{\varrho_h} \frac{\delta}{\delta \varrho}\left(\frac{1}{2}\varrho u^2 + C_v \varrho T + \text{const.}\right)\left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right) d\varrho$$

oder durch partielle Integration

$$\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = \int_{\varrho_g}^{\varrho_h} \left(\frac{1}{2}\varrho u^2 + C_v \varrho T + \text{const.}\right) \frac{\delta}{\delta \varrho}\left(u + \sqrt{kA}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}\right) d\varrho$$

erhalten.

Tritt in der fortschreitenden Welle zu irgend einer Zeit ein Verdichtungsstoss ein, dann ist die Grösse $\frac{\delta \Sigma U}{\delta t}$, weil $\varrho_h > \varrho_g$ ist, nicht gleich Null, sondern positiv.

4.

Dieser Widerspruch der Rechnung mit dem Princip der Energie kann offenbar nur darin liegen, dass eine der gemachten Voraussetzungen nicht zutrifft.

In der Gl. 13 haben wir die gesammte Energie der Welle zum Ausdruck gebracht, vielleicht gelingt es uns, den Widerspruch zu erklären, wenn wir das Princip der Energie nur auf einen Wellentheil und zwar auf jene Massenschichten anwenden, welche zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle liegen und durch die Abscissen ξ und $\xi - \omega$, bezw. durch ξ und $\xi + \omega'$ begrenzt sind. Es ist dies, wie man sieht, dieselbe Anwendung wie im Artikel 1, wo es sich darum gehandelt hat, die Differentialgleichungen zu entwickeln.

Werden alle Grössen, welche sich auf die linke Schichte beziehen, mit dem Index — 0, alle Grössen dagegen, welche sich auf die rechte Schichte beziehen, mit dem Index + 0 versehen, dann ergibt sich zunächst bezüglich der Druckkräfte, dass an der Stelle $\xi - \omega$ die äussere Druckkraft

$$p_{-0} - \frac{\delta p_{-0}}{\delta x}\omega$$

im Sinne der daselbst herrschenden Moleculargeschwindigkeit

$$u_{-} - \frac{\delta u_{-0}}{\delta x}\omega,$$

und an der Stelle $\xi + \omega'$ die äussere Druckkraft

$$p_{+_0} + \frac{\delta p_{+_0}}{\delta x}\omega'$$

in einem der dortigen Moleculargeschwindigkeit

$$u_{+_0} + \frac{\delta u_{+_0}}{\delta x}\omega'$$

entgegengesetzten Sinne wirkt. Der Energiezuwachs in der Zeit dt erhält demgemäss folgenden Ausdruck:

$$\varrho_{-_0}\omega\,(u\,du + C_v\,dT)_{-_0} + \varrho_{+_0}\omega'\,(u\,du = C_v\,dT)_{+_0}$$
$$= \left[(pu)_{-_0} - (pu)_{+_0} - \frac{\delta(pu)_{-_0}}{\delta x}\omega - \frac{\delta(pu)_{+_0}}{\delta x}\omega'\right]dt. \qquad (16$$

In dieser Gleichung, welche nothwendig erfüllt sein muss, ist zugleich, wie wir sehen, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ausgedrückt, dass $\frac{\delta \Sigma U}{\delta t} = 0$ ist. Denn der Energiezuwachs jenes Wellentheiles, der in der Hinterseite der Welle zwischen ϱ_h und ϱ_g, also jenen Dichtigkeiten liegt, welche

$$\varrho_{-_0} - \frac{\delta \varrho_{-_0}}{\delta x}\omega \text{ und } + \varrho_{+_0} - \frac{\delta \varrho_{+_0}}{\delta x}\omega'$$

gleich sind, ist durch die Arbeit [1])

$$(p_g u_g - p_h u_h)\,dt = -\left[(pu)_{-_0} - (pu)_{+_0} - \frac{\delta(pu)_{-_0}}{\delta x}\omega - \frac{\delta(pu)_{+_0}}{\delta x}\omega'\right]dt$$

bestimmt.

Zur Lösung des erwähnten Widerspruches wollen wir noch zwei andere Gleichungen heranziehen.

Die Masse $\varrho_{-_0}\omega$ ist constant, ebenso die Masse $\varrho_{+_0}\omega'$; daraus folgt

$$\omega\,d\varrho_{-_0} + \varrho_{-_0}\,d\omega = 0 \text{ oder } \omega\,d\log\varrho_{-_0} + d\omega = 0$$

und

$$\omega'\,d\varrho_{+_0} + \varrho_{+_0}\,d\omega' = 0 \text{ oder } \omega'\,d\log\varrho_{+_0} + d\omega' = 0$$

oder, wenn wir addiren,

$$\omega\,d\log\varrho_{-_0} + \omega'\,d\log\varrho_{+_0} + d(\omega + \omega') = 0.$$

---

1) Selbstverständlich ist

$$p_h = p_{-_0} - \frac{\delta p_{-_0}}{\delta x}\omega,\ p_g = p_{+_0} + \frac{\delta p_{+_0}}{\delta x}\omega',$$

$$u_h = u_{-_0} - \frac{\delta u_{-_0}}{\delta x}\omega,\ u_g = u_{+_0} + \frac{\delta u_{+_0}}{\delta x}\omega'.$$

Da nun die Grösse $d(\omega + \omega')$ nichts anderes als die Zunahme des von den beiden Massen erfüllten Raumes, d. i. mit Rücksicht auf die in $\xi - \omega$ und $\xi + \omega$ herrschende Moleculargeschwindigkeiten

$$-\left(u_{-_0} - \frac{\delta u_{-_0}}{\delta x}\omega\right)dt + \left(u_{+_0} + \frac{\delta u_{+_0}}{\delta x}\omega'\right)dt$$

ist, so erhalten wir als zweite Bedingungsgleichung

$$\omega d\log\varrho_{-_0} + \omega' d\log\varrho_{+_0} + \left(u_{-_0} + u_{+_0} + \frac{\delta u_{-_0}}{\delta x}\omega + \frac{\delta u_{+_0}}{\delta x}\omega'\right)dt. \quad (17$$

Als dritte Bedingung soll eine Bewegungsgleichung eingeführt werden. Auf die Masse $\varrho_{-_0}\omega$ wirkt links ein äusserer Druck

$$p_{-_0} - \frac{\delta p_{-_0}}{\delta x}\omega$$

und zwar im Sinne der Bewegung, rechts dagegen ein äusserer Druck von der Grösse p_{+_0} im entgegengesetzten Sinn; mithin

$$\varrho_{-_0}\omega\, d u_{-_0} = \left[\left(p_{-_0} - \frac{\delta p_{-_0}}{\delta x}\omega\right) - p_{+_0}\right]dt. \quad (18$$

Wird in diesen drei Gleichungen überall $p_{+_0} = p_{-_0}$, $u_{+_0} = u_{-_0}$, $\varrho_{+_0} = \varrho_{-_0}$, $\omega = \omega'$ gesetzt, dann fallen sie mit den Gleichungen 2, 5 und 4 vollständig zusammen. Anders aber in dem folgenden Fall.

Wir wollen dieselbe Voraussetzung wie oben machen, nämlich dass Geschwindigkeit und Dichtigkeit zu beiden Seiten des Dichtigkeitssprunges in derselben Beziehung zu einander stehen wie in dem übrigen Theil der Welle oder dass

$$u_{-_0} = \frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} - 2s, \quad u_{+_0} = \frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho_{+_0}^{\frac{k-1}{2}} - 2s \quad (19$$

und s eine für die ganze Welle constante Grösse ist. Verwenden wir nun in den drei Gleichungen 16, 17 und 18 für den Druck p, die absolute Temperatur T und die Moleculargeschwindigkeiten u_{+_0} und u_{-_0} die im Artikel 1 aufgestellten Beziehungen, resp. die Gleichungen 19, dann können wir aus ihnen die zwei Grössen

$$\omega\frac{d\varrho_{-_0}}{dt} \text{ und } \omega'\frac{d\varrho_{+_0}}{dt}$$

eliminiren und erhalten, wenn wir noch zur Abkürzung die unendlich kleinen Grössen

$$\frac{\delta (pu)_{+_0}}{\delta x}\omega + \frac{\delta (pu)_{+_0}}{dx}\omega' = \varepsilon$$

$$\frac{\delta p_{-_0}}{\delta x}\omega = \varepsilon'$$

$$\frac{\delta u_{-_0}}{\delta x}\omega + \frac{\delta u_{+_0}}{\delta x}\omega' = \varepsilon''$$

setzen, die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&(p_{-_0} - p_{+_0} - \varepsilon')\left(u_{+_0} + \sqrt{\frac{A}{k}}\varrho_{-_0}^{\frac{k-1}{2}}\right) + \\
&+\sqrt{kA}\,\varrho_{+_0}^{\frac{k-1}{2}}\left(u_{+_0} + \sqrt{\frac{A}{k}}\varrho_{+_0}^{\frac{k-1}{2}}\right)\left(\varrho_{+_0}(u_{-_0} - u_{+_0}) - \right. \\
&\left. - \frac{\varrho_{+_0}(p_{-_0} - p_{+_0} - \varepsilon')}{\sqrt{kA}\,\varrho_{-_0}^{\frac{k-1}{2}}} - \varepsilon''\varrho_{+_0}\right) = (pu)_{-_0} - (pu)_{+_0} - \varepsilon.
\end{aligned}\right\} \quad (20$$

Diese Gleichung wird zwar für $p_{+_0} = p_{-_0}$, $\varrho_{+_0} = \varrho_{-_0}$, $u_{+_0} = u_{-_0}$ eine identische Gleichung, nehmen wir aber an, dass diese Grössen endlich verschiedene Grössen sind, dann fallen die unendlich kleinen Grössen ε, welche zu den endlichen Grössen addirt erscheinen, heraus, und wir erhalten eine bestimmte Beziehung zwischen den Dichtigkeiten ϱ_{+_0} und ϱ_{-_0}, welche im allgemeinen nicht erfüllt ist.

Die drei Gleichungen 17, 18 und 19 müssen auf jeden Fall gelten; der Umstand nun, dass die Gl. 20 im allgemeinen ungiltig ist, ist ein Beweis dafür, dass die Beziehungen 19 in dem Fall, wo eine Unstetigkeit in der Dichtigkeitscurve entsteht, mit den erwähnten drei Gleichungen nicht mehr verträglich, somit ungiltig werden. In den Beziehungen 19 ist die Grösse s als eine für die ganze Welle constante und constant bleibende Grösse angesehen worden: diese Grösse wird also durch den Verdichtungsstoss entweder in beiden Beziehungen oder wenigstens in einer derselben geändert. Das ist denn auch der Grund, weshalb früher der Ausdruck für $\frac{\delta \Sigma U}{\delta t}$ beim Eintreten eines Verdichtungsstosses einen von Null verschiedenen Werth erhielt, denn wir haben bei der Bildung dieses Ausdruckes die Gl. 12, welche aus der in den Gleichungen 19 ausgesprochenen Beziehung unmittelbar hervorgeht, als für die ganze Welle ansnahmslos giltig angesehen und benutzt.

5.

Wir wollen wieder zu den allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$dr = \frac{\delta r}{\delta x}\{dx - (u + \sqrt{kA}\,\varrho^{k-1})\,dt\}$$

$$ds = \frac{\delta s}{\delta x}\{dx - (u + \sqrt{kA}\,\varrho^{k-1})\,dt\}$$

zurückkehren und dabei die Voraussetzung machen, dass für alle Theile der Welle Geschwindigkeit und Dichtigkeit durch eine bestimmte Beziehung aneinander gebunden sind, dass z. B. die in der Richtung der positiven x fortschreitende Welle das Gebiet der constanten s vollständig betreten hat, also die Beziehung

$$\frac{2\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} - u = 2s$$

gilt, wo s eine constante Grösse ist. Wird nun die Welle in irgend einem Augenblick als neues Erregungscentrum aufgefasst, dann ist die erste Gleichung durch $dr = 0$ und

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{kA}\,\varrho^{k-1}$$

und die zweite Gleichung, weil $\frac{\delta s}{\delta x} = 0$ ist, durch $ds = 0$ erfüllt, selbst dann, wenn wir in diese zweite Gleichung den aus der ersten gewonnenen Werth von $\frac{dx}{dt}$ substituiren. Mit anderen Worten, es genügt in diesem Falle den Hauptgleichungen die betrachtete Welle allein, oder es geht aus dem Erregungsgebiet nur eine, und zwar die betrachtete Welle allein hervor.

Entsteht nun aber ein Verdichtungsstoss, dann ändert sich entweder zu beiden Seiten desselben oder wenigstens auf der einen Seite die Grösse s. Jetzt ist an dieser Stelle $\frac{ds}{dx}$ nicht mehr gleich Null und die Gleichung für ds wird an dieser Stelle erfüllt sein durch

$$ds = 0 \text{ und } \frac{dx}{dt} = u - \frac{\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}},$$

ganz so wie in dem allgemeinen Falle, den wir betrachtet haben. Mit andern Worten, es geht von der Stelle des Verdichtungsstosses eine Wellenbewegung mit der Geschwindigkeit

$$\frac{\sqrt{kA}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} - u$$

nach rückwärts ab.

Indem diese rückwärtslaufende Wellenbewegung von jener Stelle, wo sie entstanden ist, Energie mitnimmt, schwächt sie die dort bestehende Energiemenge und löst, weil sie an jener Stelle so lange erzeugt wird, als die Unstetigkeit besteht, diese Unstetigkeit auf.

Der Grund, warum die Wellen endlicher Schwingungsweite im Anfange eine so grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, liegt offenbar darin, dass die grossen Dichtigkeiten den kleineren vorauseilen und dabei den Anfang der Welle überschreiten. Dadurch wird die Welle länger. Und da das Ueberschreiten nicht anders erfolgen kann als durch Bildung von Verdichtungsstössen, so muss dies eine rückwärtslaufende Wellenbewegung zur Folge haben, welche die grossen Dichtigkeiten und damit ihre grossen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten fortwährend schwächt.

Solange die Dichtigkeiten eine verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, wird auch der Grund zur Bildung von Verdichtungsstössen gegeben sein, die Welle wird immer schwächer und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit immer kleiner, bis eine gewöhnliche Schallwelle daraus geworden ist, bei der alle Theile mit constanter Geschwindigkeit fortschreiten.

Mit den thatsächlichen Verhältnissen, welche Prof. Mach festgestellt hat, stimmt dieses Ergebnis vollkommen überein; dieselben erscheinen somit erklärt, d. h. mit jenen Grundsätzen in Einklang gebracht, aus welchen wir alle Gesetze der hydrodynamischen Vorgänge ableiten, und welche diese Vorgänge als ihre allgemeinsten Gesetze umfassen und beherrschen.

Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 8. November 1887.

Vorsitzender: Dr. Guido Goldschmiedt.

Der Präsident dankt namens des Vorstandes für die in der letzten Generalversammlung vom 25. October erfolgte Wahl.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Oberstlieutenant A. v. Obermayer erstattet den Commissionsbericht bezüglich der Theilnahme der Gesellschaft am Hofmann-Jubiläum und stellt namens des Comité folgende Anträge:

1. Die Gesellschaft bewilligt für den genannten Zweck einen Beitrag von 100 M.;

2. sei eine Sammlung unter den hiesigen Chemikern, Industriellen etc. einzuleiten und diese Beträge an das Berliner Comité abzuführen;

3. am 8. April als dem Geburtstage A. W. Hoffmann's werde derselbe telegraphisch beglückwünscht.

Diese Anträge werden einstimmig angenommen.

Hierauf hält Dr. E. Lecher den angekündigten Vortrag „über Convection der Elektricität beim Verdampfen" und Herr A. Rueprecht „über eine schnelle Wägungsmethode mittels einer neuen Präcisionswage mit automatisch steigbarer gleicher Empfindlichkeit für drei Decimalstellen bei geschlossenem Gehäuse", mit Demonstrationen.

Als neue Mitglieder wurden aufgenommen die Herren: Prof. Dr. Max Gruber, Prof. Dr. Th. F. Hanausek, Dr. M. v. Waldheim, Dr. C. Pomeranz, Oskar Ostersetzer, Alfred Stransky.

Am 17. November hielt Herr Gustav Dähne einen Experimental-Vortrag für die Mitglieder der Gesellschaft.

Wien, 22. November 1887.

Der Secretär.

Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 22. November 1887.

Vorsitzender: Prof. Dr. S. Exner.

Nach Genehmigung des Protokolls der letzten Sitzung verliest der Vereinskassier, Herr A. v. Waldheim, den Kassabericht des verflossenen Vereinsjahres.

Zu Revisoren desselben werden auf Antrag des Vorsitzenden die Herren Dr. R. Benedikt und Dr. E. Lecher gewählt. Herr Oberstlieutenant A. v. Obermayer hält hierauf den angekündigten Vortrag: „Ueber Diffusion der Gase." Herr Dr. James Moser spricht „über photoelektrische Ströme".

Als neue Mitglieder werden aufgenommen die Herren Dr. F. V. Spitzer und Dr. A. Kohner.

Wien, 6. December 1887.

Der Secretär.

Eingesendete Bücher.

Uppenborn, Kalender für Elektrotechniker 1888 nebst Beilage. München bei Oldenbourg. 4 Mk. 60. Enthält eine sehr vollständige und übersichtliche Zusammenstellung aller für die Praxis nothwendigen Gesetze und Formeln aus der Mathematik, Physik, Elektrotechnik und den verwandten Gebieten.

Huth, Societatum litterae. Berlin bei Friedländer & Sohn. Jährlich 2 Mk. 50. Erscheint monatlich und bringt eine nach Materien geordnete vollständige Uebersicht aller auf dem Gebiete der Astronomie, Meteorologie, Physik, Chemie, Zoologie, Anthropologie, Mineralogie, Geologie, Paläontologie und Hygiene erscheinenden Arbeiten.

Petroff, Neue Theorie der Reibung. Deutsch von Wurzel. Hamburg bei L. Voss. 1887. 187 S. 5 Mk. Das Werk behandelt auf Grund wesentlich neuer Vorstellungen die folgenden Kapitel: Reibung starrer Körper; Reibung von Flüssigkeiten; Versuche und Forschungen zur Ermittlung der Reibungsgesetze in Flüssigkeiten; der Reibungswiderstand an der Oberfläche eines verticalen unendlich langen Cylinders, welcher sich in einem anderen concentrischen mit Flüssigkeit gefüllten Cylinder dreht; Vergleichung der Formeln mit den Versuchsresultaten.

Mascart und Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsch von L. Levy. 2. Bd. 716 S. mit 137 Figuren. Berlin bei J. Springer. 1888. 16 Mk. Mit diesem zweiten Bande liegt das treffliche Werk nun vollständig vor. Der Inhalt dieses Theiles zerfällt in folgende Kapitel: I. Messungsmethoden. 1. Messung von Winkeln; 2. Messung von Schwingungen; 3. Messung der Kräftepaare; 4. Eigenschaften der Kreisströme; 5. Inductionscoefficienten. II. Elektrische Messungen. 1. Elektrometrie; 2. Messung von Strömen; 3. Vergleichung von Widerständen; 4. Messung von elektromotorischen Kräften; 5. Messung von Capacitäten; Dielektrica; 6. Constanten der Rollen. 7. Messung von Widerständen in absolutem Maass. 8. Verhältnis der Einheiten zu einander. III. Magnetische Messungen. 1. Magnetisches Feld; 2. Magnetisirungsconstanten. IV. Zusätze. 1. Industrielle Anwendungen; 2. Numerische Constanten. Die Ausstattung des Werkes ist eine vorzügliche.

Mielberg, Magnetische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums in den Jahren 1884—85. Tiflis 1887. 80 S.

Neumann Dr. Carl, Die Brillen, das dioptrische Fernrohr und Mikroskop. Bd. 153 der chemisch-technischen Bibliothek von Hartleben. Wien 1887. 232 S. mit 95 Figuren. 4 Mk. Kurze Darstellung der Brechung, Farbenzerstreuung und Polarisation des Lichtes sowie der Gesetze der verschiedenen Linsensysteme, Fernrohre und Mikroskop. Ein besonderer Abschnitt ist dem Schleifen und Poliren des Glases gewidmet.

Urbanitzky A. v., Die Elektricität des Himmels und der Erde. 1. Lieferung. Wien 1887 bei Hartleben. Das ganze Werk soll in 18—20 Lieferungen vollständig erscheinen.

Helm Dr. Georg, Die Lehre von der Energie, historisch-kritisch entwickelt. Leipzig bei A. Felix. 1887. 104 S. Diese Studie behandelt in sehr fesselnder Weise: 1. die Quellen der Energieideen; 2. Die Begründung des Energiegesetzes; 3. die Energetik.

Konkoly N. v., Praktische Anleitung zur Himmelsphotographie. Halle bei W. Knapp. 1887. 372 S. mit 218 Figuren. Es ist unmöglich, den ausserordentlich reichen Inhalt dieses trefflichen Werkes, der in den Abschnitten: 1. das Laboratorium; 2. das Präpariren von Platten; 3. im Cabinet; 4. am Fernrohr sich findet, auch nur angenähert zu skizziren. Wer sich mit wissenschaftlicher Photographie beschäftigt, der wird im vorliegenden Werke eine grosse Fülle des Wissenswerthen finden und zwar, entsprechend der reichen Erfahrung des Autors, in sehr klarer Darstellung.

Fein W. E., Elektrische Apparate, Maschinen und Einrichtungen. Stuttgart bei J. Hoffmann. 1888. 392 S. mit 297 Abbildungen. Das Werk enthält eine Beschreibung und Darstellung aller vom Autor in den letzten 20 Jahren construirten und ausgeführten Apparate und Einrichtungen. Das ausserordentlich reichhaltige Material zerfällt in folgende Abtheilungen: 1. Erzeugung des elektrischen Stromes; 2. Messinstrumente und wissenschaftliche Apparate; 3. Signalwesen und Telegraphie; 4. Fernsprechwesen; 5. Elektrische Beleuchtung; 6. Elektrische Kraftübertragung; 7. Elektrochemie; 8. Aerztliche Elektrotechnik; 9. Sonstige technische Anwendungen der Elektricität. Die Ausstattung des Werkes ist eine besonders schöne.

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Soeben erschienen:

Ueber den gegenwärtigen Stand

der

elektrischen Beleuchtung.

Bericht

an den Verein der Gas- und Wasserfachmänner Deutschlands

erstattet von

Dr. Schilling sen.

Octav. 45 Seiten. *Brochirt Preis 70 Pf.*

Verlag von R. Oldenbourg in München und Leipzig.

Taschenbuch für Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von Ingenieur **S. Freiherr v. Gaisberg.**

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

klein 8. VIII und 128 Seiten. Preis gebunden 2 M. 40 Pf.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig**

ist erschienen:

der fünfte Jahrgang 1888

des

Kalender für Elektrotechniker.

Herausgegeben von

F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant geb. Preis 4 M., dazu Beilage brosch. 60 Pf.

Der neue Jahrgang hat abermals viele Erweiterungen erfahren, sowohl in der Physik (Magnetismus, Photometrie), als in der Elektrotechnik (Messmethode). Mehrere Tabellen sind neu berechnet und an passenden Orten Zusätze gemacht worden. In Anbetracht des stets wachsenden Materials erschien es nothwendig, diesmal einen Theil desselben abzucheiden und in einer Beilage unterzubringen.

Nachstehende Inhaltsübersicht wird die jetzige Vertheilung des umfangreichen Materials auf Taschenbuch und Beilage veranschaulichen.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg. (13a/2)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte

Construction für Lehrzwecke.

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a 2)

Im Verlage von **Quandt & Händel** in **Leipzig** ist erschienen und zu haben in allen Buchhandlungen:

Einführung in das physikalische Praktikum.

Von **R. T. Glazebrook** und **W. N. Shaw**, Demonstratoren der Physik am Cavendish-Laboratorium in Cambridge. Deutsch herausgegeben von **W. Schlösser**, techn. Hülfsarbeiter bei der kaiserl. Normal-Aichungs-Commission in Berlin. Mit 86 Figuren. Preis 7 M. 50 Pf. (4 2)

Über 500 Illustrationstafeln und Kartenbeilagen.

Achtzig Aquarelltafeln.

Soeben erscheint in gänzlich neuer Bearbeitung

MEYERS
KONVERSATIONS-LEXIKON
VIERTE AUFLAGE.

3000 Abbildungen im Text.

Bibliographisches Institut in Leipzig.

256 Hefte à 50 Pfennig. — 16 Halbfranzbände à 10 Mark.

(3a|2)

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale

Elektrische Maasssystem

im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis M. 1.—.

XXIV. Band. 3. Heft.

HARVARD COLLEGE
APR 28 1888
LIBRARY.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 3. Heftes.

Ueber den Einfluss des Magnetismus und der Wärme auf den elektrischen Widerstand des Wismuths und dessen Legirungen mit Blei und Zinn. Von Edmond van Aubel. S. 137.
Ueber Verdampfung. Von K. Fuchs. S. 141.
Ueber die barometrische Höhenmessformel. Von Dr. J. M. Pernter. S. 161.
Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung. Von August Häussler. S. 179.
Graphische Darstellung der Linsenformel. Von Dr. Alois Handl. S. 197.
Ueber Messungen der irdischen Schwerkraft. Von A. Kurz. S. 202.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,
Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 2).

Jahrgang 1888 Nr. 5 enthält:

Rundschau. — Lichtbogen und Bogenlicht. Von F. Uppenborn. — **Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Leitungsvermögens der Elektrolyte von den in ihnen enthaltenen pulverförmigen, dielektrischen Medien.** Von H. Lux, Breslau. (Fortsetzung.) — **Eine Bemerkung zu Kittler's Handbuch der Elektrotechnik.** Von M. Baumgardt. — **Das Radialphotometer von Dibdin.** — Von Dr. H. Krüss in Hamburg. — **Kleinere Mittheilungen.** Telephonie. Das Krankentelephon. — Elektrische Kraftübertragung. Die Electric Street Railway Company in Philadelphia. — Die elektrische Tramway in Field. — Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung in Berlin, Königsberg, Görlitz, Darmstadt. — Elektr. Centralstation in der Schenkenstrasse in Wien. — Elektr. Beleuchtung der St. Clemenskirche in Prag. — Elektr. Beleuchtung in Budapest. — Verschiedenes. Versuche der Militärverwaltung mit Magnesiumlicht bei Potsdam. — Gutachten einer Wiener Commission über die Verwendung des Drummond'schen Lichtes. — Gas-Vertrag der Stadt Aachen mit der Imperial-Continental-Gasassociation. — Gas-Vertrag der Stadt Hannover mit der dortigen englischen Gesellschaft. — Eröffnung einer elektrotechnischen Lehranstalt in Mailand. — Verwundung des Telegraphenschul-Directors Raynaud. — Elwell Parker's elektrisches Trambahnmeter. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 6 enthält:

Rundschau. — Bericht über die Anlage einer Centralstation für elektrische Beleuchtung in der Stadt Köln. Erstattet von A. Hegener, Director der Gas- und Wasserwerke. — **Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Leitungsvermögens der Elektrolyte von den in ihnen enthaltenen pulverförmigen, dielektrischen Medien.** Von H. Lux, Breslau. (Schluss.) — **Untersee-Telephonie.** Von Holthof, kgl. preuss. Hauptmann a. D. — **Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens.** Ein neuer Syphon-Recorder. — Morse-Betrieb auf langen Kabeln. — Die automatische Telegraphie und die Leistungsfähigkeit der Telegraphenleitungen. — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachricht. Telegraphen-Director Raynaud †. — Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung des Rathhauskellers in München. — Elektr. Beleuchtung des Grand Hôtel Bellevue in Berlin. — Elektr. Beleuchtung des Künstlerhauses in Berlin. — Verhandlung der Berliner Stadtverordnetenversammlung wegen Abschluss eines neuen Vertrags mit der Actiengesellschaft Berliner Elektricitätswerke. — Beleuchtung der Berliner Markthallen. — Elektr. Beleuchtung in Essen. — Elektr. Beleuchtung der Parlamentshäuser in Wien. — Verschiedenes. Aufforderung eines Gemeindebevollmächtigten, den im Jahre 1899 ablaufenden Gasvertrag mit der Stadt München nicht mehr zu erneuern. — Wright's Elektrometer. — Eine praktische Form des Polaritätsanzeigers. — Röhrenelement von J. Berliner. — Stromindicator für Bogenlichtstromkreise. — Die motorische Kraft der Erde. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, Verlagsbuchhandlung.

HARVARD COLLEGE
APR 28 1888
LIBRARY.

Ueber den Einfluss des Magnetismus und der Wärme auf den elektrischen Widerstand des Wismuths und dessen Legirungen mit Blei und Zinn.

Vorläufige Mittheilung[1]).

Von

Edmond van Aubel.

Wir bezwecken hauptsächlich durch die Veröffentlichung dieser Arbeit uns die Weiterbearbeitung des darin behandelten Gegenstandes vorzubehalten, da unsere diesbezüglichen Untersuchungen noch nicht vollendet sind.

Das Wismuth wurde in drei verschiedenen Aggregatzuständen geprüft:

1. geschmolzen und langsam erkaltet,
2. geschmolzen und rasch erkaltet oder gehärtet,
3. vorher einem starken Druck unterworfen.

Letztere Modification haben wir von Herrn Prof. Spring erhalten; dasselbe wurde auf einer Ziehbank bereitet[2]). Der Aggregatzustand dieses Wismuths ist höchst merkwürdig: ein der Axe des Metalldrahtes normaler Bruch zeigt eine strahlige Structur.

Wir untersuchten die Legirungen des Wismuths in zwei Modificationen:

1. geschmolzen und langsam erkaltet,
2. gehärtet.

Es wurde der elektrische Widerstand einiger Wismuthsorten bestimmt. Dieselben waren aus den chemischen Fabriken von Monheim bei Aachen, Tromsdorff in Erfurt und Schering in Berlin bezogen.

Herr A. Classen, Professor an der technischen Hochschule zu Aachen, hatte die Güte jene Wismuthproben chemisch qualitativ zu untersuchen. Die Analyse gab folgende Resultate:

---

1) Auszug aus einer demnächst in den Bulletins de l'Académie royale de Belgique erscheinenden Arbeit.

2) Annales de la Société Géologique de Belgique t. XI p. CXXXIV (1884).

Wismuthsorten:	Fremde Körper:
Monheim Handels.	Kupfer[1]), Blei, Eisen,
Tromsdorff purissimum 1. Probe.	Eisen, Kupfer,
„ „ 2. „	Blei, Kupfer, Nickel,
Tromsdorff, ein für uns speciell bereitetes und als chemisch rein angegebenes Wismuth.	Blei, Kupfer (Spuren), Eisen, Kohle,
Schering purissimum.	Kupfer, Blei?, Nickel.

Es ist auffallend schwer, reines Wismuth zu erhalten, besonders aus demselben das Kupfer und das Blei zu entfernen.

Herr Classen beschäftigt sich augenblicklich mit der Darstellung eines chemisch reinen Wismuths, der zu unseren späteren Untersuchungen dienen soll.

Die angeblich chemisch reinen Wismuthsorten sind also chemisch sehr verschieden. Auch fanden wir bei der Bestimmung der Schmelzpunkte und der specifischen Gewichte merkliche Unterschiede von einer Wismuthprobe zur anderen.

Messung der elektrischen Widerstände.

Die Intensität des durch einen Ruhmkorff'schen Elektromagneten durchgehenden Stromes betrug bei unseren Untersuchungen 28 Ampère. Wir ersetzten die gewöhnlich benutzten Pole des Elektromagneten durch zwei runde eiserne Platten, um eine grössere Gleichartigkeit des magnetischen Feldes zu erzielen.

Die Widerstandsmessungen wurden nach Thomson's Methode ausgeführt.

Um das Erhitzen der Wismuthdrähte zu verhindern, wurde nur ein Grove'sches Element benutzt und mittels eines Commutators der elektrische Strom nur während der zur Beobachtung nothwendigen Zeit durch das Wismuth geleitet.

Wir prüften eine grosse Anzahl Wismuth- und Legirungsstangen und erhielten folgende Resultate:

1. Einfluss der Wärme.

Die sämmtlichen untersuchten Wismuthsorten verhielten sich verschieden. Bei einigen nahm der elektrische Widerstand bei steigender Temperatur zu, bei anderen dagegen war auffallenderweise eine Abnahme beobachtet.

---

1) Bei den gesperrt gedruckten Metallen ist die Quantität ziemlich gross.

Letzteres wurde zum ersten Mal durch Herrn Righi [1]) hervorgehoben und soll, nach diesem Physiker, nicht in der Anwesenheit des Arsens im Wismuth, sondern in der des Zinns seinen Grund finden, da dieses Metall, selbst in kleinen Quantitäten, schon die beobachtete Abnahme hervorbringt.

Wir haben viele Versuche angestellt, um die Ursache dieser Abnahme des Widerstandes zu erforschen. Es wurden zu dem Zwecke Legirungen von Wismuth und Zinn untersucht, in denen die Quantität Zinn ziemlich bedeutend war. Bei allen Beobachtungen fanden wir eine Zunahme des Widerstandes bei Erhöhung der Temperatur, obschon das Wismuth, welches in den Legirungen vorhanden war, eine Abnahme des Widerstandes bei Temperatursteigerung verursachte.

Da nun auch durch die chemische Analyse kein Zinn in den Wismuthsorten gefunden war, so glauben wir, dass es hiermit genügend bewiesen ist, dass die Ursache der beobachteten Anomalie nicht der Anwesenheit des Zinns zuzuschreiben ist [2]).

Ebenso wenig wie aus den Resultaten der chemischen Analyse und den elektrischen Messungen zu ersehen ist, hat die Abnahme in der Abwesenheit des Eisens oder des Arsens ihren Grund.

Herr C. W. Kayser [3]) hat nachgewiesen, dass die Ausdehnung beim Erstarren nicht stattfindet, wenn das Wismuth mehr wie 10% Blei enthält. Diese Thatsache veranlasste uns, Legirungen aus Blei und Wismuth zu prüfen. Wir erhielten interessante Resultate [4]), die aber keineswegs etwas zur Erklärung der Abnahme des Widerstandes bei Temperaturerhöhung beibrachte.

Wir haben uns ebenfalls überzeugen können, dass weder die Schmelzpunkte, noch die specifischen Gewichte Beziehungen zu der elektrischen Erscheinung haben.

2. Einfluss des Magnetismus.

Im allgemeinen ist der Einfluss des Magnetismus geringer wie von Herrn Righi angegeben [5]). Der Magnetismus verursacht immer eine Zunahme des Widerstandes; bei Temperaturerhöhung vermindert sich

1) Journal de Physique, (2). 3, 1884, p. 355.

2) Siehe auch die Abhandlung des Herrn W. Nernst (Annalen der Physik 1887 S. 783), die, während wir mit unseren Untersuchungen beschäftigt waren, erschienen ist.

3) Berichte der deutschen chem. Gesellschaft, Berlin (1869) S. 309.

4) Herr Leduc hatte schon (Journal de Physique (2) vol. V, p. 116) das Leitungsvermögen der Blei- und Wismuthlegirungen, aber von einem anderen Standpunkte aus, untersucht.

5) Herr Goldhammer (Annalen der Physik 1887 Heft 7 S. 360 hat auch dasselbe gefunden.

der Einfluss und ist derselbe bei den Legirungen geringer wie beim Wismuth.

3. Gepresstes Wismuth.

Der elektrische Widerstand des gepressten Wismuths verändert sich nicht viel mit der Temperatur; von 16,8° bis 42,4° findet man eine schwache Abnahme, von da an bis 76° eine geringe Zunahme des Widerstandes.

Dasselbe Wismuth wurde geschmolzen und bei langsamem Erkalten zu einem Drahte gebildet. Die elektrischen Widerstandsmessungen zeigten, dass das Wismuth in diesem Zustande bei Temperaturerhöhung eine ziemlich starke Zunahme des Widerstandes erleidet.

Wie zu ersehen, ist der Aggregatzustand eines durch die Ziehbänke passirten Wismuths und eines solchen, das geschmolzen und alsdann langsam erkaltet worden ist, sehr verschieden. Man kann sich die Sache so vorstellen, dass in letzterem Falle die Krystalle sich während des Erkaltens orientiren, wogegen in ersterem das Metall aus parallelen Fasern bestehend zu betrachten ist.

Nähere elektrische Untersuchungen über diesen Gegenstand werden wahrscheinlich mehr Klarheit in diese so wichtige Frage der Molecular-Physik bringen.

Aus unserer Arbeit geht hervor, dass es bis jetzt noch nicht gelungen ist die Abnahme des elektrischen Widerstandes zu erklären. Der moleculare Aggregatzustand, den wir durch Erhärtung oder Zusammenpressung verändert haben, ist von grossem Einflusse auf die Einwirkung der Wärme.

Aachen, Technische Hochschule, November 1887.

Ueber Verdampfung.

Von

K. Fuchs.

1.

Die dynamische Gastheorie stützt sich von Grund aus auf das Princip der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Die grossen Erfolge, zu welchen dieses Princip auf dem Gebiete der Gastheorie geführt hatte, erweckten von Anfang an die Hoffnung, dass es gelingen werde, auf Grund desselben Principes das Gesetz der Dampfspannungen theoretisch zu entwickeln. Clausius hat wohl den Grundgedanken einer entsprechenden Theorie skizzirt, eine concrete Formel ist jedoch bis heute nicht gefunden worden.

Im folgenden soll versucht werden, dieses Problem von ganz anderer Basis aus in Angriff zu nehmen. Wir stellen als Ausgangspunkt schlechthin den Satz auf: Der Dampf über einer Flüssigkeit ist gesättigt, wenn durch die Verwandlung eines Massenelementes der Flüssigkeit in Dampf keine Arbeit geleistet wird.

Dieser Satz bedarf einer genaueren Erläuterung. In einem bestimmten Momente soll die Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefässe die Dichte ϱ_1, der Dampf über derselben aber die Dichte ϱ_2 besitzen. Wenn nun ein Massenelement m der Flüssigkeit sich in Dampf verwandeln, d. h. von der Dichte ϱ_1 zur Dichte ϱ_2 expandiren soll, dann hat es zwei Widerstände zu überwinden: die Cohäsion (d. h. die Molecularattraction der Flüssigkeitsmoleküle) und den vorhandenen Dampfdruck p, der der Expansion des m entgegenwirkt. Es müssen also bei der Verdampfung von m zwei negative Arbeiten geleistet werden, die wir mit e_c und e_p bezeichnen können.

Während zwei Factoren: die Cohäsion und der Dampfdruck die Moleküle des m zusammenzudrängen streben, gibt es nur einen Factor, der dieselben auseinander treibt: die Expansionstendenz infolge der Wärmebewegung der Moleküle. Indem also m sich expandirt, leistet es positive Arbeit, gleichwie ein sich expandirendes Gas; m kühlt sich hierbei ab, und es muss Wärme zugeführt werden, wenn die Tem-

peratur constant erhalten werden soll. Die zugeführte Wärme ist die Verdampfungswärme; die Expansionsarbeit sei e_w. Unser Stirnsatz besagt nun: Der Dampf über einer Flüssigkeit ist gesättigt, wenn die calorische Expansionsarbeit gerade hinreicht, um die Cohäsion und den vorhandenen Dampfdruck zu überwinden, oder wenn gilt

$$e_w - e_c - e_p = 0. \qquad (1$$

Aus diesem Satze folgen naturgemäss zwei complementäre Sätze. Es folgt daraus, dass bei noch höherem Dampfdrucke, also auch bei noch höherer Dampfdichte, die positive Arbeit, die durch die Expansion von m bei constanter Temperatur geleistet wird, nicht mehr ausreicht, die Cohäsion und den Dampfdruck zu überwinden. Umgekehrt folgt aber auch, dass bei niedererem Drucke ein Ueberschuss an positiver Arbeit geleistet wird.

Diese Erläuterung lässt noch manche Frage offen; die Beantwortung derselben soll später erfolgen. Zunächst wollen wir uns aber umsehen, ob es Erscheinungen gibt, welche für unseren Stirnsatz sprechen. Es sei sofort constatirt, dass sich deren mehrere finden lassen.

In unserer Erläuterung haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass bei der Verdampfung nur drei Arbeiten geleistet werden: e_w, e_c und e_p. Ferner hat unsere Entwicklung nur dann einen Sinn, wenn wir annehmen, dass mit steigender Dampfdichte auch die Summe der zu leistenden negativen Arbeiten $-e_c$ und $-e_p$ im Verhältnis zur positiven Expansionsarbeit immer grösser wird, während diese Summe relativ umso kleiner ist, je kleiner die Dampfdichte ist. Nun lassen sich aber Fälle finden, in denen zu e_w noch eine zweite positive Arbeit kommt, welche gelegentlich der Verdampfung geleistet wird, z. B. wenn die Flüssigkeit in Form von kleinen Tropfen erscheint. Wir können dann ruhig annehmen, dass die verdampfende Flüssigkeit nicht der Oberfläche, sondern dem Inneren der Tropfen entnommen wird. Es werden dann wie bisher die Arbeiten e_w, $-e_c$ und $-e_p$ geleistet. Nun verkleinert sich aber die Oberfläche der Tropfen, wenn ihrem Inneren Flüssigkeit entnommen wird; Contraction der Oberflächenhaut ist aber äquivalent mit positiver Arbeitsleistung, die wir mit $+e_0$ bezeichnen wollen. Die Summe der geleisteten Arbeiten ist dann $+e_0 + e_w - e_c - e_p$. Wenn aber die positive Arbeit, die mit der Verdampfung von m verbunden ist, gewachsen ist, dann muss auch die negative Arbeit wachsen, wenn die Summe der Arbeiten gleich Null oder der Dampf gesättigt sein soll; daraus folgt aber im Sinne des obigen Postulates, dass der gesättigte Dampf eine höhere Spannung zeigen muss, wenn Tropfen verdampfen, als wenn ein ebener Spiegel

verdampft. Diese Folgerung wird aber durch die Erfahrung bestätigt. (Prof. Stefan liefert für dieselbe Erscheinung eine andere Erklärung.) Für die Kugel haben wir, wenn v das Volumen, o die Oberfläche ist:

$$\frac{do}{dv} = \frac{2}{r}$$

d. h. die Oberflächenänderung bei Entnahme eines gewissen Volumens dv ist umso grösser, je kleiner der Radius der Kugel ist. Die abnorme Erhöhung der Dampfspannung ist also umso grösser, je kleiner die Tropfen sind.

Ein zweites Beispiel abnormer Dampfdichte bietet die Verdampfung in Capillarröhren, und auch hier erweist sich unser Stirnsatz fruchtbar. Zuförderst wird es nothwendig sein, einiges aus der Capillaritätslehre zu recapituliren [1]). Wenn an einer Flüssigkeit eine Einheit freier Oberfläche gebildet wird, dann wird durch die Molecularkräfte der Flüssigkeit hierbei die negative Arbeit $-a_c$ geleistet. Wenn diese freie Oberfläche mit einer Glaswand in Berührung gebracht wird, dann wird hierbei durch die Adhäsionskräfte die positive Arbeit $+2a_a$ geleistet. Durch die Bildung der Einheit der Contactfläche wird also die Moleculararbeit $+2a_a - a_c$ geleistet. Diese Contactflächenarbeit ist also positiv oder negativ, je nachdem $2a_a \gtrless a_c$ ist. Für $a_a = 0$, also in Abwesenheit jeder Adhäsion, ist der Randwinkel α, für den die Gleichung gilt

$$\cos\alpha = \frac{2a_a}{a_c} - 1$$

gleich 180° und in einer Capillarröhre die freie Oberfläche stark convex. Die Contactflächenarbeit hat dann ihren höchsten negativen Werth. Mit wachsender Adhäsion wird die negative Contactflächenarbeit immer kleiner, der Randwinkel ebenfalls immer kleiner, die freie Oberfläche immer flacher. Wenn die Adhäsionsarbeit a_a die Hälfte der Cohäsionsarbeit a_c ist, dann ist die freie Oberfläche eben, der Randwinkel gleich 90° und die Contactflächenarbeit gleich Null. Bei noch weiter wachsender Adhäsion wird die freie Oberfläche immer concaver, die Contactflächenarbeit aber positiv und immer grösser. — Wenn nun in einer Capillarröhre Flüssigkeit verdampft, dann sinkt der Spiegel, und die Contactfläche verschwindet. Wenn v das Volumen der verdampfenden Masse m ist, dann ist $v = r^2\pi h$, wobei r der Radius der Capillarröhre, h die Höhe der verdampfenden Flüssigkeitssäule ist.

1) Siehe „Ueber den Randwinkel einander berührender Flüssigkeiten". Annalen d. Phys. u. Chem. (1886).

Die hierbei verschwindende Contactfläche ist $o = 2r\pi h$. Hieraus ergibt sich, wenn man beide Ausdrücke nach r differentiirt und durcheinander dividirt

$$\frac{do}{dv} = \frac{1}{r}$$

d. h. je enger die Capillarröhre ist, um so mehr Contactfläche verschwindet, wenn das Flüssigkeitsvolumen dv verdampft. Wenn die freie Oberfläche convex ist, ist bei Verdampfung von m durch Contactflächenverkleinerung die positive Arbeit $+ e_o$ gewonnen worden, und wir haben als Summe der Arbeiten

$$+ e_o + e_w - e_c - e_p = 0$$

was genau wie im ersten Beispiel auf eine Erhöhung des Dampfdruckes hinweist. Wenn hingegen die freie Oberfläche concav ist, durch Verdampfung von Flüssigkeit und Verkleinerung der Contactfläche also negative Arbeit geleistet wird, dann gilt nach dem Stirnsatze für den gesättigten Dampf

$$+ e_w - e_c - e_p - e_o = 0.$$

Da der positiven Arbeit ϱ_w dann drei negative Arbeiten entgegenstehen, muss nothwendig die Spannung des gesättigten Dampfes eine kleinere sein, als wenn e_o nicht vorhanden wäre. Auch hier sind Theorie und Erfahrung im Einklange.

Wir können somit zusammenfassend sagen: Aus dem Satze, dass im Falle gesättigten Dampfes die Summe der geleisteten Arbeiten gleich Null sein muss, folgt abnorm hoher Dampfdruck für den Fall, dass beim Verdampfungsact ausser der calorischen Expansion noch eine andere positive Arbeit geleistet wird, und abnorm tiefer Dampfdruck für den Fall, dass beim Verdampfungsact ausser der Ueberwindung von Cohäsion und äusserem Druck (Dampfdruck) noch eine andere negative Arbeit geleistet wird, oder kurz: Abnorme Dampfdichte ist die Consequenz von accessorischen Arbeiten.

Wir haben bisher die Abnormität im Dampfdruck postulirt, aber wir haben nicht einmal angedeutet, wie die accessorische Arbeit (z. B. Oberflächenverkleinerung) mit der Verdampfungsarbeit zusammenhängen kann. Dies wollen wir kurz für verdampfende Tropfen thun; die anderen Fälle lassen sich dann leicht per analogiam behandeln.

Ein Molekül in der Oberflächenhaut liegt im Attractionsbereich von viel weniger Molekülen, als ein Molekül im Inneren der Flüssigkeit. Bei der Auflösung der Oberflächenhaut in Dampf braucht man also auch jedes Molekül dem Attractionsbereiche von viel weniger Molekülen zu entreissen, als wenn Binnenflüssigkeit verdampfte. Nun ist es aber offenbar nicht möglich, die Oberflächenhaut verdampfen zu

lassen, ohne gleichzeitig eine neue Oberflächenhaut zu bilden. Wenn wir also einerseits einen Arbeitsgewinn erzielen, indem wir statt Binnenflüssigkeit Oberflächenflüssigkeit verdampfen lassen, so resultirt gleichzeitig ein Arbeitsverlust durch die Bildung einer neuen Oberfläche. Wenn nun die neugebildete Oberfläche ebenso gross ist, wie die alte war, dann verlieren wir durch Neubildung der Oberflächenhaut genau soviel Arbeit, als wir gewonnen haben, indem wir Oberflächenflüssigkeit statt Binnenflüssigkeit verdampft haben, und daraus folgt, dass wir effectiv bei Oberflächenhautverdampfung genau dieselbe Arbeit zu leisten haben, als wenn wir mit Ueberspringung der Oberflächenhaut Binnenflüssigkeit hätten verdampfen lassen. Nun ist aber bei Verdampfung eines Tropfens die neue Haut kleiner, als die verdampfte Haut war; zur Neubildung brauchen wir also weniger Arbeit, als wir gewonnen haben, als wir statt Binnenflüssigkeit Oberflächenhaut verdampfen liessen. Die Oberflächenverdampfung bietet also bei Tropfen einen positiven Arbeitsgewinn.

Meines Wissens wird bis heute die Abnormität der Dampfdichte bei nicht ebenen Verdampfungsflächen lediglich aus der geometrischen Form der Oberfläche abgeleitet. Stefan macht darauf aufmerksam, dass ein Oberflächenmolekül einer convexen Flüssigkeit in den Bereich von weniger Molekülen, in der Oberflächenhaut einer concaven Flüssigkeit aber in den Attractionsbereich von mehr Molekülen fällt, als wenn es in der Oberhaut einer ebenen Flüssigkeit läge. Einer convexen Flüssigkeit das Molekül zu entreissen erfordert also weniger, einer concaven Flüssigkeit dasselbe zu entreissen erfordert aber mehr Arbeit, als wenn es in einer ebenen Flüssigkeit sich befände. Vorausgesetzt ist hierbei, dass es in allen drei Fällen in gleicher kleiner Tiefe unter der Oberfläche oder aber in der Oberfläche selber liegt. Hieraus resultirt für Convexität der Oberfläche eine grössere, für Concavität der Oberfläche aber eine kleinere Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül in den Dampfraum geschleudert wird, bei ebener Oberfläche. Der wesentliche Unterschied zwischen unserer Arbeitstheorie und anderen geometrischen Theorien liegt also darin, dass wir behaupten, eine abnorme Dampfdichte sei nur dann möglich, wenn eine accessorische Arbeit geleistet wird, während die geometrische Theorie eine accessorische Arbeit nicht verlangt. Welche Ansicht die richtige ist, liesse sich entscheiden, wenn man die Einrichtung träfe, dass derselbe gekrümmte Verdampfungsspiegel einmal mit, einmal ohne accessorische Arbeit dampft. Allerdings ist die Elimination aller accessorischen Arbeiten (da ja beispielsweise auch die Condensation des Dampfes an den Gefässwänden in Rechnung käme, sowie der Um-

stand, ob der Dampf oberhalb oder unterhalb der Flüssigkeit sich bildet, da ja das Aufsteigen oder Niedersinken des Dampfes ebenfalls accessorische Arbeiten sind) sehr schwer.

Wir haben bisher gezeigt, dass unser Stirnsatz 1 brauchbar ist, aber wir haben ihn nicht motivirt. Zum Schluss des folgenden Abschnittes wird er aber als natürliche Consequenz eines weit einfacheren und selbstverständlicheren Axiomes erscheinen.

2.

Ein zweiter Satz, der uns die Veranschaulichung des Verdampfungsvorganges sehr erleichtert, lautet: Ein Gas, mag es nun als Dampf oder als Flüssigkeit condensirt vorliegen, ist im Gleichgewicht, d. h. es expandirt sich nirgends und es contrahirt sich nirgends, wenn an jeder Stelle die Summe der Spannungen gleich Null ist (oder, was dasselbe ist, wenn die effective Expansionsspannung überall gleich ist dem Drucke der Gefässwand).

Auch dieser Satz bedarf der Erläuterung. Wenn eine Flüssigkeit gar keiner äusseren Kraft ausgesetzt ist, dann sagt man schlechthin, dass in ihr kein Druck herrscht. Strenger genommen ist dies nicht wahr. Infolge der Cohäsionskraft wollen nämlich die Moleküle sich einander nähern, d. h. es existirt contractive oder negative Spannung. Infolge der Wärmebewegungen hingegen wollen die Moleküle auseinanderrücken, d. h. es besteht expansive oder positive Spannung. Diese beiden Spannungen, die moleculare und die calorische, sind in der freien Flüssigkeit gleich und entgegengesetzt, d. h. die Summe der Spannungen ist gleich Null. In der Rechnung kann man die beiden Spannungen sich so versinnlichen, dass man annimmt, dass je zwei parallele, unendlich nahe Flüssigkeitsschichten sich molecular anziehen, vermöge der Wärmebewegung der Moleküle aber abstossen, und dass diese entgegengesetzten Kräfte per Flächeneinheit gleich, aber entgegengesetzt sind.

Betrachten wir nun ein Gas, in dem wir keinerlei Molecularattraction annehmen, und welches auf die Gefässwand vermöge der calorischen Molecularbewegung den Druck p per Flächeneinheit ausübt. Lässt sich hier der Satz, dass die Summe der Spannungen gleich Null ist, anwenden, da doch augenscheinlich nur eine expansive Spannung im Gase vorhanden ist? Man könnte über diese Frage recht schöne, aber recht unfruchtbare Wortgefechte führen. Am besten sagen wir vielleicht: der beschränkende, die Expansion verhindernde Einfluss der Gefässwand kann durch eine fictive Contractionsspannung substitutionsweise erklärt werden. Wir können also sagen, dass je zwei unendlich nahe, parallele Schichten per Flächeneinheit

sich vermöge der calorischen Spannung mit der Kraft p voneinander zu trennen trachten, während die fictive Spannung die Schichten mit derselben Kraft einander zu nähern strebt. Wenn wir diese Fiction annehmen, können wir abermals sagen, dass die Summe der Spannungen gleich Null ist.

Betrachten wir nun eine Flüssigkeit, welche den äusseren Druck p erleidet. Es ist nun ein psychologisches Curiosum, dass wir es hier ganz offenbar finden, dass der äussere Druck eine contractive Spannung erzeugt, vermöge deren je zwei benachbarte Schichten sich einander zu nähern trachten oder, wenn man will, gegeneinander gepresst werden; dass dieselbe aber aufgehoben wird durch eine expansive Spannung, welche durch die Compression der Flüssigkeit erweckt worden ist. (Diese expansive Spannung ist der Ueberschuss der calorischen Expansion über die Molecularcontraction, wie wir sofort näher betrachten wollen.) Bei einem Gase kommt es uns aber so gesucht vor, wenn wir vollkommen analog sagen, der äussere Druck d. i. der Wanddruck erzeugt im Inneren des Gases eine negative Spannung, welche durch die calorische positive Spannung aufgehoben wird. In der comprimirten Flüssigkeit können wir aber wieder sagen, dass die Summe der Spannungen gleich Null ist.

Mit Van der Waals können wir nun folgende sehr klare und sehr plausible Annahmen machen:

1. Die Moleküle eines Gases (etwa des Oxygens, oder der Kohlensäure etc.) besitzen Cohäsion, d. h. jedes Molekül wirkt auf die gleichartigen Moleküle seiner Umgebung anziehend, und zwar mit einer Intensität k, welche eine Function der Entfernung r ist, dass also $k = f(r)$ ist. Hierbei empfiehlt sich die Annahme, dass diese Kraft jenseits einer gewissen kleinen Entfernung r_1 unmerklich wird, dass innerhalb dieser Entfernung aber bei einer Flüssigkeit sich sehr viele Moleküle befinden. Ferner haben wir keine Ursache anzunehmen, dass diese Kraft irgend eine Aenderung erleidet, wenn die Moleküle bei constanter Temperatur einander näher gebracht oder aber auseinander gerückt werden, vorausgesetzt, dass die Moleküle selber hierbei keine Aenderung erleiden. Mit anderen Worten heisst dies, dass wir die Cohäsion im Dampfe ebenso wirksam denken, wie in der Flüssigkeit, vorausgesetzt, dass die Moleküle bei der Condensation des Dampfes, resp. bei der Verdampfung der Flüssigkeit keinerlei Aenderung erleiden. Wir können sogar versuchsweise annehmen, dass die Attractionskraft von der Temperatur unabhängig ist.

2. Eine abstossende Molecularkraft gibt es nicht; was in einer Flüssigkeit verhindert, dass die Moleküle infolge der Attraction in eine

compacte Masse zusammenfallen, ist lediglich dieselbe calorische Expansion, welche auch die Dämpfe zur Expansion bringt.

Nach diesen Entwicklungen ist nach Van der Waals zwischen einem Dampfe und der betreffenden Flüssigkeit kein anderer Unterschied, als dass dort die Moleküle minder dicht, hier dichter gedrängt liegen.

Unseren zweiten Hauptsatz können wir nun folgendermaassen präciser aussprechen: Ein Gas ist im Gleichgewicht, wenn die Kraft, mit der sich je zwei benachbarte Schichten infolge der Wärmebewegungen voneinander trennen wollen, gleich ist der Summe der Kraft, mit der sich die Schichten infolge der Cohäsion zu nähern trachten, und der Kraft, mit der sie der äussere Druck gegeneinander treibt. Wir unterscheiden also in einem Gase, das sich in einem geschlossenen Gefässe befindet, drei Spannungen: die calorische positive Expansionsspannung $+p_w$, die negative moleculare Cohäsionsspannung $-p_c$, und die fictive negative Druckspannung $-p_e$, und das Gas ist im Gleichgewichte, wenn für jedes Niveau, also sowohl in der Flüssigkeit, als auch im Dampfe die Bedingung erfüllt ist

$$+p_w - p_c - p_e = 0. \qquad (2$$

Wir können ganz denselben Gedanken mit anderen Worten auch so ausdrücken: Der Ueberschuss der calorischen Expansion über der Molecularcontraction muss in jedem Niveau gleich sein dem Wanddrucke p_e oder

$$+p_w - p_c = p_e.$$

Wir gehen nun an die nähere Bestimmung der beiden Spannungen p_w und p_c. Wenn man das Volumen der Dampfmoleküle sehr klein annimmt, so ist nach dem Mariotte'schen Gesetze $p_w = \frac{a}{v}$, wobei v das Volumen der Masseneinheit des Gases bedeutet. Nun ist es aber klar, dass die Moleküle doch irgend ein Volumen besitzen müssen. Sobald sie aber soweit zusammengedrängt sind, dass sie einander fast berühren, muss der Druck an die Gefässwand ein nahezu unendlicher werden, weil dann die mittlere Wegelänge der Moleküle eine fast unendlich kleine wird und die Stösse an die Wand also sehr schnell nacheinander erfolgen. Diesem Umstande tragen wir in der einfachsten Weise Rechnung, wenn wir in p_w im Nenner das v durch $v - b$ ersetzen, wobei b das Volumen der Masseneinheit des Gases bedeutet, wenn die Moleküle einander berühren, wie die Erbsen im Sacke. Glücklicherweise lässt sich diese einfache Correctur des Mariotte'schen Gesetzes auch theoretisch sehr gut motiviren; Van der Waals nimmt thatsächlich bei den Gasen sowohl in Flüssigkeits- als in Dampfform

dieses Gesetz der calorischen Expansion an, und wir thun dasselbe und schreiben

$$p_w = \frac{at}{v-b}$$

indem wir das Gay-Lussac'sche Gesetz miteinbeziehen. Weit weniger einfach gestaltet sich die Ableitung des Gesetzes der molecularen Spannung p_c. Van der Waals setzt $p_c = \frac{c}{v^2}$, wobei c eine Constante ist, während v wieder das Volumen der Masseneinheit des Gases ist. Dieses Gesetz ist alt; es gilt aber nur für Medien, die innerhalb der Wirkungsweite eines Moleküles überall gleiche Dichte haben; es gilt also weder im Dampfe, noch in der Flüssigkeit in der Region der Flüssigkeitsoberfläche, da in derselben, wie man annimmt, eine Discontinuität der Dichte stattfindet. Wir wollen daher eine neue, tiefer greifende Ableitung der Cohäsionsspannung, oder wie man auch sagen kann: des Binnendruckes nach der Cohäsion versuchen.

Betrachten wir eine Flüssigkeit (Fig. 1), deren Dichte von Stelle zu Stelle wechselt. Dieselbe lässt sich in unendlich dünne Schichten von constanter Dichte zerlegen. In der Schicht nn' herrsche die Dichte ϱ, so dass im Volumelement dv die Masse $m = \varrho\, dv$ enthalten ist. Abseits, wo die Dichte gleich ϱ' ist, befinde sich ein Volumelement dv', welches die Masse $\varrho'\, dv'$ umschliesst. Die Moleküle der Flüssigkeit sollen nun nur mit Elementarkräften begabt sein, welche lediglich in der unendlich kleinen Amplitude dr von der Entfernung r bis $r + dr$, und zwar mit der constanten Intensität $k_r = f(r)$ anziehend wirken. Die wirkliche Anziehungskraft kann man dann als eine Summe unendlich vieler ineinander geschachtelter solcher Elementarkräfte auffassen. Welchen Binnendruck wird nun $\varrho'\, dv'$ in dv vermöge seiner Elementarkraft erzeugen?

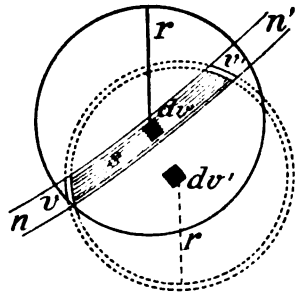


Fig. 1.

Wir können uns die Lamelle nn' zwischen zwei parallele, feste Wände gebettet denken, da sie ja doch so liegt, wie sie liegt, und alles, was sich nicht ändert, auch fest gedacht werden kann. Das Element $m' = \varrho'\, dv'$ wirkt dann innerhalb nn' anziehend auf einen Flüssigkeitsring vv'[1]) von der Dicke dr, und dieser Ring wirkt auf die eingeschlossene Flüssigkeitskappe s per Flächeneinheit mit dem Drucke $m' \times 1\, \varrho\, dr \times f(r)$. (Hier ist unter $1\, \varrho\, dr$ die Masse eines Elementes des Druckringes von der Dicke dr und der Basis $= 1$ zu verstehen.)

1) Die Figur zeigt infolge eines kleinen Versehens vv'.

In ähnlicher Weise druckerzeugend wirken aber alle Massenelemente der Flüssigkeit, welche innerhalb einer von dv aus mit dem Radius r gezogenen Kugel liegen. Die Summe der erzeugten Drucke ist also $\Sigma\, m'\, \varrho\, k_r\, dr = \varrho\, k_r\, \Sigma m'$. Da aber $\Sigma m'$ nichts anderes ist, als die Masse M der Flüssigkeit, die von der Kugel umschlossen wird, welche von dv aus mit dem Radius r gezogen wird, so ist der Binnendruck in dv offenbar auch $\varrho\, M\, k_r\, dr$. (Es verdient bemerkt zu werden, dass derselbe Ausdruck auch die Arbeit bedeutet, welche geleistet wird, wenn die Masse M von aussen in das Innere der Attractionssphäre der in einem Punkt concentrirt gedachten Masse ϱ [d. i. der Masse, die bei der Dichte ϱ in der Volumeinheit enthalten ist] eintritt.) In unserer Rechnung haben wir aber den Fehler gemacht, die Anziehung je zweier Volumelemente doppelt zu zählen, indem einmal das eine, ein andermal das andere Element als anziehendes genommen worden ist. Das richtige Resultat ist also die Hälfte des obigen, oder

$$p_o = \frac{1}{2}\varrho\, M\, k_r\, dr. \qquad (3$$

Wenn wir das Medium homogen sein lassen, dann ist $M = \frac{2}{3} r^3 \pi$, also

$$p_o = \frac{2}{3}\pi\, \varrho^2\, r^3\, k_r\, dr.$$

Wenn wir die Wirkung aller Elementarkräfte zusammenfassen, welche vereint die wirkliche Molecularkraft bilden, dann ist

$$p_o = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2}{3}\pi\, \varrho^2\, r^3\, k_r\, dr = \frac{2}{3}\pi\varrho^2 \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^3\, f(r)\, dr$$

wobei r_1 und r_2 die Grenzen bedeutet, innerhalb deren die Molecularkräfte wirken. Theoretisch ist $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$. Diesen Werth des Binnendruckes verwendet Van der Waals, indem er ϱ durch $\frac{1}{v}$ und

$$\frac{2}{3}\pi \int_{r_1}^{r_2} r^3\, (fr)\, dv$$

durch c ersetzt.

Möge es gestattet sein, hier einige Bemerkungen einzuschalten. Die Formel zeigt, dass das Gesetz der Molecularkraft nicht den mindesten Einfluss auf den Binnendruck bei verschiedenen Dichten ausübt, sobald die Kraft sich über sehr viele Moleküle erstreckt. Die Intensität der Kraft kann sogar über grössere Strecken negativ, d. h. die Kraft eine abstossende sein, ohne dass das eine andere Wirkung hätte, als dass der Binnendruck hierdurch kleiner würde. Eine zweite

Bemerkung ist die, dass der Ausdruck $\frac{2}{3}\pi\varrho^2 r^3 k_r\, dr$ beweist, dass die Intensität der Attraction unter allen Factoren den mindesten Einfluss auf den Binnendruck hat, denn k_r steht nur in der ersten Potenz. Weit mehr hängt der Binnendruck von der Dichte ϱ ab, da diese im Quadrat vorkommt. Am maassgebendsten für den Binnendruck ist aber die Entfernung, auf die eine Elementarkraft wirkt, denn r steht in der dritten Potenz. Endlich sei darauf hingewiesen, dass die Molecularattraction mit der Entfernung überaus rasch abnehmen muss, da selbst für $k_r = \frac{e}{r^3}$ der Binnendruck noch unendlich gross wird.

Gehen wir nun auf die Betrachtung nicht homogener Medien über. Die Schichten constanter Dichte sollen horizontal verlaufen (Fig. 2), und die Dichte ϱ mit der Höhe z sich continuirlich ändern. Wenn

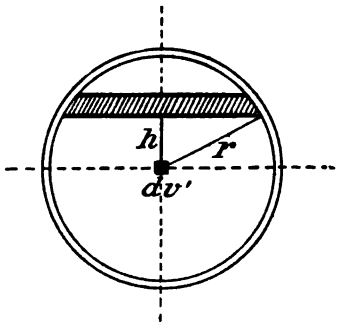


Fig. 2.

die Dichte also in einem gewissen Punkte m gleich ϱ ist, dann ist sie in der verticalen Entfernung h nach dem Taylor'schen Satze

$$\varrho_1 = \varrho + h\frac{d\varrho}{dz} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2\varrho}{dz^2} + \frac{1}{2\cdot 3}h^3\frac{d^3\varrho}{dz^3} + \ldots$$

$$= \varrho + h\varrho' + \frac{1}{2}h^2\varrho'' + \frac{1}{2\cdot 3}h^3\varrho''' + \ldots$$

Um den Druck zu erfahren, der in m herrscht, müssen wir die Flüssigkeitsmasse M berechnen, welche in einer um m geschlagenen Kugel vom Radius r enthalten ist. Dies geschieht folgendermassen. Eine Scheibe in der Höhe h von der Dicke dh hat das Volumen $(r^2 - h^2)\pi\, dh$; sie enthält die Masse $\varrho_1(r^2 - h^2)\pi\, dh$, und wenn wir für ϱ_1 seinen obigen Werth einsetzen und von $h = -r$ bis $h = +r$ integriren, finden wir als Masse M

$$M = \frac{4}{1\cdot 3}\pi\varrho r^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3\cdot 5}\pi\varrho'' r^5 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{4}{5\cdot 7}\pi\varrho'''' r^7 + \ldots$$

Dies eingesetzt finden wir für den Binnendruck in m den Werth

$$p_c = \frac{2}{3}\pi\varrho^2 r^3 k\,dr + \frac{1}{15}\pi\varrho\varrho'' r^5 k\,dr + \ldots$$

Alle Elementarattractionen vereint geben dann einen Binnendruck, den man durch Integration von r_1 bis r_2 findet. Er ist

$$p_c = \frac{2}{3}\pi c_3\varrho^2 + \frac{1}{15}\pi c_5\varrho\varrho'' + \ldots \qquad (4$$

Hierbei bedeuten c_3 und c_5 die dritte und fünfte Molecularconstante der Flüssigkeit oder

$$c_3 = \int_n^n r^3 f(r)\,dr \qquad c_5 = \int_n^n r^5 f(r)\,dr.$$

Wenn wir die Niveauschichten der Dichte nicht ebene, sondern concentrische Kugelschalen sein lassen, und der Krümmungsradius ist in m gleich R, dann finden wir (da die Berechnung für unsere Zwecke keinen Werth hat, wollen wir sie überspringen)

$$p_c = \frac{2}{3}\pi c_3\varrho^2 + \frac{2}{15}\pi c_5\frac{\varrho\varrho'}{R} + \frac{1}{15}\pi c_5\varrho\varrho'' + \ldots \qquad (5$$

Wir wollen bei ebenen Niveauflächen, also Formel 4 bleiben und dieselbe discutiren. Wenn die Dichte des Gases in einem geschlossenen Gefässe von Schichte zu Schichte wechselt, dann lässt sich eine Verticale als Abscissenaxe s zeichnen, auf der die Dichte ϱ der entsprechenden Höhe als horizontale Ordinate aufgetragen ist, dergestalt, dass wir eine Curve der Dichte erhalten. Unsere Formel besagt nun, dass der Binnendruck an einer bestimmten Stelle allerdings in erster Linie von der daselbst herrschenden Dichte ϱ abhängt; dieser Binnendruck lässt sich aber ohne Aenderung der Dichte ϱ sowohl erhöhen als erniedrigen, wenn wir der Dichtigkeitscurve an der betreffenden Stelle eine entsprechende convexe oder concave Krümmung geben. Convexität der Curve $\left(\text{negatives } \frac{d^2\varrho}{ds^2}\right)$ erniedrigt den Binnendruck, während Concavität der Curve (positives ϱ'') den Binnendrnck erhöht. (Das Gefälle der Dichtigkeitscurve $\frac{d\varrho}{ds}$ hat keinen Einfluss auf den Binnendruck; ϱ' kommt in der Formel nicht vor). Diese Variationsfähigkeit des Binnendruckes bei constanter Dichte ϱ ist von Van der Waals nicht erörtert worden.

Der Satz, dass die Summe der Spannungen in jedem Niveau gleich Null sein muss, oder dass

$$p_w - p_c - p_a = 0$$

ist, wird durch Van der Waals folgendermaassen formulirt

$$\frac{at}{v-b} - \frac{c}{v^2} - p_e = 0. \qquad (6$$

Hier bedeutet v das Volumen der Masseneinheit des Gases; das erste Glied drückt die calorische Expansion aus, ist also das rectificirte Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz; das zweite Glied ist die moleculare Contractionsspannung; das dritte Glied ist der äussere Druck (oder die fictive substituirende negative Spannung). Die Gleichung ist vom dritten Grade, und hat für genügend kleine Temperaturen t drei reelle Wurzeln, d. h. es gibt drei Volumina, die die Masseneinheit des Gases bei homogener Vertheilung annehmen kann, bei denen sie den Wanddruck p_e ausübt; beim kleinsten Volumen erscheint nach Van der Waals die Masse als Flüssigkeit, beim grössten als Dampf. Die Discussion der Gleichung wird aber durch eine graphische Darstellung wesentlich erleichtert, und wir wollen sie versuchen.

Die Abscissen x drücken (Fig. 3) das Volumen aus, welches die Masseneinheit unseres Gases in einem gewissen Falle in homogener

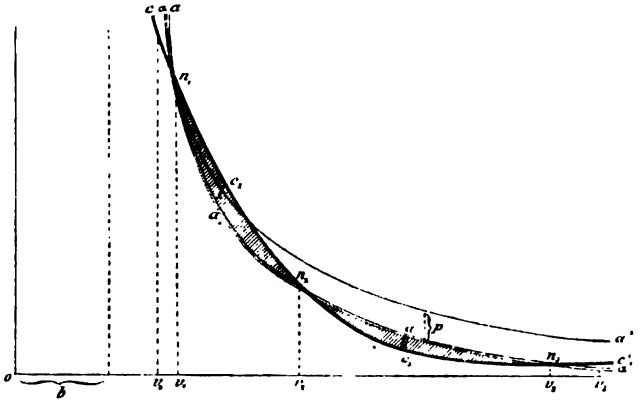


Fig. 3.

Vertheilung ausfüllt. Die dünn, einfach gezeichnete Curve aa' liefert zu jedem Volumen v die entsprechende calorische Expansion pw nach der Formel $pw = \frac{at}{V-b}$, wobei t constant angesehen ist. Die Curve ist eine Hyperbel mit den Asymptoten $x = b$ und $y = o$. Die stark ausgezogene Curve liefert für jedes Volumen den Binnendruck nach der Formel $p_e = \frac{c}{v^2}$, auch diese Curve ist eine Art Hyperbel mit den Asymptoten $x = o$ und $y = o$. Wenn die erste Curve aa' tief genug liegt (was bei kleinem t der Fall ist), dann geben die beiden Curven

notwendig zwei Schnittpunkte. Lassen wir nämlich irgendwo die Curve cc' oberhalb der Curve aa' liegen. Dann muss sie nothwendig bei kleinerem Volumen unterhalb der Curve geraten, weil für $v = b$ die Expansion pw bereits $= \infty$ ist, während die Contraction p_c erst für $v = o$ gleich ∞ wird. Ebenso muss bei grösserem Volumen cc' unter aa' zu liegen kommen, da die Contraction nach der zweiten Potenz von v abnimmt, während die Expansion nur ungefähr nach der ersten Potenz schwindet; erstere muss also bei grossem v nothwendig kleiner werden als letztere.

Die Formel verlangt, dass der äussere Druck p_e gleich der Differenz von Expansion und Contraction sei. Die entsprechende Volumina finden wir, indem wir die Curve aa' um p_e nach unten verschieben, wie sie in der Fig. 3 doppelt gezeichnet erscheint. Durch diese Verschiebung rücken die beiden früheren Schnittpunkte auseinander, und es muss sich nothwendig ein dritter Schnittpunkt jenseits der zweiten ergeben. Es muss nämlich bei grossem v wieder cc' oberhalb $\alpha\alpha'$ zu liegen kommen, da die Asymptote von cc' bei $y = o$, die Asymtote von $\alpha\alpha'$ aber bei $y = -p_e$ liegt. Wir erhalten somit drei Volumina v_1, v_2 und v_3, bei denen die Molecularcontraction gleich ist der um p_e verminderten calorischen Expansion, oder wo die Summe der Spannungen gleich Null ist.

Lassen wir nun, um einen noch klareren Einblick zu gewinnen, eine Masseneinheit des Gases bei stets homogener Vertheilung allmählich vom Volumen $v_4 < v_1$ bis zum Volumen $v_5 > v_3$ sich bei constanter Temperatur expandiren (praktisch ist dies nicht möglich). Hierbei wird, wie wir eben gesehen haben, der Wanddruck nur dreimal, nämlich bei v_1, v_2 und v_3, den Werth p_e erhalten. Wenn wir den Verlauf der Curven recht discutiren, finden wir, dass die Differenz von calorischer Expansion und molecularer Contraction, d. i. also der Wanddruck, von v_4 bis v_1 grösser ist als p_e. Von v_1 an sinkt er immer tiefer unter p_e, um sich bei v_2 wieder auf p_e zu erheben. Von hier an steigt der Wanddruck wieder über p_e und senkt sich bei v_3 wieder auf p_e. Jenseits p_e bleibt er constant kleiner als p_e.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir einen Cylinder, dessen ohne Reibung beweglicher Kolben so schwer ist, dass er per Flächeneinheit nach unten den Druck p_e ausübt. Im Innern des Cylinders befindet sich ein nicht homogenes Gas, das an verschiedenen Stellen alle möglichen Dichten von $\varrho_4 = \frac{1}{v_4}$ bis $\varrho_5 = \frac{1}{v_5}$ besitzt. Was wird nun geschehen? Wenn wir im Sinne von Van der Waals antworten wollen, müssen wir die Molecularcontraction als unabhängig von den Krümmungen der Dichtigkeitscurven ansehen. (Die Dichtigkeitscurven

beziehen sich natürlich auf die orthogonalen Trajectorien der Niveauschichten gleicher Dichte.) Unter dieser Voraussetzung kommen wir zu dem Resultate, dass das Gas sich in Flüssigkeitsmassen von der Dichte $\varrho_1 = \frac{1}{v_1}$ und in Dampfmassen von der Dichte $\varrho_3 = \frac{1}{v_3}$ scheiden wird, und dass alle anderen Dichten verschwinden werden. Insbesondere werden alle Gasmengen, welche eine Dichte zwischen ϱ_4 und ϱ_3 besitzen, zu homogener Flüssigkeit, während alle Gasmassen, deren Dichte zwischen ϱ_1 und ϱ_5 liegt, sich in homogenen Dampf verwandeln. Was nämlich eine Dichte zwischen ϱ_4 und ϱ_1 hat, übt einen Druck auf die Umgebung aus, der grösser ist als p_e. Da der Kolben aber nur den Druck p_e erzeugt, so werden jene Massen sich bis auf v_1 expandiren, wo der Druck gleich p_e ist. Umgekehrt üben alle Massen, deren Dichte zwischen ϱ_1 und ϱ_3 liegt, einen kleineren Druck als p_e auf die Umgebung aus, was zur Folge hat, dass sie durch den vom Kolben erzeugten Druck p_e der Umgebung comprimirt werden, bis sie bei v_1 angekommen sind, worauf Gleichgewicht zwischen Druck und Gegendruck herrscht. Ganz ähnlich finden wir, dass alles, was eine Dichte zwischen ϱ_2 und ϱ_3 besitzt, sich wegen überwiegender Expansion auf ϱ_3 expandirt, was aber eine Dichte zwischen ϱ_2 und ϱ_5 hat, auf ϱ_5 condensirt wird. Wir können aber kurz sagen: Die Dichten grösser als ϱ_3 gravitiren nach ϱ_1; die Dichten kleiner als ϱ_1 gravitiren nach ϱ_3. Aus dieser Entwicklung folgt, dass (falls die Flüssigkeit schwer ist und sich zu Boden setzt) (Fig. 4) die Dichtigkeitscurve die Form n_1, n_2, n_3, n_4 besitzt, d. h. dass die Dichte nur die zwei Werthe ϱ_1 und ϱ_3 besitzen kann, und dass im Niveau der Oberfläche der Flüssigkeit die Curve eine Discontinuität $n_2 - n_3$ besitzt.

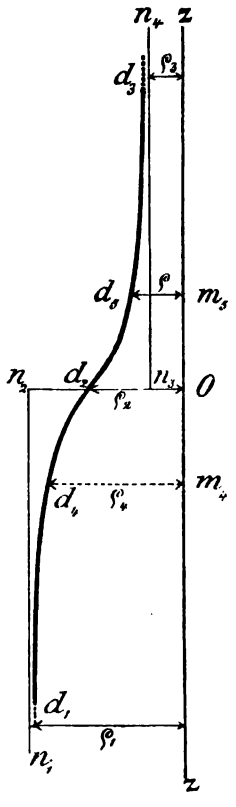


Fig. 4.

Ein ganz abweichendes Resultat finden wir, wenn wir abweichend von der Van der Waals'schen Formel auch den Einfluss der Krümmung der Dichtigkeitscurve auf den Binnendruck in Betracht ziehen.

Selbst ohne diese Rechnung ist es aus der gebräuchlichen Capillaritätstheorie bekannt, dass der Binnendruck in der Oberflächenhaut geringer ist, als in der Binnenflüssigkeit, und dass infolgedessen die Oberflächenhaut sich auflockert, weniger dicht wird. Andrerseits ist es nicht gut einzusehen, warum

der Dampf sich an allerlei Gefässwänden, nur nicht an der Oberfläche der Flüssigkeit selber verdichten sollte. Wenn man noch ferner die Rückwirkung der Dichteänderungen in der Nähe der Oberfläche auf entferntere Regionen in Betracht zieht, dann erkennt man bald, dass die Dichtigkeitscurve etwa die Form d_1, d_4, d_2, d_5, d_3 (Fig. 4) annehmen muss.

Wir wollen diese Curve näher discutiren. Wir haben gesehen, dass ein homogenes Gas nur bei drei Dichtigkeiten ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 den Druck p_e ausüben kann. Eine Dichtigkeit ϱ_4, die zwischen ϱ_1 und ϱ_2 liegt und die hierbei den Druck p_e ergibt, ist also in einem homogenen Gase nicht möglich. Die Fig. 3 zeigt, dass bei der Dichte ϱ_4 ein homogenes Gas einen Druck ausübt, der kleiner ist, als p_e. Nun zeigt aber die Figur, dass eben dort die Dichtigkeitscurve convex verläuft. Dies hat eine Verminderung der Molecularcontraction, also eine Erhöhung des effectiven Expansionsdruckes zur Folge, und wir können uns leicht denken, dass diese Erhöhung gross genug ist, um den effectiven Aussendruck auf p_e zu erheben. Im allgemeinen ist keine Dichte zwischen ϱ_1 und ϱ_2 in einem homogenen Medium möglich, weil, wie Fig. 3 zeigt, der Aussendruck immer zu klein ausfällt; andrerseits ist aber überall unterhalb der Oberfläche O die Curve convex, wodurch die Molecularcontraction vermindert, also der Aussendruck erhöht wird. Umgekehrt verhält es sich im Dampfe. Die Fig. 3 zeigt, dass in einem homogenen Gase eine Dichte zwischen ϱ_1 und ϱ_3 praktisch nicht möglich ist in einem Gefässe, dessen Kolben den Druck p_e ausübt, weil bei allen zwischen jenen Grenzen liegenden Dichten das Gas einen Druck grösser als p_e ausübt. Nun verläuft aber oberhalb O die Curve durchwegs concav, d. h. durchwegs wird die Molecularcontraction erhöht, also der effective Aussendruck erniedrigt, und bei geeigneter Krümmung der Curve kann der effective Druck thatsächlich überall gleich p_e sein.

Diese allgemeine Erörterung zeigt, dass das Gas nur dann in einem Gefässe, dessen Kolben den Druck p_e per Flächeneinheit ausübt, theils als Flüssigkeit, theils als Dampf bestehen kann, wenn die Dichtigkeitscurve in der Oberflächengegend böschungsartig gekrümmt ist und sich nach unten dem Werthe ϱ_1, nach oben dem Werthe ϱ_2 asymptotisch nähert. Als Oberfläche der Flüssigkeit ist dann diejenige Gasschichte anzusehen, wo das Gefälle der Curve ϱ' ein Maximum ist, d. h. die Schichte des Wendepunktes der Curve. Das Gas kann dann in jedem Niveau die effective Expansion $p_w - p_c = p_e$ zeigen, oder die Summe der Spannungen $p_w - p_c - p_e$ kann gleich Null sein.

In völliger Uebereinstimmung mit diesem Theorem zeigt die Erfahrung, dass thatsächlich in der Nähe der

Oberfläche die Flüssigkeit eine verminderte, der Dampf aber eine erhöhte Dichte zeigt.

Es ist interessant zu bemerken, dass die Dichtigkeitscurve in stabilem Gleichgewicht ist, d. h. wenn sie zerstört wird, sich automatisch reconstruirt. Lassen wir beispielsweise die Dichte im Niveau m_1 etwas zu klein werden, so dass die Curve dort sich abflacht oder geradezu concav wird. Die Folge ist eine sofortige Verstärkung der Molecularcontraction, also eine Verminderung der effectiven Expansion unter das Mass p_e, und die Schichte wird durch die Uebermacht des Kolbens comprimirt. Dann steigt aber die Dichte und die Curve macht sich wieder convex. Ist umgekehrt durch zu grosse Dichte bei m die Curve zu sehr convex geworden, dann ergibt sich hieraus eine Verminderung der Molecularcontraction, also eine Erhöhung der effectiven Expansion über den Betrag p_e. Die Flüssigkeit wird den Kolbendruck überwinden; sie wird hierdurch weniger dicht und die Curve flacht sich wieder ab. Eine ganz ähnliche selbstthätige Wiederherstellung der Curve finden wir auch im Dampfe.

Die Formel der Dichtigkeitscurve liesse sich nun folgendermassen berechnen. In der Van der Waals'schen Formel ersehen wir das Glied $p_c = \frac{c}{v^2}$ durch unseren allgemeineren Werth

$$p_c = \frac{2}{3}\pi c_3 \varrho^2 + \frac{1}{15}\pi c_5 \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varepsilon^2}.$$

Den Werth

$$p_w = \frac{at}{v-b}$$

schreiben wir lieber

$$p_w = \frac{at}{\frac{1}{\varrho} - b} = \frac{a\varrho t}{1-b\varrho}.$$

Dann können wir statt $p_w - p_c - p_e = 0$ genauer schreiben

$$\frac{a\varrho t}{1-b\varrho} - \frac{2}{3}\pi c_3 \varrho^2 + \frac{1}{15}\pi c_5 \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varepsilon^2} - p_e = 0.$$

Durch Integration dieser Differentialgleichung liesse sich nun eine Gleichung zwischen den Variablen ε und ϱ ableiten, welche für jedes Niveau auch die entsprechende Dichte ϱ des Gases liefert. Wenn wir O als Coordinatenursprung nehmen, dann müssten wir aus dieser Formel für ein bestimmtes t und einen bestimmten Wanddruck p_e auch die Dichte der Flüssigkeit und des eventuell möglichen Dampfes in jedem Niveau ausrechnen können.

Wenn wir diesen Gedanken weiter verfolgen, geraten wir leicht in ein arges Gewirre, wie ja bereits aus dem auffallenden Umstande erhellt, dass man zu der Temperatur auch noch den Dampfdruck soll frei wählen können. Allerdings lässt sich nachweisen, dass wir auf keine Wiedersprüche stossen werden; wohl aber kommen wir auf Resultate, die den praktischen Verhältnissen so ferne liegen, die praktisch so unrealisirbar sind, dass wir lieber verzichten, auf diesem Wege ein Gesetz der Dampfdichten zu finden, und uns nach einem praktikableren Wege umschauen. Wir finden ihn leicht.

Der Satz, dass das Gas im Gleichgewicht ist, wenn die Summe der Spannungen überall gleich Null ist (oder was dasselbe sagt: wenn die effective Expansionsspannung überall gleich dem Wanddrucke ist), ist wohl somit plausibel gemacht. Es lässt sich nun zeigen, dass unser Stirnsatz (dass der Dampf gesättigt ist, im Gase also Gleichgewicht herrscht, wenn durch Verdampfung keine Arbeit geleistet wird) eine Consequenz des obigen Satzes $\Sigma p = 0$ ist.

Denken wir uns nemlich ein Massenelement der Flüssigkeit tief unter der Oberfläche, wo $\varrho = \varrho_1$ genommen werden kann. Wenn wir dieses Element nun allmählich nach oben heben, dann wird die Cohäsionsspannung immer kleiner, weil die Dichtigkeitscurve convex verläuft; das Massenelement wird sich folglich expandiren und überall die Dichte seiner Umgebung annehmen. Wenn das Element endlich hoch oben im Dampfe angekommen ist, dann hat es sich in Dampf aufgelöst. Offenbar ist aber während dieses ganzen Processes keine Arbeit geleistet worden, da stets die Summe der Spannungen gleich Null war. Das Gaselement hat sich bei dieser Expansion wohl abgekühlt, und es hat Wärme aus der Umgebung aufgenommen: die Verdampfungswärme. Wir können also sagen:

Ein Gas ist im Gleichgewicht, d. h. es finden keine Dichtigkeitsänderungen statt, wenn die Summe der Spannungen in jedem Punkte gleich Null ist, oder mit anderen Worten: wenn der Ueberschuss der Expansionsspannung über die Contractionsspannung gleich ist dem Wanddrucke. (Diese Bedingung kann auch dann streng erfüllt sein, wenn das Gas im Gefässe theils als Flüssigkeit, theils als Dampf erscheint.)

Hieraus folgt:

Wenn im Gas Gleichgewicht herrscht, d. h. keine Dichtigkeitsänderungen mehr vor sich gehen, also keine Verdampfung mehr stattfindet und der Dampf gesättigt ist, dann würde bei der Verdampfung d eines Massenelementes der Flüssigkeit keine Arbeit geleistet; oder mit anderen Worten: die

positive Arbeit, welche das Massenelement bei seiner bei constanter Temperatur, also unter Wärmezufuhr erfolgenden Expansion leistet, gerade hinreichen, die Cohäsion der Flüssigkeit und den vorhandenen äusseren Druck (den Dampfdruck) zu überwinden.

3.

Wir greifen auf unseren Stirnsatz zurück, dass der Dampf dann gesättigt ist, wenn bei der Verdampfung einer Flüssigkeitsmenge m (oder wenn wir wollen: der Masseneinheit der Flüssigkeit, vorausgesetzt dass wir diese Einheit sehr klein wählen) keine Arbeit geleistet wird. Nun haben wir gesehen, dass das Gas, das unter dem Drucke p_s steht, als homogene Flüssigkeit nur in der Dichte ϱ_1 und als homogener Dampf nur in der Dichte ϱ_2 bestehen kann. Vollkommen werden diese Dichten in einem endlichen Gefässe allerdings weder in der Flüssigkeit, noch im Dampfe erreicht, weil, wie die Fig. 4 zeigt, die Dichtigkeitscurve sich diesen Werthen nur asymptotisch nähert. Wir begehen aber keinen merklichen Fehler, wenn wir annehmen, dass etwa $1\,dm$ tief unter der Oberfläche der Flüssigkeit wirklich die Dichte ϱ_1, eben so hoch über der Oberfläche aber der Dampf wirklich die Dichte ϱ_2 besitzt. Wenn nun die Masseneinheit verdampft, so hat sich nichts anderes geändert, als dass eine homogene Gasmenge von der Dichte ϱ_1 sich in wieder homogene Gasmenge von der Dichte ϱ_2 verwandelt hat. Wenn wir aber die hierbei geleisteten Arbeiten berechnen wollen, dann ist es bekanntlich völlig gleichgiltig, auf welchem Wege wir diese Umwandlung geschehend denken. Wir können also ruhig annehmen, dass die Gasmenge fortwährend homogen bleibt und sich dergestalt expandirt. Bei dieser Expansion werden nun drei Arbeiten geleistet. Die erste Arbeit leistet die calorische Expansion bei constanter Temperatur. Ihr Werth ist, wenn wir lieber v als ϱ in die Rechnung nehmen,

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{at}{v-b}\,dv = \log_n\left(\frac{v_2-b}{v_1-b}\right)^{at}.$$

Die zweite Arbeit ist negativ, und wird durch Ueberwindung der Molecularcontraction $\frac{e}{v^2}$ geleistet. Ihr Werth ist

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{c}{v^2}\,dv = -c\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right).$$

Die dritte Arbeit besteht in der Ueberwindung des äusseren Druckes p_e. Ihr Werth ist negativ; sie ist

$$\int_{v_1}^{v_2} p_e \, dv = -p_e (v_2 - v_1).$$

Die Summe der geleisteten Arbeiten ist gleich Null, wenn gilt

$$\log_n \left(\frac{v_2 - b}{v_1 - b}\right)^{at} - c\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) - p_e (v_2 - v_1) = 0.$$

Hierbei sind v_1 und v_2 die kleinste und die grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{at}{v - b} - \frac{c}{v^2} - p_e = 0.$$

Wenn man für v_1 und v_2 die betreffenden Ausdrücke einsetzt, dann erhält man eine Gleichung zwischen den Variablen t und p_e und den Constanten des Gases a, b und c, welche es gestattet, zu jeder Temperatur t den Gasdruck p_e auszurechnen. Diese Formel ist dann die genaue (nicht approximative) Consequenz der Van der Waals'schen Annahmen.

Die Formel der Dampfspannung lässt sich leicht graphisch discutiren. Die Arbeit, welche bei der Verdampfung der Masseneinheit durch die calorische Expansion geleistet wird, ist dargestellt durch die Fläche, die durch den Abscissentheil $v_1 v_2$, die zugehörigen Ordinaten und die Curve aa' begrenzt wird. Von dieser Arbeit lässt sich die Arbeit, die auf Ueberwindung des äusseren Druckes verwendet wird, in Abzug bringen, indem man einfach die Curve um p_e nach unten verschiebt. Die reducirte Arbeitsfläche der Expansion ist dann oben durch die doppelt gezeichnete Curve begrenzt. — Die Arbeit, die zur Ueberwindung der Cohäsion erforderlich ist, ist durch dieselben Ordinaten von v_1 und v_2 bestimmt, sowie durch die stark gezeichnete Curve cc'. Man sieht, dass von v_1 bei v_2 die zu leistende negative Arbeit grösser ist, als die gleichzeitig geleistete positive Arbeit, und zwar wird dieser Ueberschuss der negativen Arbeit durch das schraffirte Zweieck I gemessen. Umgekehrt ist zwischen v_2 und v_3 die zu leistende negative Arbeit kleiner als die gleichzeitig geleistete positive Arbeit, und der Ueberschuss an positiver Arbeit wird durch das Zweieck II gemessen. Unsere Bedingung, dass bei gesättigtem Dampfe die Summe der Arbeiten gleich Null sein soll, reducirt sich somit auf die Bedingung, dass die beiden Differenzzweiecke I und II gleich sein müssen oder

$$\text{I} = \text{II}.$$

Ueber die barometrische Höhenmessformel.

Mit neuen Tafeln.

Von

Dr. **J. M. Pernter.**

1. Bezeichnen wir mit p den Luftdruck und mit ϱ die Dichte der Luft, mit z die verticale Richtung nach der Schwere, deren Beschleunigung g sein möge. Setzen wir den wirklichen Zustand der Atmosphären voraus, d. h. nehmen wir nicht an, dass sich die Atmosphäre im Gleichgewichte befinde; es ist dann irgend eine beliebig gerichtete Bewegung derselben vorhanden, deren Componenten nach drei aufeinander senkrechten Axen XYZ bezeichnet werden mögen mit u, v, w; dann hängt die Druckabnahme mit der Höhe $-\frac{dp}{dz}$ bekanntlich folgendermaassen von Dichte, Schwere und Bewegung ab:

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = g + \left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right).$$

Diese Formel setzt voraus, dass wir es mit einer zwar bewegten Atmosphäre aber auf einer nicht rotirenden Erde zu thun haben; ebenso ist auf die Reibungswiderstände keine Rücksicht genommen.

Nach Sprung [1]) wird die Schwerkraftbeschleunigung eines parallel der Erdoberfläche sich bewegenden Körpers infolge dieser Bewegung kleiner und zwar um: $2\,V\omega\cos\varrho\sin\nu - \frac{v^2}{R}$. Darin bedeutet v die horizontale Geschwindigkeit des Körpers, in unserem Falle, der Luft und ν das Azimuth der relativen Bewegungsrichtung, R den mittleren Erdradius, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde und ϱ die geographische Breite. Bezeichnen wir den Reibungswiderstand mit F_w und wird die Druckabnahme mit der Höhe durch folgende Gleichung dargestellt sein [2]):

---

1) Lehrbuch der Meteorologie S. 28.

2) Es ist in dieser Formel wohl zweifellos noch ein Einfluss der horizontalen Bewegung auf den Luftdruck ausser Acht gelassen, nämlich der bekannte Einfluss, den ein in der Höhe hinfliessender Luftstrom durch Aspiration auf den Druck der daneben befindlichen Schichten ausüben muss. Es scheint mir aber bisher kein

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = g + \left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right) -$$
$$- 2V\omega\cos\varphi\sin\nu - \frac{v^2}{R} + F_\omega.$$

Um von dieser sehr complicirten Formel auf die gewöhnliche Laplace'sche Differentialgleichung zu kommen, muss man sowohl die verticale Bewegungscomponente w gleich Null setzen, als auch den Einfluss der horizontalen Bewegung auf die Schwereabnahme vernachlässigen, d. h. man muss einen vollkommenen Gleichgewichtszustand der Atmosphäre voraussetzen[1]). Dann geht obige Formel über in die bekannte:

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = g \text{ oder } -dp = \varrho g\, dz.$$

Dass man zu dieser Vereinfachung der Formel berechtigt ist, hat Sprung[2]) durch Berechnung extremer Beispiele gezeigt. Nur bei den seltenen Fallwinden (Föhn, Bora etc.) ist eine Vernachlässigung der verticalen Componente nicht gestattet; „im allgemeinen aber dürfte man berechtigt sein, in der freien Atmosphäre den Einfluss des Bewegungszustandes auf die verticale Luftdruckvertheilung als eine zu vernachlässigende Grösse zu betrachten."

Aus dieser Betrachtung erhellt, dass die Laplace'sche Gleichung den Gleichgewichtszustand darstellt und dass man ohne nennenswerthen Fehler diesen Gleichgewichtszustand bei der barometrischen Höhenmessung voraussetzen darf.

2. Nachdem wir auf diese Weise die Differentialgleichung gefunden haben, welche uns den Zusammenhang zwischen Druck und Höhe in der Atmosphäre darstellt, können wir durch Integration derselben zu einer brauchbaren Höhenmessformel kommen. Die Integration dieser

---

Anhaltspunkt vorhanden, denselben in der Höhenmessformel zu berücksichtigen; aller Wahrscheinlichkeit nach würde er nur in einzelnen Ausnahmsfällen einen merklichen Einfluss ausüben.

1) Hiermit dürfte auch der Aufforderung von Leyst (Rapport du Comité météorologique international, Reunion de Paris), man möge die strenge Ableitung der Höhenformel geben, entsprochen sein, wie denn auch Leyst's Ansicht, dass die Laplace'sche Gleichung keine Gleichgewichtsgleichung sei, sondern einfach dadurch entstanden wäre, dass die verticale Componente in der Bewegungsgleichung gleich Null gesetzt wird, durch obige Darstellung als nicht stichhaltig sich erwies.

2) Lehrbuch der Meteorologie S. 161—162. Sprung berechnet für eine horizontale Geschwindigkeit des Windes von 30 m pro Secunde den Unterschied des Luftdruckes zwischen Ost- und Westwind (also in den extremen Fällen von ν) zu 0,079 mm (bei einer Niveaudifferenz von 1450 m). Der Einfluss der verticalen Componente (für die gewöhnlichen Fälle) erweist sich noch viel geringer.

Formel ist so oft gegeben worden, dass nur ein besonderer Grund es rechtfertigen kann, wenn wir hier neuerdings dieselbe darstellen. Dieser Grund liegt darin, dass wir es uns zur Aufgabe gestellt haben, einerseits eine fehlerhafte Voraussetzung in Bezug auf die Abnahme der Schwere mit der Höhe auf den Continenten aus der gewöhnlich gegebenen Formel zu eliminiren, andrerseits die nun genauer festgestellten richtigeren Constanten einzuführen und endlich die Einführung von nur solchen Barometerständen in die Höhenmessformel, welche wegen aller Fehler corrigirt sind, vorzuschlagen.

Um die Differentialgleichung $-dp = \varrho g\, ds$ zu integriren, muss man ϱ und g als Functionen von p und s darstellen. Setzen wir nun statt s den gebräuchlicheren Buchstaben h. Die vorzubringenden Bemerkungen beziehen sich auf die Darstellung von g als Function von h. Wenn wir also, wie gebräuchlich, $\varrho = kp$ setzen, wo k in Rücksicht darauf, dass der Luft-Wasserdampf beigemischt ist, bekanntlich zu setzen ist

$$k = \frac{\varrho_0}{g_{45} \cdot D \cdot 760}(1 - \alpha t)(1 - 0{,}378\, f(e))$$

(D = Dichte des Quecksilbers, $f(e)$ = Funktion des Dampfdrucks)

$$t = \frac{t' + t''}{2}$$

so wird zunächst die Differentialgleichung

$$-\frac{dp}{p} = k g\, dh$$

und es muss nur noch g als Function von h eingeführt werden.

Im freien Raume nimmt die Wirkung der Massen auf einem Punkt ab mit dem Quadrate der Entfernung, so dass

$$g = g_0 \frac{r^2}{(r+h)^2}$$

wenn g_0 die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche (Meeresniveau), r den Erdradius und h die Höhe eines Ortes über der Erdoberfläche, der dem Radius r entspricht, bedeutet.

Dieser Ausdruck für g wurde denn auch bisher allgemein in unsere Differentialgleichung eingeführt; mit Unrecht, wie wir gleich zeigen wollen.

Da es sich bei Bestimmung von Höhen immer (mit Ausnahme der nicht in Betracht kommenden Ballonfahrten) um feste Punkte auf den Continenten oder Inseln handelt, so ist bei der Abnahme der Schwere mit der Höhe auf die Wirkung der sich über das Meeresniveau er-

hebenden Massen Rücksicht zu nehmen. Es wäre hierbei streng genommen dieser Einfluss für jeden einzelnen Fall zu berechnen, und eine allgemeine Lösung des Problemes würde dadurch unmöglich. In Rücksicht auf die geringen Unterschiede der Resultate bei diesen einzelnen Fällen kann man aber ohne weiteres den Versuch einer allgemeinen Lösung acceptiren, welche bekanntlich Poisson in unübertrefflich eleganter Weise (Traité de Mecanique t. 1 n. 255) gegeben hat. Indem er die Erhebungen der Continente als gleichmässig vom Meeresniveau ansteigend betrachtet und annimmt, dass der Wirkungskreis der Massen auf einen bestimmten Punkt des Continentes als innerhalb eines Cylinders liegend angesehen werden kann, dessen Höhe gegen seinen Durchmesser zu vernachlässigen ist, kommt er für die Abnahme der Schwere auf den Continenten zum Ausdrucke

$$g = g_0\left[1 - \frac{h}{r}\left(2 - \frac{3}{2}\frac{d}{d_1}\right)\right]$$

worin d die Dichte der Massen des Continentes und d_1 die mittlere Dichte der Erde bedeutet. Nimmt man im Durchschnitte $d : d_1 = 1/2$, so wird obiger Ausdruck

$$g = g_0\left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r}\right)^{1}).$$

Dieser Ausdruck ist als der auf den continentalen Erhebungen der Abnahme der Schwere entsprechende in die Laplace'sche Differentialgleichung einzuführen, statt der gewöhnlich benutzten

$$g = g_0 + \frac{r^2}{(r+h)^2} = g_0\left(1 - \frac{2h}{r}\right)^{2}).$$

Wir haben also folgende Differentialgleichung zu integriren

$$-\frac{dp}{p} = \frac{\varrho_0 g_0}{g_{45} \cdot D \cdot 760}(1 - \alpha t)(1 - 0{,}378\, f(e))\left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r}\right)dh$$

---

1) Selbst kegelförmig sich über eine Ebene erhebende Berge fallen unter diesen Ausdruck, da die Masse der Berge gegen die übrigen Erhebungen des Continentes von zu geringem Einflusse ist, um den Poisson'schen Ausdruck erheblich zu modificiren. Bei ganzen Gebirgsstöcken, wie es die Alpen etc. sind, trifft Poisson's Voraussetzung selbstverständlich noch besser zu.

2) Man hat bisher in die Differentialgleichung immer

$$\frac{r^2}{(r+h)^2}\, g_0$$

eingeführt, ganz inconsequenterweise; da man, wie z. B. Rühlmann, bei der Correction der Barometerangaben wegen der Schwere den Poisson'schen Ausdruck ganz richtig benutzte.

und indem an g_o in der Breite φ_1 die Correction wegen der Schwere angebracht wird, $g_o = g_{45}\ (1 - 0{,}00259 \cos r\varphi)$

$$-\frac{dp}{p} = \frac{\varrho_o}{D \times 0{,}76}(1-\alpha t)(1-0{,}378 f(e))(1-0{,}00259\cos 2\varphi)\left(1-\frac{5}{4}\frac{h}{r}\right)dh.$$

Die Integration von $p_,$ bis p'' und von $h_,$ bis $h_{,,}$ ergibt, wenn $f(e)$, wie oben auseinandergesetzt wurde, zunächst als constant betrachtet wird:

$$l\frac{p_,}{p_{,,}} = \frac{\varrho_o}{0{,}76 \times D}(1-\alpha t)(1-0{,}0378 f(e))(1-0{,}00259\cos 2\varphi)\left(1-\frac{5}{8}\frac{h_{,,}+h_,}{r}\right)(h_{,,}-h_,).$$

Setzen wir, wie üblich, $h_{,,} - h_, = h$, und führen nach der gebräuchlichen Weise für $h_,$ den Buchstaben s ein, so wird $h_{,,} = s + h$, wodurch bei gleichzeitiger Einführung der Brigg'schen Logarithmen man erhält

$$\left.\begin{aligned} h = \frac{0{,}76 \times D}{\text{Mod.} \times \varrho_o}(1+\alpha t)(1+0{,}378 f(e))(1+0{,}00259\cos 2\varphi) \\ \left(1+\frac{5}{8}\frac{2s+h}{r}\right)\log\frac{p_,}{p_{,,}}. \end{aligned}\right\}(1$$

Wollte man die Temperatur und die Feuchtigkeit der Luft als Function der Höhe darstellen, so würde man vor der Integration für t und $f(e)$ die Ausdrücke einzuführen haben, welche ihre Abhängigkeit von der Höhe darstellt. In Bezug auf die Temperatur könnte man nur für bestimmte Zeiten und Orte jedesmal eine besondere Abnahme mit der Höhe einführen; es ist nämlich diese Abnahme nach Zeit und Ort zu veränderlich, als dass sie einen allgemein giltigen Ausdruck darzustellen erlauben würde. Man ist daher auch ganz davon abgekommen, für die praktische Verwendung der Höhenformel einen solchen Ausdruck in die Höhenformel aufzunehmen [1]).

Anders verhält es sich mit dem Dampfdruck des Wassers in der Luft. Hann hat gezeigt [2]), dass derselbe einem bestimmten Gesetze gehorcht, indem

$$e = e_o\, 10^{-\frac{h}{c}}$$

gesetzt werden kann, woraus dann für das Correctionsglied $(1-0{,}378 f(e))$ sich ergibt:

1) Einen diesbezüglichen Versuch siehe Sprung Lehrbuch der Meteorologie S. 97.

2) Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie Bd. 9 S. 198.

$$1 - 0{,}378 \frac{e_o}{p_o} 10^{-\frac{h}{c}}.$$

Führt man dies in die Differentialgleichung ein und setzt

$$\frac{\varrho_o}{0{,}76 \times D} (1 - \alpha t)(1 - 0{,}00259 \cos 2\varphi) = k$$

so hat man

$$-\frac{dp}{p} = k\left(1 - 0{,}378 \frac{e_o}{p_o} 10^{-\frac{h}{c}}\right)\left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r}\right) dh.$$

Die Integration ergibt, indem $\left(\frac{e_o}{p_o}\right)$ von der Höhe h unabhängig angesehen wird sehr nahe (wenn man beachtet, dass

$$\left(1 - \frac{ah}{r} - \frac{ac}{r}\right) = 1$$

gesetzt werden darf)

$$l\frac{p_i}{p_{ii}} = k\left[1 - \frac{5}{8}\frac{h_{ii} + h_i}{r} - 0{,}378 \frac{e_o}{p_o} \cdot \frac{c}{h} \text{ Mod. } 10^{-\frac{h_i}{c}}\left(1 - 10^{-\frac{h}{c}}\right)\right] h.$$

Da nun

$$\frac{e_o}{p_o} 10^{-\frac{h_i}{c}} = \frac{e_i}{p_i}$$

ist, so erhält man bei Einführung der früheren Bezeichnungsweise, und indem man

$$\frac{0{,}76 \times D}{\text{Mod. } \varrho_o} = A$$

setzt:

$$h = A\left(1 + \alpha \frac{t' + t''}{2}\right)(1 + 0{,}00259 \cos 2\varphi)\left[1 + \frac{5}{8}\frac{2s + h}{r} + \right.$$
$$\left. + 0{,}378 \cdot \text{Mod.} \frac{e_i}{p_i} \cdot \frac{c}{h}\left(1 - 10^{-\frac{h}{c}}\right)\right] \log \frac{p_i}{p_{ii}}$$

und indem man beachtet, dass

$$(1 + d)(1 + \varepsilon) = 1 + d + \varepsilon,$$

(da ja de zu vernachlässigen ist), so kommt man schliesslich auf eine der Gl. 1 ganz analoge Form:

$$\left.\begin{aligned} h = A\left(1 + \alpha \frac{t' + t''}{2}\right)\left[1 + 0{,}378 \cdot \text{Mod.} \frac{e_i}{p_i} \cdot \frac{c}{h} \cdot \left(1 - 10^{-\frac{h}{c}}\right)\right] \\ (1 + 0{,}00259 \cos 2\varphi)\left(1 + \frac{5}{8}\frac{2s + h}{r}\right) \log \frac{p_i}{p_{ii}}. \end{aligned}\right\} (2$$

Gl. 2 wird man dann immer anwenden, wenn der Dampfdruck nur von der unteren Station bekannt ist. Hann hat zur Berechnung von

$$0{,}378 \cdot \text{Mod.} \frac{e_{,}}{p_{,}} \frac{c}{h} \left(1 - 10^{-\frac{h}{c}}\right)$$

Tafeln gerechnet [1]).

Gl. 1 bezw. 2 ist somit die richtige Höhenmessformel.

3. Das letzte, was uns noch zu thun erübrigt, ist die Berechnung der Constante

$$A = \frac{0{,}76 \cdot D}{\text{Mod.} \times \varrho_0}$$

mit den Werthen, welche die neuesten Untersuchungen als die richtigsten ergeben haben. Diesbezüglich wird man am sichersten gehen, wenn man sich an die vom Bureau international des poids et des mesures gewonnenen und angenommenen Werthe hält. Hiernach ist die Dichte des Quecksilbers [2])

$$D = 13595 \cdot 6,$$

die der Luft (mit 0,004 Kohlensäure) [3])

$$\varrho_0 = 1{,}293048.$$

Ueberdies [4]) nehmen wir $\alpha = 0{,}00367$, die Schwerecorrection wegen der Breite [5]) $= (1 + 0{,}00259 \cos 2\varphi)$ und den mittleren Erdradius nach Clarke [6]) $= 6371103$ m. Dadurch wird $A = 18399 \cdot 8$.

Hiernach lautet die endgiltige Höhenmessformel 1

$$h = 18399.8 \left(1 + \alpha \frac{t' + t''}{2}\right)\left[1 + 0{,}378 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{e'}{b'} + \frac{e''}{b''}\right)\right]$$
$$(1 + 0{,}00259 \cos 2\varphi) \times \left(1 + \frac{5}{8} \frac{2s + h}{6371103}\right) \log \frac{b_{,}}{b_{,,}}.$$

Die resp. Abänderung für Formel 2 liegt auf der Hand.

In dieser Formel ist $b_{,}$ und $b_{,,}$ für $p_{,}$ und $p_{,,}$ schlechtweg eingesetzt, was natürlich nur unter der Voraussetzung gilt, dass der Barometerstand das adäquate Maass des Luftdruckes ist. Dies ist aber nur der Fall, wenn die Ablesung am Barometer wegen aller Einflüsse corrigirt ist. Es möchte selbstverständlich erscheinen, dass man nie einen anderen Barometerstand irgendwo angibt als einen von allen störenden

1) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien Bd. 74 II. Abth. S. 290 ff.
2) Travaux et Memoires du bureau international des poids etc. t. II p. D 56.
3) ibid. t. I p. D 27.
4) ibid. t. I p. A 52.
5) ibid. t. I p. A 9.
6) Geodesy p. 319.

Einflüssen corrigirten, den wahren und wirklichen Luftdruck ergebenden. Dem ist aber nicht so; im Gegentheile wird sowohl in der Rühlmann'schen als in der Gauss'schen Formel vorausgesetzt, dass der in die Barometerformel eingeführte Barometerstand vom Einflusse der Schwere wegen der Höhe nicht corrigirt sei, und ist die Höhenformel selbst darnach modificirt worden. Es scheint mir nun ganz inconsequent, zu verlangen, dass die Barometerstände von einigen Einflüssen corrigirt und von anderen nicht corrigirt zur Verwendung kommen, und ich setze daher in obiger Höhenmessformel voraus, dass nur wegen aller Einflüsse corrigirte Barometerstände, die also das adäquate Maass des Luftdruckes darstellen, eingeführt werden.

Bevor man einen Barometerstand als Maass des Luftdruckes angibt, muss ersterer corrigirt worden sein:

a) wegen der Temperatur,
b) wegen des Instrumentalfehlers,
c) wegen der Aenderung der Schwere nach der Breite,
d) wegen der Aenderung der Schwere nach der Höhe.

Es wäre mehr als wünschenswerth, wenn die Correction wegen aller dieser Einflüsse ebenso selbstverständlich würde für alle, welche je eine Barometerbeobachtung machen, wie es heute die Temperatur-Correction ist, und es ist und bleibt zum mindesten eigenthümlich, dass dies heute noch nicht selbstverständlich ist.

4. Ich lasse nun alle zur bequemen Rechnung mit den Gleichungen 1 und 2 nothwendigen Tafeln hier folgen und zwar:

1. Tafeln zur Correction der Barometerstände:

a) zur Temperatur-Correction,
b) zur Schwere-Correction wegen der Breite,
c) zur Schwere-Correction wegen der Höhe.

2. Barometrische Höhenmesstafeln zur Rechnung mit Logarithmen:

a) Logarithmen von $18399 \cdot 8 \left(1 + \alpha \frac{t' + t''}{2}\right)$

b) Logarithmen von $(1 + 0{,}378\, f(e))$

α) $\left(1 + 0{,}378 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{e'}{b'} + \frac{e''}{b''}\right]\right)$

β) $\left(1 + 0{,}378 \cdot \text{Mod.} \frac{e_1}{b_1} \frac{c}{h} [1 - 10^{-\frac{h}{c}}]\right)$

c) Logarithmen von $\left(1 + \frac{5}{8}\,\frac{2\varepsilon + h}{6{,}371103}\right)$

d) Logarithmen von $(1 + 0{,}00259 \cos 2\varphi)$.

Bemerkungen zu den Tafeln.

Tafel I. Temperatur-Correction des Barometers.

Diese Tabelle ist Hann's Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen (S. 116) entnommen. Sie wurde bei Gelegenheit der letzten Auflage neu und mit Berücksichtigung der neuesten Werthe der Constanten berechnet.

Tafel II. Correction des Barometers wegen der Aenderung Schwere nach der Breite. Diese Tafel wurde von mir neu berechnet nach der Formel $0{,}00259 \cos 2\varphi \times b$.

Tafel III. Correction des Barometers wegen der Aenderung der Schwere mit der Höhe. Diese Tafel ist ebenfalls aus obengenannter Anleitung von Hann (S. 120) entnommen.

Diese drei Tafeln dienen zur Correction der unmittelbaren Barometerablesungen [1]).

Die nächsten Tafeln sind die eigentlichen Höhenmesstafeln.

Tafel IV gibt $\log\left[18399 \cdot 8\left(1 + 0{,}00367\,\frac{t' + t''}{2}\right)\right]$.

Sie wurde von mir neu berechnet. Der Unterschied gegen die entsprechende Tafel von Rühlmann liegt, wie oben bemerkt, darin, dass die Schwere-Correction des Barometers wegen der Höhe hier wegfällt.

Tafel V ist aus Hann's Anleitung (S. 131) entnommen. Sie ist nur eine erweiterte Rühlmann'sche Tafel und findet Anwendung, wenn der Dampfdruck an der unteren und oberen Station bekannt ist, bei Benützung des Factors $\left[1 + 0{,}378 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{e'}{b'} + \frac{e''}{b''}\right)\right]$.

Tafel VI gibt $\log\left[1 + 0{,}378 \text{ Mod } \frac{e'}{b'}\,\frac{c}{h}\left(1 - 10^{-\frac{h}{c}}\right)\right]$; ich habe diese Tafel mit Benutzung der Tafel von Hann (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien, Bd. 74, Abth. 2 S. 290) neu berechnet, wobei ich das Verhältnis $\frac{e'}{b'}$ als das eine Argument wählte, während die Höhendifferenz der beiden Stationen das andere bildet. Man hat dabei zu-

1) Nach Anbringung dieser Correctionen, sowie der Instrumentalcorrection, muss man noch die sog. Isobaren-Correction anbringen, so oft die horizontale Entfernung der beiden Stationen beträchtlich ist. Läuft in dem Niveau der unteren Station in der Verticalen der oberen Station eine $\pm n$ mm verschiedene Isobare als durch die untere Station, so ist an dem Barometerstand der letzteren die Correction von $\pm n$ mm anzubringen.

nächst sich $\frac{e'}{b'}$ zu bilden und zwar bis zur vierten Decimale. Diese Tafel wird ihre Verwendung dann finden, wenn Dampfdruck-Beobachtungen nur von der unteren Station vorliegen.

Tafel VII gibt $\log\left(1+\frac{5}{8}\frac{2\varepsilon+h}{6371103}\right)$; sie wurde von mir neu berechnet.

Tafel VIII giebt $\log(1+0{,}00259\cos 2\varphi)$; sie wurde ebenfalls von mir neu berechnet.

Die Ziffern in den letzten vier Tafeln bedeuten Einheiten der fünften Decimale, wie dies am Kopfe der Tafeln angegeben ist.

Beispiele.

I. Höhe des Sonnblick nach Ischl berechnet.

Im Jahresmittel (October 1886 — October 1887) erhielt man

	b	t	e	geogr. Br.	Seehöhe
Sonnblick	520,93 mm	— 6,8 c	2,8 mm	47° 3′	(3100 ca.)
Ischl	721,74 „	7,6 „	6,8 „	47° 43′	466,9.

Die Temperatur-Correction ist an die Barometerstände schon angebracht; ebenso ist die Instrumental-Correction schon angebracht. Es erübrigt uns also noch die Schwere-Correction nach Breite und Höhe. Hierbei ist allerdings vorausgesetzt, dass man die Höhe schon beiläufig kenne. Dies ist in der That immer der Fall; denn sobald man den Barometerstand kennt, weiss man beiläufig die Höhe; man kann sie dann auch schon den Radau'schen Tafeln entnehmen.

	520,93	721,74	
Breite-Correction	+ 10	+ 15	$t_i + t_{ii} = + 0{,}8$
Höhe-Correction	— 31	— 07	
	520,72	721,82	

$\log A\left(1+\alpha\frac{t_i+t_{ii}}{2}\right) = 4{,}26545$ $\qquad \log b_i = 2{,}85843$

$\log\left[\left(\log b_i - \log b_{ii}\right)\right] = 0{,}15177 - 1$ $\qquad \log b_{ii} = 2{,}71660$

$\log b_i - \log b_{ii} = 0{,}14183$

$\log(1+0{,}378\,f(e)) = 127$ $\qquad \log(1+0{,}378)\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{e'}{b'}+\frac{e''}{b''}\right] =$

$\log\left(1+\frac{5}{8}\frac{2\varepsilon+h}{r}\right) = 15$ $\qquad = \frac{89+156}{2} = 127$ Einh. d. 5. Dec.

$\log(1+0{,}00259\cos 2\varphi) = -10$

$3{,}41854$

$h = 2621{,}4$

$\varepsilon = 426{,}9$

Seehöhe des Sonnblick = 3088,3 m.

Wollte man die Dampfdruck-Beobachtungen auf dem Sonnblick als zu unsicher betrachten, so müsste man mit dem Dampfdruck der unteren Station allein rechnen. Dazu müsste man Tafel VI benutzen. Man hat zunächst $\frac{e_1}{b_1}$ zu bilden $e_1 = 6{,}8$, $b_1 = 721{,}82$; $\frac{e_1}{b_1} = 0{,}009_4$. Da h ca. 2600 ist, so findet man aus Tafel VI $\log(1 + 0{,}378\, f(e)) =$ $= 116$ Einheiten der fünften Decimale. Man hat also an dritter Stelle in obiger Rechnung statt 127 zu setzen 116 und erhält dann $\log h =$ $= 3{,}41843$ und $h = 2620{,}8$ und Seehöhe des Sonnblick $= 3085{,}4$ m.

II. Höhe des Sonnblick nach Obir berechnet.

Im Jahresmittel (October 1886 — October 1887) erhielt man

	b	t	e	geogr. Br.	Seehöhe
Sonnblick	520,93 mm	— 6,8 c	2,8 mm	47° 3′	(3100 ca.)
Obir	594,95 „	+ 0,3 „	4,4 „	46° 30′	2040,5 m.

			der Schwere	520,93	594,95
Breite-Correction	}	der Schwere		+ 10	+ 05
Höhen-Correction	}			— 31	— 23
				520,72	594,77

$$\log A\left(1 + \alpha \frac{t_I + t_{II}}{2}\right) = 4{,}25960$$

$$\log b_I = 2{,}77435$$

$$\log b_{II} = 2{,}71661$$

$$\log(\log b_I - \log b_{II}) = 0{,}76148 - 2$$

$$\log b_I - \log b_{II} = 0{,}05774$$

$$\log(1 + 0{,}378\, f(e)) = 105$$

$$\log\left(1 + \frac{5}{8}\frac{2z + h}{r}\right) = 28$$

$$\log(1 + 0{,}0025\,9 \cos 2\varphi) = -7$$

$$3{,}02234$$

$$h = 1052{,}8$$

$$2040{,}5$$

Seehöhe des Sonnblick $= 3093{,}3$ m.

Würde man mit Tafel VI statt mit Tafel V gerechnet haben, so würde man erhalten haben $h = 1052{,}4$ und die Seehöhe des Sonnblick 3092,9.

Es sei bemerkt, dass weder im ersten noch im zweiten Beispiele eine Isobaren-Correction angebracht ist, wovon sich theilweise der Unterschied im Resultate erklärt. — Es folgen nun die Tafeln.

Tafel I.

Temperatur-Correction des Barometers.

	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580
− 10	+ 0,66	+ 0,69	+ 0,72	+ 0,75	+ 0,79	+ 0,82	+ 0,85	+ 0,88	+ 0,92	+ 0,95
9	0,59	0,62	0,65	0,68	0,71	0,74	0,77	0,80	0,83	0,85
8	0,52	0,55	0,58	0,60	0,63	0,66	0,68	0,71	0,73	0,76
7	0,46	0,48	0,50	0,53	0,55	0,57	0,60	0,62	0,64	0,66
6	0,39	0,41	0,43	0,45	0,47	0,49	0,51	0,53	0,55	0,57
5	0,33	0,34	0,36	0,38	0,39	0,41	0,43	0,44	0,46	0,47
4	0,26	0,28	0,29	0,30	0,31	0,33	0,34	0,35	0,37	0,38
3	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,27	0,28
2	0,13	0,14	0,14	0,15	0,16	0,16	0,17	0,18	0,18	0,19
1	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,10
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
+ 1	− 0,07	− 0,07	− 0,07	− 0,08	− 0,08	− 0,08	− 0,09	− 0,09	− 0,09	− 0,10
2	0,13	0,14	0,14	0,15	0,16	0,16	0,17	0,18	0,18	0,19
3	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,25	0,26	0,27	0,28
4	0,26	0,27	0,29	0,30	0,31	0,33	0,34	0,35	0,37	0,38
5	0,33	0,34	0,36	0,38	0,39	0,41	0,42	0,44	0,46	0,47
6	0,39	0,41	0,43	0,45	0,47	0,49	0,51	0,53	0,55	0,57
7	0,46	0,48	0,50	0,53	0,55	0,57	0,59	0,62	0,64	0,66
8	0,52	0,55	0,57	0,60	0,63	0,65	0,68	0,71	0,73	0,76
9	0,59	0,62	0,65	0,68	0,71	0,73	0,76	0,79	0,82	0,85
10	0,65	0,69	0,72	0,75	0,78	0,82	0,85	0,88	0,91	0,95
11	0,72	0,75	0,79	0,83	0,86	0,90	0,93	0,97	1,01	1,04
12	0,77	0,82	0,86	0,90	0,94	0,98	1,02	1,06	1,10	1,14
13	0,85	0,89	0,93	0,98	1,02	1,06	1,10	1,15	1,19	1,23
14	0,91	0,96	1,00	1,05	1,10	1,14	1,19	1,23	1,28	1,32
15	0,98	1,03	1,08	1,13	1,17	1,22	1,27	1,32	1,37	1,42
16	1,04	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,36	1,41	1,46	1,51
17	1,11	1,16	1,22	1,27	1,33	1,39	1,44	1,50	1,55	1,61
18	1,17	1,23	1,29	1,35	1,41	1,47	1,53	1,58	1,64	1,70
19	1,24	1,30	1,36	1,42	1,49	1,55	1,61	1,67	1,73	1,79
20	1,30	1,37	1,43	1,50	1,56	1,63	1,69	1,76	1,83	1,89
21	1,37	1,44	1,51	1,57	1,64	1,71	1,78	1,85	1,92	1,98
22	1,43	1,50	1,57	1,65	1,72	1,79	1,86	1,93	2,01	2,08
23	1,50	1,57	1,65	1,72	1,80	1,87	1,95	2,02	2,10	2,17
24	1,56	1,64	1,72	1,80	1,88	1,95	2,03	2,11	2,19	2,27
25	1,63	1,71	1,79	1,87	1,95	2,03	2,12	2,20	2,28	2,36
26	1,69	1,78	1,86	1,95	2,03	2,12	2,20	2,29	2,37	2,45
27	1,76	1,85	1,93	2,02	2,11	2,20	2,28	2,37	2,46	2,55
28	1,82	1,91	2,00	2,10	2,19	2,28	2,37	2,46	2,55	2,64
29	1,89	1,98	2,08	2,17	2,26	2,36	2,45	2,55	2,64	2,74
30	1,95	2,05	2,15	2,24	2,34	2,44	2,54	2,63	2,73	2,83
31	2,02	2,12	2,22	2,32	2,42	2,52	2,62	2,72	2,82	2,92
32	2,08	2,18	2,29	2,39	2,50	2,60	2,71	2,81	2,91	3,02
33	2,15	2,25	2,36	2,47	2,57	2,68	2,79	2,90	3,00	3,11
34	2,21	2,32	2,43	2,54	2,65	2,76	2,87	2,98	3,09	3,20
35	2,27	2,39	2,50	2,62	2,73	2,84	2,96	3,07	3,18	3,30

	600	620	640	660	680	700	720	740	760	780
−10	+ 0,98	+ 1,02	+ 1,05	+ 1,08	+ 1,11	+ 1,85	+ 1,18	+ 1,21	+ 1,25	+ 1,28
9	0,88	0,91	0,94	0,97	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15
8	0,79	0,81	0,84	0,86	0,89	0,92	0,94	0,97	1,00	1,02
7	0,69	0,71	0,73	0,76	0,78	0,80	0,83	0,85	0,87	0,89
6	0,59	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,73	0,75	0,77
5	0,49	0,51	0,52	0,54	0,56	0,57	0,59	0,61	0,62	0,64
4	0,39	0,41	0,42	0,43	0,45	0,46	0,47	0,48	0,50	0,51
3	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38
2	0,20	0,20	0,21	0,22	0,22	0,23	0,24	0,24	0,25	0,26
1	0,10	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,13
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
+ 1	− 0,10	− 0,10	− 0,10	− 0,11	− 0,11	− 0,12	− 0,12	− 0,12	− 0,12	− 0,13
2	0,20	0,20	0,21	0,22	0,22	0,23	0,24	0,24	0,25	0,26
3	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38
4	0,39	0,41	0,42	0,43	0,44	0,46	0,47	0,48	0,50	0,51
5	0,49	0,51	0,52	0,54	0,56	0,57	0,59	0,60	0,62	0,64
6	0,59	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,73	0,74	0,76
7	0,68	0,71	0,73	0,75	0,78	0,80	0,82	0,85	0,87	0,89
8	0,78	0,81	0,84	0,86	0,89	0,91	0,94	0,97	0,99	1,02
9	0,88	0,91	0,94	0,97	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,14
10	0,98	1,01	1,04	1,08	1,11	1,14	1,18	1,21	1,24	1,27
11	1,08	1,11	1,15	1,18	1,22	1,26	1,29	1,33	1,36	1,40
12	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,37	1,41	1,45	1,49	1,53
13	1,27	1,31	1,36	1,40	1,44	1,48	1,53	1,57	1,61	1,65
14	1,37	1,42	1,46	1,51	1,55	1,60	1,64	1,69	1,73	1,78
15	1,47	1,52	1,57	1,61	1,66	1,71	1,76	1,81	1,86	1,91
16	1,57	1,62	1,67	1,72	1,77	1,83	1,88	1,93	1,98	2,04
17	1,66	1,72	1,77	1,83	1,88	1,94	2,00	2,05	2,11	2,16
18	1,76	1,82	1,88	1,94	2,00	2,05	2,11	2,17	2,23	2,29
19	1,86	1,92	1,98	2,04	2,11	2,17	2,23	2,29	2,35	2,41
20	1,96	2,02	2,09	2,15	2 22	2,28	2,35	2,41	2,48	2,54
21	2,05	2,12	2,19	2,26	2,33	2,39	2,46	2,53	2,60	2,67
22	2,15	2,22	2,29	2,36	2,44	2,51	2,58	2,65	2,72	2,79
23	2,25	2,32	2,40	2,47	2,55	2,62	2,70	2,77	2,85	2,92
24	2,34	2,42	2,50	2,58	2,66	2,73	2,81	2,89	2,97	3,05
25	2,44	2,52	2,60	2,69	2,77	2,85	2,93	3,01	3,09	3,17
26	2,54	2,62	2,71	2,79	2,88	2,96	3,05	3,13	3,22	3,30
27	2,64	2,72	2,81	2,90	2,99	3,08	3,16	3,25	3,34	3,43
28	2,73	2,82	2,92	3,01	3,10	3,19	3,28	3,37	3,46	3,55
29	2,83	2,92	3,02	3,11	3,21	3,30	3,40	3,49	3,58	3,68
30	2,93	3,02	3,12	3,22	3,32	3,42	3,51	3,61	3,71	3,81
31	3,02	3,13	3,23	3,33	3,43	3,53	3,63	3,73	3,83	3,93
32	3,12	3,23	3,33	3,43	3,54	3,64	3,75	3,85	3,95	4,06
33	3,22	3,33	3,43	3,54	3,65	3,75	3,86	3,97	4,08	4,18
34	3,32	3,43	3,54	3,65	3,76	3,87	3,98	4,09	4,20	4,31
35	3,41	3,53	3,64	3,75	3,87	3,98	4,09	4,21	4,32	4,44

Tafel II.

Correction des Barometers wegen der Aenderung der Schwere nach der Breite[1])

$\varphi-$	780	760	740	720	700	680	660	640	620	600	$\varphi+$
0	2,02	1,97	1,92	1,86	1,81	1,76	1,71	1,66	1,61	1,55	90
2	2,02	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76	1,71	1,65	1,60	1,55	88
4	2,00	1,95	1,90	1,85	1,79	1,74	1,69	1,64	1,59	1,54	86
6	1,98	1,93	1,87	1,82	1,77	1,72	1,67	1,62	1,57	1,52	84
8	1,94	1,89	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,59	1,54	1,49	82
10	1,90	1,85	1,80	1,75	1,70	1,65	1,61	1,56	1,51	1,46	80
12	1,85	1,80	1,75	1,70	1,66	1,61	1,56	1,51	1,47	1,42	78
14	1,78	1,74	1,69	1,65	1,60	1,55	1,51	1,46	1,42	1,37	76
16	1,71	1,67	1,63	1,59	1,54	1,49	1,45	1,40	1,36	1,31	74
18	1,63	1,59	1,55	1,51	1,47	1,42	1,38	1,34	1,30	1,26	72
20	1,55	1,51	1,47	1,43	1,39	1,35	1,31	1,27	1,23	1,19	70
22	1,45	1,42	1,38	1,34	1,30	1,27	1,23	1,19	1,16	1,12	68
24	1,35	1,32	1,28	1,25	1,21	1,18	1,14	1,12	1,08	1,04	66
26	1,24	1,21	1,18	1,15	1,11	1,08	1,05	1,02	0,99	0,96	64
28	1,13	1,10	1,07	1,04	1,01	0,98	0,96	0,93	0,90	0,87	62
30	1,01	0,98	0,96	0,93	0,91	0,88	0,85	0,83	0,80	0,77	60
32	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80	0,77	0,75	0,73	0,70	0,68	58
34	0,76	0,74	0,72	0,70	0,68	0,66	0,64	0,63	0,60	0,58	56
36	0,62	0,61	0,59	0,58	0,56	0,54	0,53	0,51	0,50	0,48	54
38	0,49	0,48	0,46	0,45	0,44	0,43	0,41	0,40	0,39	0,38	52
40	0,35	0,34	0,33	0,32	0,31	0,31	0,30	0,29	0,28	0,27	50
42	0,21	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	0,18	0,17	0,17	0,16	48
44	0,07	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,05	46
	580	560	540	520	500	480	460	440	420	400	
0	1,50	1,45	1,40	1,35	1,29	1,24	1,19	1,14	1,09	1,04	90
2	1,50	1,45	1,40	1,34	1,29	1,24	1,19	1,14	1,09	1,03	88
4	1,49	1,44	1,39	1,33	1,28	1,23	1,18	1,13	1,08	1,03	86
6	1,47	1,42	1,37	1,32	1,27	1,22	1,17	1,11	1,06	1,01	84
8	1,44	1,39	1,34	1,29	1,25	1,19	1,15	1,09	1,04	1,00	82
10	1,41	1,36	1,31	1,27	1,22	1,17	1,12	1,07	1,02	0,97	80
12	1,37	1,32	1,28	1,23	1,18	1,14	1,09	1,04	0,99	0,95	78
14	1,33	1,28	1,23	1,19	1,14	1,10	1,05	1,00	0,96	0,91	76
16	1,27	1,23	1,19	1,14	1,10	1,05	1,01	0,96	0,92	0,88	74
18	1,21	1,17	1,13	1,09	1,05	1,00	0,96	0,92	0,88	0,84	72
20	1,15	1,11	1,07	1,03	0,99	0,95	0,91	0,87	0,83	0,79	70
22	1,08	1,04	1,01	0,97	0,93	0,89	0,86	0,82	0,78	0,75	68
24	1,01	0,97	0,94	0,90	0,88	0,83	0,80	0,76	0,73	0,69	66
26	0,92	0,89	0,86	0,83	0,80	0,76	0,73	0,70	0,67	0,64	64
28	0,84	0,81	0,78	0,75	0,72	0,69	0,66	0,64	0,61	0,60	62
30	0,75	0,72	0,70	0,67	0,65	0,62	0,59	0,57	0,54	0,52	60
32	0,66	0,63	0,61	0,59	0,57	0,54	0,52	0,50	0,48	0,45	58
34	0,56	0,54	0,52	0,50	0,48	0,47	0,44	0,47	0,41	0,39	56
36	0,46	0,45	0,43	0,41	0,40	0,38	0,37	0,35	0,34	0,32	54
38	0,36	0,35	0,34	0,32	0,31	0,30	0,29	0,27	0,26	0,25	52
40	0,26	0,25	0,24	0,23	0,22	0,22	0,21	0,20	0,19	0,18	50
42	0,16	0,15	0,15	0,14	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	0,11	48
44	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	46

1) Die Correction ist negativ für $\varphi < 45°$, positiv für $\varphi > 45°$.

Tafel III.

Correction des Barometers wegen der Aenderung der Schwere mit der Höhe.

Meter	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0,00	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,12
1000	13	14	15	16	18	19	20	21	22	22
2000	23	24	25	26	27	27	28	29	30	30
3000	31	31	32	33	33	34	34	35	35	36
4000	36	37	37	38	38	38	39	39	39	40
5000	40	40	41	41	41	41	42	42	42	42

Tafel IV.

$$\log A\left(1+\alpha\frac{t_i+t_{ii}}{2}\right)$$

t_i+t_{ii}	log	Diff.	t_i+t_{ii}	log	Diff.	t_i+t_{ii}	log	Diff.	t_i+t_{ii}	log	Diff.
−80	4,19586	94	−40	4,23170	86	+ 1	4,26561	79	+41	4,29631	74
79	19680	93	39	23256	86	2	26640	79	42	29705	74
78	19773	93	38	23342	86	3	26719	79	43	29779	74
77	19866	92	37	23428	85	4	26798	79	44	29853	74
76	19959	92	36	23513	85	5	26877	79	45	29927	74
75	20051	92	35	23598	85	6	26956	79	46	30001	73
74	20143	92	34	23683	85	7	27035	79	47	30074	73
73	20235	92	33	23768	85	8	27114	79	48	30147	73
72	20327	92	32	23853	85	9	27193	78	49	30220	73
71	20419	92	31	23938	84	10	27271	78	50	30293	73
70	20511	91	30	24022	84	11	27349	78	51	30366	73
69	20602	91	29	24106	84	12	27427	78	52	30439	73
68	20693	91	28	24190	84	13	27505	78	53	30512	73
67	20784	91	27	24274	84	14	27583	78	54	30585	72
66	20875	91	26	24358	84	15	27661	78	55	30657	72
65	20966	90	25	24442	83	16	27739	78	56	30729	72
64	21056	90	24	24525	83	17	27816	77	57	30801	72
63	21146	90	23	24608	83	18	27893	77	58	30873	72
62	21236	90	22	24691	83	19	27970	77	59	30945	72
61	21326	90	21	24774	83	20	28047	77	60	31017	72
60	21416	89	20	24857	83	21	28124	77	61	31089	72
59	21505	89	19	24940	83	22	28201	76	62	31161	72
58	21594	89	18	24923	82	23	28277	76	63	31233	71
57	21683	89	17	25105	82	24	28353	76	64	31304	71
56	21772	89	16	25187	82	25	28429	76	65	31375	71
55	21861	89	15	25269	82	26	28505	76	66	31446	71
54	21950	88	14	25351	82	27	28581	76	67	31517	71
53	22038	88	13	25433	82	28	28657	76	68	31588	71
52	22126	88	12	25515	81	29	28733	76	69	31659	71
51	22214	88	11	25596	81	30	28809	75	70	31730	71
50	22302	88	10	25677	81	31	28884	75	71	31801	70
49	22390	87	9	25758	81	32	28959	75	72	31871	70
48	22477	87	8	25839	81	33	29034	75	73	31941	70
47	22564	87	7	25920	81	34	29109	75	74	32011	70
46	22651	87	6	26001	80	35	29184	75	75	32081	70
45	22738	87	5	26081	80	36	29259	75	76	32151	70
44	22825	87	4	26161	80	37	29334	75	77	32221	70
43	22912	86	3	26241	80	38	29409	74	78	32291	70
42	22998	86	2	26321	80	39	29483	74	79	32361	69
−41	23084	86	−1	26401	80	+40	29557	74	+80	32330	
			0	4,26481	80						

Tafel V.

Einheiten der fünften Decimale.

$$\log\left(1+0{,}378\times\frac{1}{2}\left[\frac{e'}{b_{,}}+\frac{e_{,,}}{b_{,,}}\right]\right)$$

Spannkraft des Wasserdampfes.

b	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	10 mm	11 mm	12 mm
400	41	82	123	164	206	247	289	330	371	411	450	490
420	39	78	117	157	196	235	275	314	353	391	429	467
440	37	75	112	150	187	225	262	299	337	374	410	445
460	36	72	107	143	179	215	251	286	322	358	392	426
480	34	69	103	137	172	206	240	274	309	343	376	408
500	33	66	99	132	165	198	230	263	296	329	361	392
520	32	63	95	127	158	190	221	253	284	317	347	377
540	30	61	91	122	152	183	213	244	274	305	334	363
560	29	59	88	118	147	177	206	235	265	294	322	350
580	28	57	86	114	143	171	200	228	257	284	311	338
600	28	55	83	110	139	166	194	221	248	275	301	327
620	27	53	81	107	134	161	187	214	240	267	291	317
640	26	52	78	104	130	156	181	207	233	258	282	307
660	25	50	76	101	126	151	176	200	225	250	274	297
680	24	49	74	98	122	147	171	194	218	242	266	289
700	24	47	72	95	119	142	165	189	212	235	258	281
720	23	46	69	92	115	138	160	183	206	228	251	273
740	22	45	67	89	111	134	155	178	200	222	244	265
760	22	44	65	87	108	130	151	173	195	216	237	258
780	21	42	63	84	105	126	147	169	190	211	231	252

Spannkraft des Wasserdampfes e.

b	13 mm	14 mm	15 mm	16 mm	17 mm	18 mm	19 mm	20 mm	21 mm	22 mm	23 mm	24 mm
400	530	571	611	652	692	733	773	813	853	894	934	974
420	505	544	582	621	659	698	736	775	813	852	890	928
440	482	519	556	593	630	666	703	740	777	813	850	886
460	461	497	532	567	603	638	673	708	743	778	813	848
480	442	476	510	544	578	611	645	679	712	746	780	813
500	425	457	490	522	555	587	619	652	684	716	749	781
520	408	440	471	502	533	565	596	627	658	689	720	751
540	393	424	454	484	514	544	574	604	634	664	694	724
560	379	408	438	467	496	525	553	582	611	640	669	698
580	366	394	423	451	479	507	535	562	590	618	646	674
600	354	381	408	436	463	490	517	544	571	598	625	652
620	343	369	395	422	448	474	500	526	553	579	605	631
640	332	358	383	409	434	459	485	510	535	561	586	611
660	322	347	372	396	421	445	470	495	519	544	568	593
680	313	337	361	385	409	432	456	480	504	528	552	576
700	304	327	350	374	397	420	443	467	490	513	536	559
720	295	318	341	363	386	408	431	454	476	499	521	544
740	287	309	332	354	376	398	419	441	463	485	507	529
760	280	301	323	344	365	387	408	429	451	472	493	515
780	273	294	315	335	356	377	398	419	440	461	481	502

Tafel VI.

Einheiten der fünften Decimale.

$$\log\left(1+0{,}378\,\frac{e'}{b'}\,\frac{4382}{h}\left[1-10^{-\frac{h}{10091}}\right]\right)$$

$\frac{e'}{b'}$	h in Meter										
	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
0,045	733	693	655	621	590	559	532	506	482	459	438
44	716	677	640	607	577	546	520	494	471	449	428
43	700	662	625	593	564	534	508	483	460	439	418
42	684	647	611	579	551	522	496	472	449	429	408
41	668	632	597	566	538	510	484	461	439	419	398
40	652	617	583	553	525	498	473	450	429	409	389
39	636	601	568	539	512	485	461	439	418	399	379
38	620	586	553	525	499	473	449	428	407	389	369
37	604	571	539	511	486	461	437	417	396	379	359
36	588	556	525	498	473	449	426	406	386	369	350
35	572	541	511	485	460	437	415	395	376	359	341
34	555	525	496	471	446	424	403	383	365	348	331
33	538	509	481	457	433	411	391	371	354	337	321
32	522	493	466	443	420	398	379	360	343	327	311
31	506	478	452	429	407	386	367	349	332	317	301
30	490	463	438	415	394	374	355	338	322	307	292
29	473	447	423	401	380	361	343	326	311	296	282
28	456	431	408	387	367	348	331	315	300	286	272
27	440	416	393	373	354	335	319	304	289	276	262
26	424	401	379	359	341	323	307	293	279	266	253
25	408	386	365	346	328	311	296	282	269	256	244
24	391	370	350	332	315	298	284	270	258	245	234
23	375	354	335	318	302	286	272	259	247	235	224
22	359	339	320	304	289	274	260	248	236	225	214
21	343	324	306	290	276	262	249	237	225	215	204
20	327	309	292	277	263	250	238	226	215	205	195
19	310	293	277	263	249	237	226	214	204	194	185
18	293	277	262	249	236	224	214	202	193	183	175
17	277	262	248	235	223	211	202	191	182	173	165
16	261	247	234	221	210	199	190	180	171	163	155
15	245	232	220	208	197	187	178	169	161	153	146
14	228	216	205	194	184	174	166	157	150	143	136
13	212	200	190	180	171	161	154	146	139	133	126
12	196	185	175	166	158	149	142	135	128	123	116
11	180	170	161	152	145	137	130	124	118	113	107
10	164	155	147	139	132	125	119	113	108	103	98
9	147	139	132	125	118	112	107	101	97	92	88
8	130	123	117	111	105	99	95	90	86	82	78
7	114	107	102	97	92	87	83	79	75	72	68
6	98	92	88	83	79	75	71	68	64	62	59
5	82	77	74	69	66	63	60	57	54	52	50
4	65	61	59	55	52	50	48	45	43	41	40
3	48	45	44	41	39	37	36	33	32	30	30
2	32	30	29	27	26	24	24	22	21	20	20
1	16	15	15	14	13	12	12	11	11	10	10

Tafel VII.

Einheiten der fünften Decimale.

$$\log\left(1+\frac{5}{8}\frac{27+h}{r}\right)$$

Seehöhe der unteren Station *Z*.

h	0	200	600	1000	1400	1800	2200	2600	3000	3500	4000
50	0	2	5	9	12	15	19	22	26	30	34
200	1	3	6	9	13	16	20	23	26	31	35
400	2	3	7	10	14	17	20	24	27	31	36
600	3	4	8	11	14	18	21	25	28	32	36
800	3	5	9	12	15	19	22	26	29	33	37
1000	4	6	9	13	16	20	23	26	30	34	38
1400	6	8	11	14	18	21	25	28	31	36	40
1800	8	9	13	16	20	23	26	30	33	37	42
2200	9	11	14	18	21	25	28	31	34	39	44
2600	11	13	16	20	23	26	30	33	36	41	45
3000	13	14	18	21	25	28	31	35	38	43	47
3500	15	17	20	23	27	30	34	37	40	45	49
4000	17	19	22	26	29	32	36	39	43	47	51
4500	19	21	24	28	31	34	38	41	45	49	53
5000	21	23	26	30	33	36	40	44	47	51	55
5500	23	25	28	32	35	38	42	46	49	53	57
6000	26	27	31	34	37	40	45	48	51	55	60
6500	28	29	33	36	39	43	47	50	53	57	62
7000	30	31	35	38	42	45	49	52	55	60	64
7500	32	34	37	40	44	47	51	54	57	62	66
8000	34	36	39	43	46	49	53	56	60	64	68

Tafel VIII.

Einheiten der fünften Decimale.

$$\log\left(1+0{,}00259\cos 2\varphi\right)$$

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	112	112	112	112	111	110	110	109	108	106
10	105	104	103	102	100	98	96	94	91	89
20	86	83	80	77	74	71	68	65	62	59
30	56	53	50	46	43	39	35	31	28	24
40	20	16	12	8	4	0	− 4	− 8	− 12	− 16
50	− 20	− 24	− 28	− 31	− 35	− 39	− 43	− 46	− 50	− 53
60	− 56	− 59	− 62	− 65	− 68	− 71	− 74	− 77	− 80	− 83
70	− 86	− 89	− 91	− 94	− 96	− 98	− 100	− 102	− 103	− 104
80	− 105	− 106	− 108	− 109	− 110	− 110	− 111	− 112	− 112	− 112

Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung.

Von

August Häussler.

I. Theil.

Voraussetzungen.

Der Zweck der nachfolgenden Untersuchung besteht in dem Nachweis, dass unter gewissen Voraussetzungen jedes Atom, wenn es rotirende Bewegung um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe besitzt, zu einem Centrum zweier gleichzeitiger Kräfte-Actionen wird, von welchen die eine von aussen auf das Atom, die andere von dem Atom nach seiner Umgebung gerichtet ist und welche geeignet sind, die mechanische Grundlage von attractiven und repulsiven Molecularkräften darzustellen. Die erwähnten Voraussetzungen umfassen

1. die Beschaffenheit der Atome,
2. die Beschaffenheit des Raumes, in welchem die Rotationsbewegung erfolgt,
3. das Wesen und die Gesetze der Kraft als Ursache aller Bewegungen der Atome,

und halten sich, wie man bei näherer Prüfung finden wird, durchaus innerhalb der Grenzen nicht nur einer begreifbaren Möglichkeit, sondern auch derjenigen Wahrscheinlichkeit, welche in den meisten, bisher maassgebenden Hypothesen bereits ihren Ausdruck fand. Insbesondere mit den beiden ersten Punkten der Voraussetzungen können wir uns daher ziemlich rasch abfinden, während allerdings die Gesetze der Kraft einer ausführlicheren Entwicklung bedürfen.

Alle uns bekannte Materie besteht aus einer Anzahl kleinster, unzerstörbarer Körper, den Atomen, welche untheilbar, unveränderlich, starr und undurchdringlich sind. Als materieller Körper besitzt jedes Atom eine bestimmte räumliche Ausdehnung, welche sein Volumen bildet. Dasselbe findet seine Grenze an der Oberfläche des Atomes und wird durch seine Gestalt bedingt; über letztere machen wir keine besondere Voraussetzung, für unsere Zwecke genügt die Annahme einer

Kugelgestalt. Das Volumen eines jeden Atoms wird von der Atomsubstanz ausgefüllt, welche die Eigenschaft der Masse, d. h. einen specifischen Widerstand gegen die Einwirkung einer Kraft besitzt; die Masse eines Atoms wird daher durch das Product aus Quantität und Masse der Atomsubstanz dargestellt. Endlich sind alle Atome an und für sich absolut träge, können indessen durch Einwirkung einer Kraft in Bewegung gesetzt werden.

Alle Atome sind durch Zwischenräume voneinander getrennt, welche mit dem Medium des Aethers erfüllt sind. Alle Atombewegungen, somit auch die angenommene Rotation, vollziehen sich demnach im äthererfüllten Raum. Der Aether bildet ein Gas im Sinne der kinethischen Gastheorie und besteht aus Aetheratomen, welche, ebenso wie die Atome der chemischen Elementarstoffe, materielle Körper von einem bestimmten Volumen und einer bestimmten Substanz, untheilbar, unveränderlich, starr und undurchdringlich sind, die Eigenschaft der Masse besitzen und, infolge der Einwirkung von Kräften, sich im Weltraum gleichmässig nach allen Richtungen bewegen. Die Aetheratome stimmen ferner untereinander vollständig überein, sind jedoch in Vergleichung zu den Atomen eines chemischen Elementarstoffes von verschwindend kleinen Volumen; ihre Gestalt kommt bei ihrer Kleinheit nicht in Betracht, wir können daher ebenfalls die einer Kugel zur Voraussetzung machen. In Bezug auf die Eigenschaften bildet daher nur die Grösse des Volumens einen wesentlichen Unterschied zwischen den Aetheratomen einerseits und den Atomen der chemischen Elementarstoffe andrerseits.

Sobald wir jedoch bei einer Vergleichung beider Atomgattungen den Bewegungszustand mit in Betracht ziehen, finden wir, dass noch zwei wichtige Unterschiede zwischen ihnen obwalten, welche sich aus der Voraussetzung, dass der Aether ein Gas im Sinne der kinethischen Gastheorie ist, ergeben:

1. Zwischen den einzelnen Aetheratomen muss ein absolut leerer Raum existiren, in welchem ihre fortschreitende Bewegung sich vollziehen kann. Im Gegensatz hierzu bewegen sich alle Atome der chemischen Elementarstoffe im äthererfüllten Raum, müssen demnach bei ihrem Voranschreiten auf den constanten Widerstand der Aetheratome stossen.

2. Da in der Gesammtheit des Aethers die Summen der nach allen einzelnen Richtungen wirksamen Kräfte einander gleich sind, so folgt, dass in demselben Zeitraum nach je zwei direct entgegengesetzten Richtungen eine gleiche Anzahl Aetheratome mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegt. Hieraus ergibt sich weiter, dass für die Gasammt-

heit des Aethers eine von Raum zu Raum fortschreitende Bewegung nicht stattfinden kann, da eine solche nur dann vorhanden ist, wenn eine Differenz der einander entgegenwirkenden Kräfte, beziehentlich eine Differenzbewegung der einzelnen Theile des Aethers gegeben ist. Die Gesammtheit des Aethers füllt demnach die Gesammtheit des Raumes ruhend aus. Umgekehrt bildet alle uns bekannte Materie einen Bestandtheil von Himmelskörpern, welche durch den Raum voranschreitende Bewegung besitzen. Damit haben wir einen zweiten wichtigen Unterschied zwischen den Aetheratomen und den Atomen der chemischen Elementarstoffe statuirt. Die Aetheratome sind einzelne, voneinander unabhängige, frei bewegliche Körper und besitzen eine vollständig selbständige Bewegung, während ihre Gesammtheit, der Aether den Raum ruhend erfüllt. Umgekehrt existiren die Atome der chemischen Elementarstoffe nur in gruppenweiser Vereinigung, ohne Freiheit und Selbständigkeit der Bewegung; dieselbe ist vielmehr der Bewegung der gesammten Gruppe untergeordnet, zu welcher jedes einzelne Atom gehört. Jede Atomgruppe besitzt eine durch den Raum voranschreitende Bewegung, welche unter Zugrundelegung einer kurzen Strecke als geradlinig bezeichnet werden kann und deren Richtung und Geschwindigkeit von jedem einzelnen Atom innegehalten wird.

Das Vorhandensein des Aethers lässt sich nicht direct nachweisen; die Hypothesen von seiner Existenz und den ihm beigelegten Eigenschaften stützen sich

1. auf die Fortpflanzung von Licht und Wärmewellen sowohl durch den absolut atomfreien Raum als auch von Himmelskörper zu Himmelskörper,

2. auf den Widerstand, welchen die Planeten bei ihrem Voranschreiten auf ihrer Bahn überwinden müssen, da sie, entgegen den Gesetzen der Centralbewegung, keine Beschleunigung der Bewegungsgeschwindigkeit erfahren.

Näher hierauf einzugehen ist nicht statthaft; wir würden uns damit zu weit von dem Ziel unserer Untersuchung entfernen.

Wir können nun zu dem dritten und wichtigsten Theil unserer Voraussetzungen, welcher die Gesetze der Kraft umfasst, übergehen und definiren zunächst:

„Kraft ist das immaterielle Princip aller Bewegung." Das Wesen der Kraft ist jedoch damit keineswegs genügend erfasst; diese Definition bedarf vielmehr noch einiger Ergänzungen, welche nicht exact bewiesen werden können und daher als an den Begriff Kraft geknüpfte Voraussetzungen behandelt werden müssen. Wir fassen dieselben in folgenden Sätzen zusammen:

I. Kraft existirt nur in Verbindung mit Materie.

II. Die Summe der in dem Universum vorhandenen Kraft bildet ein unzerstörbares Ganzes, welches weder vermehrt noch vermindert werden kann.

III. Es gibt nur eine Art von Kraft; ihre Wirkung kann nur in geradlinig fortschreitender Bewegung bestehen, deren Geschwindigkeit direct proportional der Grösse der mit einer Materie verbundenen Kraft und umgekehrt proportional dem Product aus Quantität und Masse der die Kraft aufnehmenden Materie ist.

Von diesen Sätzen bedarf der zweite wohl kaum noch einer näheren Begründung; derselbe enthält eine längst anerkannte Wahrheit. Die beiden andern Sätze lassen sich jedoch nicht beweisen; sie erhalten erst dadurch eine Bestätigung, dass sich aus ihnen mit der Wirklichkeit übereinstimmende Gesetze der Kraft ableiten lassen. Der erste Satz, dass Kraft nur in Verbindung mit Materie existirt, lässt sich theilweise darauf zurückführen, dass zur Vollziehung einer Bewegung auch ein Bewegtes, d. h. ein Etwas gegeben sein muss, welches nach und nach verschiedene Räume erfüllt und dadurch von Raum zu Raum voranschreitet. Alles, was den Raum erfüllt, ist jedoch materiell, mithin kann auch nur Materie durch Kraft in Bewegung gesetzt werden. Damit ist jedoch nur bewiesen, dass, wenn Kraft eine Verbindung eingeht, dieselbe sich immer auf eine Materie erstreckt. Unsere Voraussetzung, dass Kraft nicht anders als in der Verbindung mit Materie existirt, geht jedoch weiter und könnte nur experimentell durch den Nachweis bestätigt werden, dass sowohl Kraft, wenn sie eine Materie verlässt, stets auf eine andere übergeht, als auch dass, wenn eine Materie Kraft aufnimmt, letztere stets von einer andern Materie herrührt, Solange wir jedoch die Atombewegungen und insbesondere den Aether als Träger von Kraft nicht direct wahrnehmen können, kann dieser experimentelle Nachweis nie geliefert werden.

Wenn auch die zur Charakterisirung des Wesens der Kraft erforderlichen Voraussetzungen nicht bewiesen werden können, so lassen sie sich andrerseits sehr wohl begreifen, und zwar dadurch, dass wir Kraft und Bewegung als vollkommen identische Begriffe auffassen. Wenn Kraft nur als Bewegung existirt, so folgt, dass Kraft auch nur in Verbindung von Materie existirt, da, wie vorhin erwähnt, nur Materie Bewegung vollziehen kann. Aus diesem Satz folgt dann weiter, dass eine Fortpflanzung von Kraft durch den absolut leeren Raum hindurch ausgeschlossen ist; mithin muss die Summe aller mit der Materie verbundenen Kraft eine unveränderliche Grösse darstellen, womit das Gesetz von der Erhaltung der Kraft bewiesen ist. — Diese

Identificirung von Kraft und Bewegung entspricht ausserdem vollständig der Definition, welche wir vorhin an den Begriff „Kraft" knüpften, während andrerseits alle Bewegung als der wahrnehmbare Ausdruck für die Thatsache erscheint, dass ein immaterielles Agens, Kraft genannt, mit der die Bewegung vollziehenden Materie verbunden sein muss.

Wir wenden nun unsere Voraussetzungen von dem Wesen der Kraft auf die Bewegungen der Atome und Aetheratome an und gelangen hierbei zu folgenden allgemeinen Schlüssen:

1. Da Kraft nur in Verbindung mit Atomen existirt, andrerseits aber jede Vermehrung oder Verminderung der vorhandenen Kraft ausgeschlossen ist, muss, so oft ein Atom die Einwirkung einer Kraft erhält, diese Kraft von einem andern Atom ihren Ausgangspunkt genommen haben. Der Zunahme der Kraft an einer Stelle entspricht daher eine gleichwerthige Abnahme an einer andern Stelle. Ein Atom, von welchem Kraft ihren Ausgangspunkt genommen hat, muss daher vor diesem Zeitpunkt selbst in Bewegung begriffen gewesen sein, womit allerdings nicht ausgeschlossen ist, dass es auch nach diesem Zeitpunkt noch Bewegung besitzen kann; die Geschwindigkeit derselben muss sich jedoch in diesem Falle proportional der abgegebenen Kraft vermindert haben.

2. Da Kraft nur in Verbindung mit Atomen existirt, kann der Uebergang von Kraft von einem Atom auf ein anderes nur bei einer unmittelbaren Berührung stattfinden. Hieraus folgt, dass, da alle Atome und Aetheratome durch Zwischenräume voneinander getrennt sind, die Berührung nur bei voranschreitender Bewegung erfolgen kann und in einem Zusammenprall oder Zusammenstoss zweier oder mehrerer Atome bestehen muss. Jedem Uebergang von Kraft liegt daher ein mechanischer Stoss zu Grunde, dessen Richtung und Energie durch die Richtung und Grösse der mit dem stossenden Atom verbundenen Kraft bedingt wird.

Da nach allen Erfahrungen ein mechanischer Stoss eine geradlinige Bewegung des stossenden Körpers zur Voraussetzung und einen Antrieb zu geradliniger Bewegung für den gestossenen Körper zur Folge hat, so deckt sich der eben gemachte Schluss, dass Kraft zwischen den Atomen sich nur durch mechanischen Stoss überträgt, andrerseits mit der von den Prämissen des Schlusses ganz unabhängigen Voraussetzung, dass nur eine Art von Kraft als Princip geradlinig fortschreitender Bewegung existirt.

3. Da Kraft sich nur durch einen mechanischen Stoss überträgt, so muss derselbe die Basis aller Kräfte-Actionen und somit auch aller Gesetze bilden, welche die Wirkungen von Kraft zum Inhalt haben.

4. In der Natur des mechanischen Stosses liegt es begründet, dass ein stossendes auf ein gestossenes Atom durch einen Stoss auch nur einmal einwirken und Kraft übertragen kann; denn entweder wird die Berührung zu einer dauernden, so hat die gegeneinander gerichtete Bewegung ihr Ende erreicht, mithin ist auch keine gegeneinander gerichtete Kraft mehr vorhanden, welche von dem stossenden auf das gestossene Atom übergehen könnte, oder die Berührung währt nur den Moment des Zusammenstosses; aus der nachher eintretenden Trennung und gegenseitigen Entfernung der Atome folgt alsdann, dass jeder weitere Uebergang von Kraft ausgeschlossen ist. Mithin kann jede Kraft nur einen momentanen Antrieb zur Bewegung bewirken, was wir (im Gegensatz zu den constanten Kräften) auch so ausdrücken können, dass es, mit Rücksicht auf die Dauer der Wirkung, nur momentane Kräfte, oder, da alle Kräfte ihrer Natur nach identisch sind, dass es nur momentane Kraft gibt.

Hieraus folgt weiter, dass eine besondere Art von constanter Kraft, welche einen continuirlichen Antrieb zur Bewegung und dadurch eine constante Beschleunigung der Bewegungsgeschwindigkeit eines Atoms (oder Körpers) bewirkt, nicht existiren kann. In allen denjenigen Fällen, z. B. bei der Wirkung der Schwerkraft, in welchen eine constante Beschleunigung der Bewegungsgeschwindigkeit wahrgenommen wird, kann daher die Ursache der gesammten Bewegung nur momentane Kraft sein. Die Beschleunigung der Bewegungsgeschwindigkeit beweist nur, dass fortwährend neue momentane Einzelkräfte von gleicher Richtung und Grösse auf den (durch die Schwerkraft bewegten) Körper übergehen, wodurch naturgemäss eine regelmässige Beschleunigung der Bewegung, zugleich aber auch eine constante Vermehrung der mit dem bewegten Körper verbundenen Kraft bewirkt wird.

5. Da Kraft sich durch mechanischen Stoss überträgt, so ist eine von einem Atom auf ein anderes übergehende Kraft bestimmt durch

a) die Grösse,
b) die Richtung,
c) den Angriffspunkt,

welch letzterer mit dem Zielpunkt des Stosses, beziehentlich dem Berührungspunkt der zusammenstossenden Atome naturgemäss übereinstimmt.

Eine constante Kraft ist definirt durch

a) die Grösse,
b) die Richtung,

c) den Angriffspunkt,

d) die Intensität oder Häufigkeit, mit welcher die einzelnen momentanen Kräfte in der Zeiteinheit sich wiederholen.

Ist die constante Kraft regelmässig, so müssen nicht nur die Grössen der Einzelkräfte, sondern auch die Intensitäten in den aufeinander folgenden Zeiträumen untereinander übereinstimmen.

Sobald wir die Grösse und Richtung einer mit einem gegebenen Atom verbundenen Kraft kennen, sind wir nach unserer Voraussetzung III im Stande, die resultirende Bewegung zu bestimmen; wir gehen damit zu den gesetzmässigen Wirkungen oder den Gesetzen der Kraft über, deren Basis, gemäss den bisherigen Ausführungen über das Wesen der Kraft, für die ungestörte Bewegung in unserer Voraussetzung III, für die gestörte Bewegung in dem Satz von dem mechanischen Stoss zu erblicken ist. Bei der Entwicklung der Gesetze der Kraft haben wir ferner, als Folge unserer bisherigen Voraussetzungen, in Betracht zu ziehen, dass es zwei verschiedene Klassen von Materie gibt, Aetheratome und Atome, von welchen sich erstere im absolut leeren Raum, letztere im Medium des Aethers bewegen. Alle Gesetze der Kraft, welche auf Brauchbarkeit Anspruch machen wollen, haben sich demnach gleichzeitig auf beide Kategorien von Atomen zu erstrecken. Die Gesetze der Kraft, soweit sie für unsere weiteren Untersuchungen unentbehrlich sind, fassen wir in folgenden Sätzen zusammen.

I. Nach unseren Voraussetzungen kann eine Bewegung ohne Störung nur bei den Aetheratomen während der unendlich kurzen Zeit stattfinden, welche zwischen zwei zeitlich aufeinander folgenden Zusammenstössen liegt; denn da die Aetheratome sich im absolut leeren Raum bewegen, so ist, während dieses Zeitraums, jede Aenderung der mit einem derselben verbundenen Kraft ausgeschlossen. Ein Aetheratom von der Masse m, welches mit der Kraft P verbunden ist, besitzt daher während des gedachten Zeitraums eine gleichmässige Bewegungsgeschwindigkeit v, welche proportional der Grösse der Kraft und umgekehrt proportional dem Product aus der Quantität 1 und der Masse m des Atoms ist und demnach durch die Gleichung $v = \frac{P}{m}$ sich ausdrücken lässt. Die Richtung der Bewegung ist ferner geradlinig und fällt mit der Richtung der gegebenen Kraft P zusammen. Solange das betrachtete Aetheratom mit andern Aetheratomen oder Atomen nicht in Berührung kommt, ist jede äussere Einwirkung ausgeschlossen; die Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung müssen daher nothwendigerweise constant bleiben, gleichviel, ob das Atom bereits eine kurze oder lange Strecke zurückgelegt hat. Eine Beschleunigung der Bewegung ist daher ebenso undenkbar wie ein Verbrauch von Kraft

zur Erhaltung der Bewegung; die Kraft P kann daher in jeder Phase der Bewegung sich unvermindert wieder auf andere Atome übertragen.

II. Wenn wir statt eines Aetheratoms ein Atom eines chemischen Elementarstoffes von der Masse M mit der Kraft P sich verbinden lassen, so erhält dasselbe ebenfalls eine theoretische Anfangsgeschwindigkeit $V = \frac{P}{M}$. Da das Atom sich jedoch im äthererfüllten Raum bewegt, kann die Bewegung nur dadurch sich vollziehen, dass fortwährend Aetheratome aus denjenigen Räumen verdrängt werden, welche das Atom bei seiner fortschreitenden Bewegung nach und nach einnimmt. Die hierzu erforderliche Kraft hängt ihrer Grösse nach ab

1. von dem Volumen und der Gestalt des Atoms,
2. von der Elasticität des Aethers,
3. von der Bewegungsgeschwindigkeit des Atoms,

und geht von dem verdrängenden Atom auf die verdrängten Aetheratome über. Die mit dem Atom verbundene Kraft P muss sich daher stetig verringern und damit zugleich die Bewegungsgeschwindigkeit abnehmen; nach einer gewissen Zeit muss alle Kraft des Atoms zur Ueberwindung des Widerstandes des Aethers verbraucht worden sein und gelangt dasselbe dann in den Ruhezustand.

Den Beweis für diesen Satz bildet die analoge Bewegung fester Körper in dem Medium der Luft.

III. Wenn wir auf das in Bewegung befindliche Aetheratom von der Masse m eine zweite Kraft P_1 wirken lassen, deren Richtung mit derjenigen der Kraft P genau übereinstimmt, so folgt, dass die Masse m sich dann mit einer Geschwindigkeit $v_1 = \frac{P + P_1}{m}$ weiter bewegt; denn, da es nur eine Art von Kraft gibt, summiren sich beide in ihren Richtungen übereinstimmenden Kräfte P und P_1 zu einer einheitlichen Grösse von mit der Masse m verbundener Kraft, infolge dessen eine einmalige Beschleunigung der Bewegungsgeschwindigkeit proportional dem Zuwachs an Kraft eintritt.

IV. Bei den unter I und III aufgeführten Fällen konnte das die Kraft aufnehmende Aetheratom sich ungehindert in der Richtung der Kraft bewegen; wir haben daher auch den abweichenden Fall in Betracht zu ziehen, wo ein Aetheratom oder Atom an der Verfolgung einer bestimmten Bewegungsrichtung durch den Widerstand eines ruhenden oder mit Kraft verbundenen Atoms verhindert wird. In der Hauptsache werden hier folgende Fälle zu berücksichtigen sein:

1. resultirende Bewegung eines Aetheratoms, wenn auf dasselbe in ruhend gedachtem Zustand gleichzeitig aus verschiedenen Richtungen Kräfte einwirken;

2. resultirende Bewegung zweier Aetheratome, welche aus verschiedenen Richtungen gleichzeitig auf ein ruhend gedachtes Aetheratom eingewirkt und Kraft übertragen haben;
3. centraler Zusammenstoss aus direct entgegengesetzter Richtung;
4. centraler Zusammenstoss bei Gleichheit der Bewegungsrichtung;
5. schiefer Stoss.

Alle diese verschiedenen Fälle resultirender Bewegungen lassen sich aus der Anwendung eines einzigen einheitlichen Gesetzes entwickeln, welches sich wie folgt fassen lässt:

„Wird eine Kraft an der Verfolgung ihrer Bewegungsrichtung gehindert, so tritt eine Zerlegung derselben in zwei rechtwinklige Componenten ein, wobei die sich zerlegende Kraft die Tendenz zeigt, so wenig als möglich aus ihrer ursprünglichen Richtung abzuweichen."

Da dieses Gesetz erst dadurch seine Bestätigung findet, dass es uns in Stand setzt, vernunftgemässe Gesetze der Kraft zu entwickeln, so sind wir zunächst genöthigt, dasselbe als eine unbeweisbare, im Wesen der Kraft begründete Voraussetzung voranzuschicken.

V. Wirken zwei Kräfte P und P_1 gleichzeitig aus verschiedenen Richtungen auf ein ruhendes Aetheratom ein, so kann dasselbe infolge seiner Untheilbarkeit sich nur nach einer Richtung bewegen, welche nothwendigerweise von derjenigen verschieden sein muss, welche jede Kraft für sich allein hervorbringen würde, da beide Kräfte sich gegenseitig in der ungehinderten Fortsetzung ihrer geraden Bewegungsrichtung Widerstand leisten. Die resultirende Bewegung des Aetheratoms m erhält man durch die bekannte Construction eines Parallelogramms, dessen Seiten S und S_1 durch diejenigen Wegestrecken dargestellt werden, welche das Aetheratom in der Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn jede der beiden Kräfte P und P_1 einzeln auf dasselbe eingewirkt hätte. Die von dem Ausgangspunkt der Kräfte aus gezogene Diagonale des Parallelogramms gibt alsdann die Richtung an, welche das Aetheratom einschlagen wird, wenn die beiden Kräfte P und P_1 gleichzeitig auf die Masse m einwirken. Gleichzeitig bezeichnet die Länge der Diagonale die Wegestrecke, welche die Masse m in der Zeiteinheit zurücklegen wird; denn ebenso wie die Seiten des Parallelogramms gleichzeitig die Richtung und die in der Zeiteinheit zurückgelegte Wegestrecke bei der getrennten Einwirkung der beiden Kräfte darstellen, werden auch durch die resultirende Diagonale gleichzeitig beide Relationen wiedergegeben.

Die Länge der Diagonale lässt sich nach dem Satz

$$D^2 = S^2 + S_1^2 + 2SS_1 \cos \alpha$$

leicht berechnen. Sei R die auf die Diagonale entfallende Kraft, so ergibt sich für die Geschwindigkeiten das Verhältnis

$$\frac{P+P_1}{m} : \frac{R}{m} = S + S_1 : \sqrt{S^2 + S_1^2 + 2SS \cos \alpha}$$

und hieraus für R der Werth

$$R = \frac{(P+P_1)\sqrt{S^2 + S_1^2 + 2SS \cos \alpha}}{S + S_1}.$$

VI. Aus der vorstehenden Gleichung ergibt sich, dass bei Gleichheit der Kräfte P und P_1 die Grösse R einen sehr verschiedenen Werth annehmen kann und dass diese Verschiedenheit von der Grösse des Winkels bedingt wird, unter welchem die Richtungen von P und P_1 sich schneiden. Da nun die Länge der Diagonale stets kleiner als die Summe der beiden Seiten $S + S_1$ ist, so erhellt, dass bei jeder Winkelstellung immer nur ein grösserer oder geringerer Theil der Kräfte P und P_1 auf das Aetheratom m übergehen kann, und dass somit der übrige Theil auf eine von der Diagonale abweichende Richtung entfallen muss. Ausser der Diagonale resultiren daher auch noch andere Kraft-Componenten, deren Richtung und Grösse ebenfalls einer Feststellung bedürfen.

Zu diesem Zweck sind wir genöthigt, unsere in Satz IV ausgesprochene Voraussetzung heranzuziehen. Der Fall, dass zwei Kräfte sich in der Verfolgung ihrer geradlinigen Bewegungsrichtung Widerstand leisten, tritt bei den gegebenen Kräften P und P_1 ein. Jede derselben zerlegt sich daher in zwei Componenten, von welchen eine auf die den beiden Kräften gemeinschaftliche Richtung der Diagonale, die andere auf diejenige Richtung entfällt, welche mit der Diagonale einen rechten Winkel bildet und zugleich von der Bewegungsrichtung der sich theilenden Kraft am wenigsten abweicht. Diese geringste Abweichung ist dann vorhanden, wenn die zweite Componente in dieselbe Ebene fällt, in welcher auch die Richtung der ersten Componente und diejenige der sich theilenden Kraft liegen. Hieraus ergibt sich, dass bei dem Zusammenstoss der beiden Kräfte P und P_1 je zwei Componenten entstehen müssen, von welchen je eine auf die gemeinschaftliche Richtung der Diagonale entfällt, und dass ausserdem aus der Kraft P eine Componente π und aus der Kraft P_1 eine Componente π_1 hervorgeht. Die resultirenden Kräfte π und π_1 wirken ferner auf einen Punkt aus direct entgegengesetzter Richtung; denn beide entstehen an dem Punkt, wo auch die Componente R beginnt, beide bilden mit ihr einen

rechten Winkel und fallen ferner in die gleiche Ebene, in welcher auch P, P_1 und R liegen.

Die Richtung der resultirenden Componenten π und π_1 ist damit definirt; es erübrigt noch, auch die Grösse der auf jede derselben entfallende Kraft zu präcisiren. Zu der Bestimmung der Grössen π und π_1 gelangen wir durch die Erwägung, dass beide Kräfte P und P_1 die Tendenz besitzen, so wenig als möglich und nur so weit aus der ursprünglichen Richtung abzuweichen, als dies durch den Widerstand der andern Kraft, in ihrer Richtung zu beharren, bedingt wird. Der Widerstand der Kraft P gegen das Beharrungsbestreben der Kraft P_1 findet in der Grösse der Componente π_1, der Widerstand der Kraft P_1 gegen das Beharrungsbestreben der Kraft P in der Grösse der Componente π_1 seinen Ausdruck, wie sich unmittelbar aus der direct entgegengesetzten Richtung beider Componenten ergibt. Da nun die auf die Componenten π oder π_1 entfallende Kraft um so grösser wird, je mehr die Diagonale von der ursprünglichen Richtung von P oder P_1 abweicht, so folgt, dass zwischen den Richtungen von P und P_1 eine Richtung für die resultirende Diagonale existiren muss, bei welcher die auf ihr senkrecht stehenden Componenten π und π_1 sich das Gleichgewicht halten. Aus der Beharrungstendenz einer jeden einzelnen Kraft P und P_1 ergibt sich nun, dass keine derselben sich weiter aus ihrer ursprünglichen Richtung abdrängen lässt, als bis zu dem Punkte, wo der Widerstand der Kraft P sich mit dem Widerstand der Kraft P_1 das Gleichgewicht hält, d. h. wo die auf die Componenten π und π_1 entfallenden Kräfte einander gleich sind. Hieraus folgt

$$\pi = \pi_1$$

und da ferner nach dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft

$$P + P_1 = R + \pi + \pi_1$$

ist, so erhalten wir die Werthe

$$\pi = \frac{P + P_1 - R}{2}; \quad \pi_1 = \frac{P + P_1 - R}{2}.$$

VII. Wirken zwei Kräfte P und P_1, welche mit den Atomen A und B verbunden sein und zunächst als gleich gross angenommen werden sollen, aus direct entgegengesetzter Richtung aufeinander ein, so ergibt sich aus den Eigenschaften der Starrheit und Undurchdringlichkeit der Atome, dass infolge des Zusammenstosses die Fortsetzung der Bewegung zur Unmöglichkeit wird, da keine der beiden Kräfte im Stande ist, den entgegenwirkenden gleich grossen Widerstand zu überwinden. Ein Stillstand ist jedoch nur dann möglich, wenn keine Kraft mehr in der Richtung der Bewegung wirksam ist. Da nun die beiden Kräfte P und P_1 ihrer Grösse nach erhalten bleiben, muss nothwendigerweise

eine Aenderung der Richtung, eine Flexion beider Kräfte eintreten. In Betreff der Grösse des Flexionswinkels bedarf es keiner weiteren Auseinandersetzungen, dass hier nur zwei Möglichkeiten in Betracht kommen können, und zwar eine rechtwinklige Flexion oder eine Reflexion nach direct entgegengesetzter Richtung. Nach unserer Voraussetzung von der Zerlegung einer in der Verfolgung ihrer Bewegungsrichtung behinderten Kraft in zwei Componenten, von welchen eine alle in der Richtung der Bewegung wirkende, die andere alle hierauf senkrechte Kraft aufnimmt, sind wir genöthigt, uns für die Annahme einer rechtwinkligen Flexion zu entscheiden; nur wird in diesem Falle die in der Richtung der Bewegung liegende Componente gleich Null, während alle Kraft auf die zweite, einen rechten Winkel mit der Richtung der Kraft bildende Componente übergeht.

Wir sind daher zu der Annahme berechtigt, dass infolge des Zusammenstosses sowohl die Kraft P des Atoms A als auch die Kraft P_1 des Atoms B eine rechtwinklige Flexion erleiden; hierbei stellt sich jedoch heraus, dass die Annahme einer rechtwinkligen Flexion allein nicht genügt, um die resultirende Richtung der beiden Kräfte zu bestimmen. Die rechtwinklige Flexion gibt vielmehr nur an, dass die beiden Kräfte P und P_1 in eine andere Ebene übergehen, welche auf der bisherigen Bewegungsrichtung senkrecht steht; innerhalb dieser neuen Ebene sind jedoch eine ganze Anzahl von Richtungen denkbar, welche die Kräfte P und P_1, von dem Punkte des Zusammenstosses ausgehend, einschlagen können. Da nun für keine der beiden Kräfte ein Grund vorliegt, irgend eine der möglichen Richtungen zu bevorzugen, so muss weiter angenommen werden, dass die gegebenen Kräfte P und P_1 ausser der rechtwinkligen Flexion eine radienförmige Zerteilung erleiden, welche sich gleichmässig auf alle Richtungen der neuen Fortpflanzungsebene erstreckt. Bei dieser Annahme kommen bei einer Umkehrung der resultirenden Kräfte wieder die Grössen P und P_1 in umgekehrter Richtung wieder zum Vorschein, während dies bei keiner andern Annahme der Fall sein würde.

Mit diesem Schluss sind wir zu einer Erkenntnis der mathematischen, jedoch noch nicht der in allen Fällen eintretenden wirklichen Fortpflanzungsrichtung der Kräfte gelangt. Dass hier ein Gegensatz zwischen dem Ergebnis der Theorie und der Wirklichkeit obwalten kann, geht unzweifelhaft aus unserer Voraussetzung hervor, dass Kraft nur in Verbindung mit Materie existirt und dass daher die Fortpflanzung der einander entgegenwirkenden Kräfte in der angegebenen mathematischen Richtung nur dann stattfinden kann, wenn Materie vorhanden ist, mit welcher die auf die einzelnen Radien entfallenden Kräfte sich verbin-

den können. Für die Beurtheilung der bei einem centralen Zusammenstoss aus direct entgegengesetzter Richtung resultirenden Kräfte kommen insbesondere folgende drei Fälle in Betracht.

I. Die vorausgesetzten Atome A und B seien Atome chemischer Elementarstoffe; sie bewegen sich alsdann in dem Medium des Aethers, dessen einzelne Atome von allen Seiten auf die beiden chemischen Atome A und B aufprallen und daher auch im Moment des Zusammenstosses in vielfacher Berührung mit denselben sind; aus naheliegenden Gründen muss sogar diese Berührung eine besonders vielseitige an dem Ort des Zusammenstosses der beiden Atome A und B sein. Es ist somit Materie vorhanden, auf welche die Kräfte P und P_1 nach dem Zusammenstoss der Atome A und B übergehen können. Letztere gelangen somit zur Ruhe, während die Kräfte P und P_1 unter rechtwinkliger Flexion und radienförmiger Zertheilung sich mit Aetheratomen verbinden.

II. Die vorausgesetzten Atome A und B seien Aetheratome. Sie bewegen sich demnach im absolut leeren Raum, und kann daher bei einem Zusammenprall ein Uebergang der Kräfte P und P_1 auf andere Materie nicht stattfinden, weil eine solche nicht vorhanden ist. Es muss daher angenommen werden, dass in dem vorliegenden Falle die Kräfte P und P_1 wohl ebenfalls die Tendenz einer rechtwinkligen Flexion besitzen, dass aber dieser Tendenz nicht Folge gegeben werden kann, da die Atome selbst untheilbar sind und ein Uebergang auf andere Materie ausgeschlossen ist. Da nun ein Stillstand der Atome mit einem Verschwinden der Kräfte P und P_1 gleichbedeutend wäre, bleibt nur eine Möglichkeit übrig, dass nach der ersten Flexion eine nochmalige rechtwinklige Flexion beider Kräfte erfolgt, wodurch dieselben eine Richtung erhalten, welche der ursprünglichen Bewegung direct entgegengesetzt ist. Die Grösse der mit jedem Atom verbundenen Kraft $P = P_1$ bleibt dagegen ungeändert.

III. Eine Flexion und radienförmige Zertheilung kann auch dann nicht eintreten, wenn wohl Materie vorhanden ist, gleichzeitig aber mit derselben Kräfte verbunden sind, welche der Flexion, beziehentlich der Fortpflanzung der zu flectirenden Kräfte in der aus einer einmaligen Flexion resultirenden Richtung einen mindestens gleich grossen, und daher unüberwindlichen Widerstand entgegensetzen. Das Vorhandensein eines unüberwindlichen Widerstandes muss die einmalige Flexion ebenso unmöglich machen wie das Nichtvorhandensein von anderer Materie und bleibt daher auch für diesen Fall einzig die Annahme einer doppelt rechtwinkligen Flexion, d. h. einer Reflexion übrig.

Das Gesetz von der rechtwinkligen Flexion und radienförmigen Zertheilung einer Kraft, welcher eine andere, gleich grosse Kraft aus

direct entgegengesetzter Richtung entgegenwirkt, bildet einen Fundamentalsatz für unsere spätere Beweisführung. Es ist daher nothwendig, dass derselbe unbedingte Anerkennung findet, und scheint es daher vortheilhaft, noch einige indirecte Beweise anzuführen, welche mit grösserer oder geringerer Wahrscheinlichkeit eine Bestätigung des genannten Gesetzes bilden. Als solche indirecten Beweise kommen in Betracht:

1. Die zahlreichen Analogien, welche die uns bekannten Bewegungen sichtbarer Materie bieten. Die Bewegung der Atome in dem Medium des Aethers lässt sich zutreffend mit den Bewegungen starrer, möglichst unelastischer Körper in dem Medium der Luft in Parallele stellen. Stossen derartige Körper mit gleichen Kräften aus direct entgegengesetzter Richtung aufeinander, so gelangen sie erfahrungsgemäss zur Ruhe, während die mit den Körpern verbundene Kraft als Bewegung der Luftatome und als Schall zum grossen Theil auf das umgebende Medium übergeht. Eine weitere zutreffende Analogie biet ein kräftig getriebener Wasserstrahl, welcher senkrecht auf eine harte Fläche aufprallt; auch hier erleidet der Strahl eine rechtwinklige Flexion, und die einzelnen Wassertheilchen zerstreuen sich in gleichmässiger Vertheilung nach allen Richtungen, ein Beweis, dass auch die in dem Strahl wirksame Kraft infolge des Widerstandes der Fläche die gleiche Umänderung erleidet, welche wir als allgemeines Gesetz für den Fall eines einer Kraft geleisteten Widerstandes aufgestellt haben.

2. Die Existenz und das Verhalten der constanten Kräfte. Ein Körper, auf welchen eine constante Kraft wirkt, kann sich nur dann dauernd im Zustand der Ruhe befinden, wenn aus direct entgegengesetzter Richtung eine gleich grosse c o n s t a n t e Kraft einwirkt, da jede nicht constante Kraft schliesslich kleiner werden müsste, als eine stetig wachsende Kraft. Da nun keine Kraft verloren gehen kann, so erklärt sich der Ruhezustand des Körpers dadurch, dass die beiden constanten Kräfte dauernd eine rechtwinklige Flexion und radienförmige Zertheilung erfahren. Würden wir hingegen annehmen, dass die constanten Kräfte sich reflectiren, so würde jeder derselben die eigene reflectirte Kraft entgegenwirken; eine Wirkung von constanter Kraft aus der Ferne nach einem Körper hin, wie sie z. B. bei der Schwerkraft nachgewiesen ist, könnte alsdann nicht wahrgenommen werden, denn durch die Reflexion müsste diese Wirkung wieder aufgehoben werden. Da jedoch solche Wirkungen existiren, so kann eine Reflexion der constanten Kräfte nicht stattfinden, woraus folgt, dass das Gesetz von der Erhaltung der Kraft nur durch die einzige Annahme von der rechtwinkligen Flexion und radienförmigen Zertheilung der constanten Kräfte aufrecht erhalten werden kann.

Wir haben bisher angenommen, dass die Kräfte P und P_1 einander gleich seien; setzen wir dieselben als ungleich, und zwar P grösser als P_1 voraus, so wird die kleinere Kraft vollständig, von der grösseren ein gleich grosser Theil flectirt. Die Differenz der Kräfte $P - P_1$ bleibt dagegen ihrer Richtung nach erhalten und geht, wenn wir annehmen, dass A und B Aetheratome seien, auf das zum Stillstand gelangte Atom B über. Hiernach würde für A eine Geschwindigkeit von $\frac{P_1}{m}$ in der Richtung der Kraft P_1, für B hingegen eine solche von

$$P_1 + \frac{(P - P_1)}{m} = \frac{P}{m}$$

in der Richtung der Kraft P resultiren; infolge des Zusammenstosses haben demnach die beiden Aetheratome ihre Richtungen und Geschwindigkeiten vertauscht.

Weit verwickelter wird jedoch die resultirende Bewegung, wenn die gegeneinander stossenden Atome verschiedene Massen besitzen; die alsdann resultirenden Bewegungen sind jedoch für unsere weiteren Untersuchungen gegenstandslos und kann daher hier nicht näher auf diesen Fall eingegangen werden.

VIII. Lässt man in dem eben erwähnten Falle die Kraft P_1 immer kleiner und schliesslich gleich Null werden, so wird auch die resultirende Bewegung des Aetheratoms A immer langsamer und schliesslich ebenfalls gleich Null. Stösst daher ein Aetheratom A auf ein ruhendes Aetheratom B, so geht die Differenz der Kräfte, demnach also die gesammte Kraft des Atoms A auf B über, während ersteres zur Rühe gelangt. Verringert man den Widerstand des Atoms B gegen A noch weiter, indem man dem Atom B eine langsame Bewegung in der Richtung des Atoms A gibt, so wird auch die Grösse der auf das Atom B übergehenden Kraft in demselben Verhältnis kleiner, als der Widerstand des Atoms B gegen A geringer wird. Der Widerstand ist jedoch, bei der vorausgesetzten Gleichheit der Atommassen, immer proportional der Differenz der Bewegungsgeschwindigkeiten. Hieraus folgt, dass, wenn zwei Aetheratome von gleicher Bewegungsrichtung, aber ungleicher Bewegungsgeschwindigkeit aufeinander prallen, die Differenz der Kräfte von dem stossenden auf das gestossene Atom übergeht, oder was hiermit gleichbedeutend ist, dass ein Austausch der Bewegungsgeschwindigkeiten ohne Aenderung der Bewegungsrichtungen stattfindet.

IX. Bei den bis jetzt in Betracht gezogenen Fällen der Kraftübertragung war centraler Stoss vorausgesetzt worden; es ist daher nothwendig, auch den abweichenden Fall, den schiefen Stoss und seine Consequenzen zu erörtern. Die eigenthümlichen Beziehungen zwischen

dem Mittelpunkt eines Atoms und der Richtung einer auf dasselbe einwirkenden Kraft ergeben sich aus unserer Voraussetzung, dass die Eigenschaft der Masse eine Eigenschaft der Atomsubstanz ist. Denken wir uns letztere bei dem Atom eines chemischen Elementarstoffs in eine unendlich grosse Zahl mathematischer Substanzeinheiten zerlegt, so folgt, dass jede derselben die Eigenschaft der Masse besitzt; das Product aus der Anzahl der Substanzeinheiten und der Masse einer jeden derselben stellt alsdann die Masse des Atoms dar. Damit nun das Atom eine fortschreitende Bewegung erhält, müssen die Massenwiderstände aller einzelnen Substanzeinheiten nicht nur überwunden, sondern auch gleichmässig überwunden werden, denn die fortschreitende Bewegung des Atoms besteht in einem gleichmässigen Voranschreiten aller Substanzeinheiten (in deren gleicher Bewegungsgeschwindigkeit und ihrer untereinander parallel bleibenden Bewegungsrichtung). Da nun eine Kraft sich nur durch mechanischen Stoss auf ein Atom übertragen kann, so folgt, dass sie unmittelbar nur auf einen mathematischen Punkt der Atomoberfläche, den Angriffspunkt, wirkt und dass von diesem Punkte aus die gleichmässige Ueberwindung aller einzelnen Massenwiderstände zu erfolgen hat, was jedoch nur in dem einen Falle möglich ist, wenn die Richtung der Kraft in dieselbe Linie fällt wie die Resultirende aus allen einzelnen Massenwiderständen nach dem Angriffspunkt der Kraft. Nun fällt aber die Resultirende aller Massenwiderstände stets in die Mitte eines jeden Atoms, und weiterhin die Resultirende aller Massenwiderstände in Bezug auf jeden beliebigen auf der Atomoberfläche gelegenen Angriffspunkt in die Verbindungslinie zwischen Atom-Mittelpunkt und Angriffspunkt der Kraft; folglich muss jede Kraft, welche dem Atom fortschreitende Bewegung ertheilen soll, ihrer Richtung nach ebenfalls in die Verbindungslinie ihres Angriffspunktes mit dem Atom-Mittelpunkt fallen. Diese Richtung der einwirkenden Kraft ist jedoch nur bei dem centralen Stoss gegeben, bei dem schiefen Stoss geht sie seitlich an dem Mittelpunkt vorüber, woraus sich zunächst allgemein folgern lässt, dass das Atom sich nicht in der Richtung des Stosses bewegen kann. Die Kraft findet daher in der Atommasse einen absoluten Widerstand und ist infolgedessen genöthigt, ihre Richtung zu ändern, um auf das Atom einwirken zu können. Es geschieht dies durch Zerlegung der Kraft in zwei rechtwinklig aufeinanderstehende Componenten, von welchen die eine in diejenige Richtung, in welcher von dem Angriffspunkt der Kraft aus dem Atom fortschreitende Bewegung ertheilt werden kann, demnach in die Verbindungslinie zwischen Angriffspunkt und Atom-Mittelpunkt fällt. Die auf die zweite Componente entfallende Kraft wirkt daher stets in der Richtung der Tangente auf das Atom ein und muss daher

demselben eine rotirende Bewegung zu ertheilen suchen, wie wir nach Analogie der Rotationsbewegung fester Körper schliessen dürfen.

Damit sind alle Gesetze der Kraft, soweit sie für unsere späteren Ausführungen Interesse haben, erschöpft. Werfen wir auf die Consequenzen dieser Gesetze in Verbindung mit unseren übrigen Voraussetzungen einen Rückblick, so können wir daraus einige, für die allgemeine Auffassung der physikalischen Erscheinungen werthvolle Schlüsse ziehen. Zunächst können wir alle diejenigen Bewegungen ermitteln, welche ein Atom zu vollziehen im Stande ist; denn die Ursache einer jeden Atombewegung ist Kraft. Kraft überträgt sich jedoch nur durch mechanischen Stoss, welcher nur ein centraler oder ein schiefer sein kann. Aus dem centralen Stoss kann nur geradlinig fortschreitende, aus dem schiefen Stoss nur geradlinig fortschreitende und zugleich rotirende Bewegung eines Atoms resultiren. Berücksichtigen wir nun ferner, dass die gleichzeitig fortschreitende und rotirende Atombewegung durch eine aus direct entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft zu einer rein rotirenden Bewegung umgeändert werden und dass ferner ein Atom als starrer untheilbarer Körper in ein und derselben Zeit nur nach einer Richtung voranschreiten und auch nur nach einer Richtung rotiren kann, so ergibt sich, dass für alle Atome, gleichviel welcher Einwirkung von Kräften oder welchen physikalisch-chemischen Processen sie unterworfen werden, in Bezug auf ihre Bewegung nur drei Zustände denkbar sind, und zwar

1. die rein geradlinig voranschreitende Bewegung,
2. die rein rotirende Bewegung ohne Raumveränderung des Atoms,
3. die geradlinig voranschreitende und gleichzeitig rotirende Bewegung.

Für die Atome der chemischen Elementarstoffe kommt nun, gemäss unseren Voraussetzungen, die zweite dieser Bewegungskategorien ohne weiteres in Fortfall, wonach für jeden Versuch, die physikalischen Erscheinungen auf der Grundlage von Atombewegungen zu erklären, nur die Wahl zwischen der rein fortschreitenden und der gleichzeitig fortschreitend-rotirenden Atombewegung übrig bleibt. Allein auch bei der Wahl zwischen diesen beiden Möglichkeiten wird man in der Freiheit der Entschliessung wesentlich eingeengt durch die Erwägung, dass jedes Atom in ein und derselben Zeit nur nach einer Richtung sich bewegen kann und dass daher diese eine Bewegung zunächst für das in der Planetenbewegung unzweifelhaft nachgewiesene Voranschreiten der Atome durch den Weltraum in Anspruch genommen werden muss. Für unseren Planeten, die Erde, können wir dieses Voranschreiten der sie consti-

tuirenden Atome, insofern wir eine sehr kurze Zeit zu Grunde legen und einen bestimmten Punkt der Erdoberfläche im Auge behalten, als

1. eine geradlinig parallele Bewegung der Atome,
2. eine Bewegung von gleichmässiger Geschwindigkeit

betrachten. Das Vorhandensein dieser Bewegung ist bewiesen, ein gleichzeitiges Voranschreiten der Atome nach einer andern Richtung ist ausgeschlossen, folglich muss für jeden Versuch, die physikalischen Erscheinungen aus der fortschreitenden Atombewegung zu erklären, eine der definirten mindestens sehr nahe stehende Bewegung als Ausgangspunkt genommen werden. Es ist kaum zu erwarten, dass man mit einer solchen Voraussetzung jemals zu nennenswerthen Resultaten gelangen wird.

Unter diesen Umständen liegt es sehr nahe, von der fortschreitendrotirenden Atombewegung auszugehen und hiervon die fortschreitende Atombewegung ausschliesslich für die Erklärung der planetaren Doppelbewegung zu verwenden, hingegen die rotirende Bewegung für die Erklärung der physikalischen Erscheinungen, insbesondere von Licht, Wärme, Schwerkraft, Magnetismus, Elektricität und Chemismus in Anspruch zu nehmen, selbstverständlich soweit man den Versuch unternehmen will, diese Erscheinungen auf mechanischer Grundlage zu erklären. Eine gewisse Berechtigung erhält dieser Satz dadurch, dass mehrere der genannten Eigenschaften stets gleichzeitig an ein und derselben Materie wahrgenommen werden können, was sehr erklärlich wird, wenn allen erwähnten Erscheinungen nur eine einzige Atombewegung zu Grunde liegt. Die am Eingang dieses gemachte Voraussetzung, dass alle Atome rotirende Bewegung besitzen sollen, erscheint nach diesen Ausführungen in einem ganz andern Licht, sie verliert den früheren Charakter einer willkürlichen Hypothese und gewinnt so viel innere Wahrscheinlichkeit, dass der Versuch, aus der rotirenden Atombewegung die attractiven und repulsiven Molecularkräfte zu erklären, mehr als einen rein akademischen Werth besitzt und ein weitergehendes Interesse für sich in Anspruch nehmen darf.

(Schluss folgt.)

Graphische Darstellung der Linsenformel.

Von

Dr. **Alois Handl.**

Die sog. „Linsenformel" $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$ gestattet wohl in jedem einzelnen Falle die Berechnung der zusammengehörigen Werthe der Gegenstandsweite und Bildweite, doch gewährt sie keinen besonders klaren Einblick in den Gang dieser Werthe. Ein gutes Hilfsmittel, um die gegenseitige Lage von Gegenstand, Linse und Bild, sowie die Grösse des Bildes in allen Fällen übersichtlich darzustellen, bietet die Figur auf der beiliegenden Tafel (die ich mir als Wandtafel, etwa in zehnfacher Vergrösserung, ausgeführt denke).

Beschreibung der Tafel.

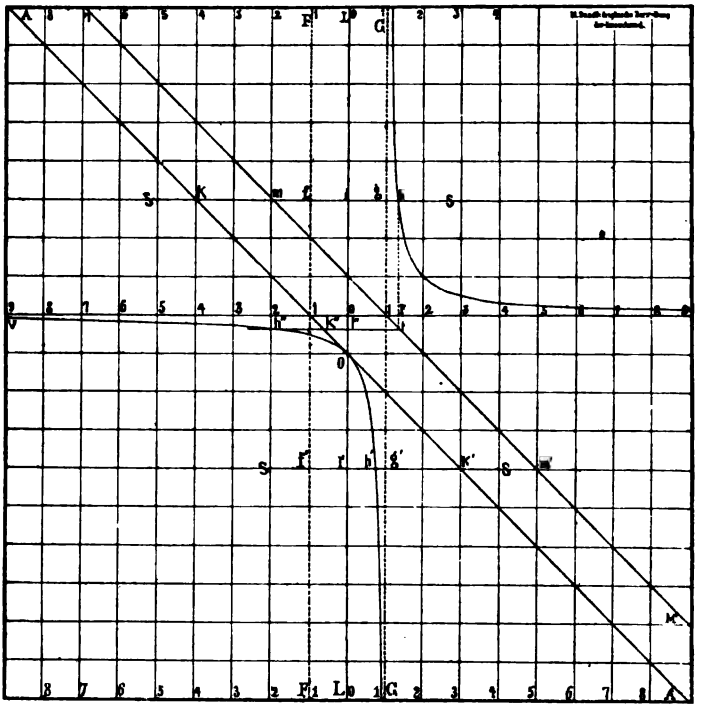
Die Tafel enthält zunächst die beiden Zweige der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$, mit wagrechter und lothrechter Stellung der Asymptoten. Die lothrechte Asymptote ist punktirt oder allenfalls roth ausgezogen und bildet die eine Brennpunktslinie ($G\,G$). Durch den Scheitel (O) des linken unteren Zweiges der Hyperbel geht eine Gerade LL parallel zu GG, stark (allenfalls blau) ausgezogen; und links von ihr, im Abstande $FL = LG$, verläuft noch eine dritte lothrechte Gerade FF, punktirt (oder roth), sowie $G\,G$, und diese ist die zweite Brennpunktslinie. Am Scheitel O ist ausserdem die Berührungslinie AA' gezeichnet, welche die Objectslinie heissen mag, und parallel zu ihr verläuft der Durchmesser der Hyperbel, MM, der als Grössenlinie bezeichnet werden soll. Die wagrechte Asymptote dient als Abscissenaxe, der Anfangspunkt der nach rechts und links verlaufenden Theilung, welche, der bequemeren Ablesung wegen, am oberen und unteren Rande der Tafel wiederholt aufgetragen ist, liegt in LL.

Gebrauch der Tafel.

Jede der Abscissenaxe parallele, also wagrechte Gerade ($S\,S$) bildet sechs Durchschnittspunkte, k, m, f, l, g, h mit den Linien der Tafel. Von diesen bedeutet: l den Mittelpunkt der Linse, f und g die Brenn-

punkte, *k* den leuchtenden Punkt, *h* den Bildpunkt. Der Punkt *m* ist nicht von Bedeutung.

Hat man es mit einer Sammellinse zu thun, so muss man sich die Strahlen immer von links her einfallend denken. Solange *k* links von *L L* liegt, d. i. von *A* bis *O* auf der Objectlinie, hat man es mit wirklichen Gegenständen (leuchtenden Punkten) zu thun, von welchen divergente Strahlen ausgehen; im unteren Theile der Figur, von *O* bis *A'*, sind jene Fälle dargestellt, in welchen die auf die Linse einfallenden Strahlen nach einem hinter derselben liegenden virtuellen



Objecte convergiren. Solange ferner *h* rechts von *l* liegt, entstehen wirkliche Bilder; liegt *h* links von *l*, so ist das Bild ein virtuelles. Man sieht mit einem Blicke, dass dies nur auf dem Aste *Ov*, somit nur für wirkliche Objecte, deren Gegenstandsweite zwischen dem Werthe Null und einer Brennweite liegt, der Fall ist. Man kann somit zu jeder beliebigen, reellen oder virtuellen Gegenstandsweite die Bildweite ihrem Werthe und Zeichen nach ablesen, und umgekehrt, die Lage und Beschaffenheit (ob reell oder virtuell) des Objectes ermitteln, dessen Bild an einem bestimmten Orte erscheinen soll. Als Einheit der Längen dient dabei immer die Brennweite.

Die Grösse des Bildes wird auf folgende Art bestimmt: Durch den Ort (h) des Bildes auf der Hyperbel zieht man eine Ordinate (hrt); das Stück (rt) derselben, welches zwischen der Abscissenaxe und der Grössenlinie (MM) liegt, gibt die lineare Ausdehnung des Bildes, wenn die des Gegenstandes gleich eins (eine Brennweite) ist, oder mit anderen Worten: die lineare Vergrösserung. Erstreckt sich das Stück (rt) unter die Abscissenaxe, so ist das Bild verkehrt; steht rt auf der Abscissenaxe, so ist das Bild aufrecht. Man sieht, dass alle Bilder jenseits des zweiten Brennpunktes (g) verkehrte, alle vor demselben liegenden aber aufrechte sind.

Für die Erscheinungen an Zerstreuungslinsen gilt dieselbe Figur, nur hat man sich die Strahlen von rechts her einfallend zu denken. Reelle Objecte, von welchen divergirende Strahlen ausgehen, liegen auf dem Theile OA' der Objectslinie; virtuelle Objecte, die Vereinigungspunkte convergent auffallender Strahlen, liegen auf OA. Reelle Bilder sind nur die auf dem Aste Ov liegenden, virtuellen Objecten entsprechend, deren Gegenstandsweite kleiner ist als die Brennweite; virtuell sind alle Bilder, welche rechts von LL liegen.

Die Bildgrössen werden nach derselben Regel ermittelt, wie bei den Sammellinsen. Aufrecht sind alle Bilder, für welche die betreffenden Strecken rt oberhalb der Abscissenaxe liegen; verkehrt diejenigen, für welche die Grössenlinie nach unten geht.

Beweis.

Es ist bekannt, dass bei einer Sammellinse die Abstände des Gegenstandes und des Bildes von den beiden Brennpunkten der Gleichung $(a-p)(b-p)=p^2$ Genüge leisten. Setzen wir zunächst in:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p} \text{ die Werthe } a=\alpha p \text{ und } b=\beta p,$$

d. h. messen wir alle Längen nach Brennweiten statt nach einer anderen Längeneinheit, so wird:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,$$

und setzen wir nun $\beta=x+1$, $\alpha=y+1$, so muss $xy=1$ werden. Darum wurde die Hyperbel $xy=1$ als „Bildlinie“ gezeichnet. Zählen wir vom Mittelpunkte aus die $+x$ nach rechts, die $+y$ nach aufwärts und gehen sodann vom Mittelpunkte auf den Scheitel O als Anfangspunkt der Zählung über, so wird $lh=x+1=\beta$, $Ol=y+1=\alpha$; da aber $Ol=lk$, so sind auf diese Weise die Lagen von Object, Linse und Bild in einer Geraden dargestellt.

Die Vergrösserung des Bildes ist $m = \frac{b}{a}$, und zwar ist das Bild verkehrt, wenn a und b auf verschiedenen Seiten der Linse liegen, also gleiche Vorzeichen haben; ein negativer Werth von m hingegen bedeutet, dass das Bild aufrecht stehe.

Nun ist:

$$m = \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{x+1}{y+1} = \frac{x+1}{\frac{1}{x}+1} = x = rt,$$

der früher gegebenen Regel in Bezug auf den Zifferwerth und das Vorzeichen entsprechend.

Für Zerstreuungslinsen muss $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -1$ sein; setzen wir jetzt $\beta = x - 1$ und $\alpha = y - 1$, so wird wieder $xy = 1$, die Bildlinie kann die gleiche bleiben, wie früher; aber wir zählen jetzt die positiven x nach links, die positiven y nach abwärts, damit durch die Verlegung des Anfangspunktes der Zählung vom Mittelpunkte in den Scheitel O die Werthe der neuen Coordinaten stets um 1 kleiner werden als die der alten. So ist z. B.

$$h''l'' = x'' - 1 = \beta''$$

und, um bei positiven Werten zu bleiben,

$$k'l' = l'O = y' - 1 = \alpha'.$$

Für h' wäre

$$l'h' = -(l'g' - h'g') = x' - 1 = \beta',$$

für k'' aber findet man

$$k''l'' = l''O = -(1 - y'') = y'' - 1 = \alpha''.$$

Auch bei den Zerstreuungslinsen ist die Vergrösserung $m = \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}$, und $+m$ bedeutet ein verkehrtes, $-m$ ein aufrechtes Bild.

Nun ist:

$$m = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{x-1}{y-1} = \frac{x-1}{\frac{1}{x}-1} = -x;$$

die Vergrösserung wird dem Zahlenwerthe nach bei den Zerstreuungslinsen durch dasselbe Verfahren bestimmt, wie bei den Sammellinsen. Die Vorzeichen von m und x sind bei Zerstreuungslinsen einander entgegengesetzt, aber diejenige Richtung von x, welche bei Sammellinsen positiv ist, wird bei Zerstreuungslinsen als negativ betrachtet.

Wenn der Bildpunkt in unserer Figur an einer gewissen Stelle, z. B. in h, erscheint, so haben wir

bei Sammellinsen:

x positiv, m positiv, das Bild verkehrt;

bei Zerstreuungslinsen:

x negativ, m positiv, das Bild verkehrt.

Die Figur gestattet die angenäherte Lösung jeder beliebigen Aufgabe über Linsen sozusagen mit einem Blicke; um die Zahlenwerthe genau zu erhalten, wird man sich der folgenden Formeln bedienen:

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \alpha = \frac{\beta}{\beta - 1},$$

$$m = \frac{1}{\alpha - 1} = \beta - 1.$$

Ueber Messungen der irdischen Schwerkraft.

Eine kritische Abhandlung.

Von

A. Kurz.

§ 1. Drei Jahre vor der Gegenwart und drei Jahre nach der Veröffentlichung der Messungen v. Jolly's [1]), welche sich auf die mittlere Dichte einer Schichte der Stadt München und auf diejenige der ganzen Erde bezogen, wurde in der k. preussischen Akademie und in Wiedemann's Annalen „Eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationsconstante" angezeigt [2]), welche seitdem vielleicht schon der Verwirklichung näher gerückt worden ist.

Es handelt sich bei derselben auch um die Anwendung der gewöhnlichen Wage statt des Pendels und statt der Drehwage, wie bei Poynting [3]) und Jolly. S. 664: „Poynting bestimmte die Gewichtsmehrung einer Masse, indem er unter die Schale, auf welcher sich dieselbe befand, eine 145 kg schwere Metallkugel heranfuhr". Jolly citirt deren Gewicht als gleich 170 kg.

S. 663: „v. Jolly äquilibrirte eine und dieselbe Masse einmal durch Aufsetzen von Gewichtstücken auf eine in gleicher Höhe befindliche Wagschale, ein anderes Mal durch Aufsetzen von Gewichtstücken auf eine 21 m tiefer befindliche, mit jener oberen durch einen Drahverbundenen Wagschale. Die Differenz ergab die Abnahme der Schwere mit der Höhe. Er baute dann unterhalb der unteren Schale eine 5775 kg schwere Bleikugel auf und bestimmte wiederum die entsprechende Differenz. Die Zunahme derselben ergab die Attraction der Bleikugel auf die Gewichte in der unteren Schale, da bis zur oberen Schale, wie der Versuch ergab, die Bleikugel keine messbare Wirkung ausübte".

---

1) „Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation". Abhandl. d. k. b. Akad. d. Wissensch. 1881. Abgedruckt in Wied. Ann. Bd. 14.

2) Von Arthur König und Franz Richarz. Bd. 24, S. 664—668. Diese Constanten-Bestimmung macht auch eine Aufgabe des neugegründeten physikalischen Reichsinstitutes aus, gemäss der Mittheilung durch die Zeitungen.

3) Proc. of the Roy. Soc. of London 1878 (citirt Jolly) oder 1879 (citiren die vorigen).

In diesem Citate sind nicht unwesentliche Berichtigungen vorzunehmen, die ich gleich mit einigen ergänzenden Zahlangaben (abgerundet) verbinde: v. Jolly äquilibrirte eine Quecksilberkugel (in einem Glaskolben) von 5 kg einmal durch Aufsetzen derselben auf die mit der Gewichtstück-Schale gleich hohe Schale, das andere Mal durch Aufsetzen auf die untere Schale. Die Differenz betrug 31,7 mg. Im Beisein der Bleikugel betrug diese Differenz 32,3 mg. Die Zunahme derselben, also 0,6 mg, ergab die Attraction der Blei- auf die Quecksilberkugel, da bis zur oberen Schale, wie die Rechnung ergab, die Bleikugel nur den Einfluss von 0,0003 mg üben konnte.

Die genannte neueste Methode benutzt einen nahe würfelförmigen Bleikörper, Kante gleich 2 m, mit zwei Kanälen für die Verbindungsdrähte der beiden oberen und unteren Schalen. „Eine Masse m auf der Schale rechts oben wird durch Gewichtstücke m_u in der Schale links unten ins Gleichgewicht gebracht", also

$$m\,(g_o + k) = m_u\,(g_u - k),$$

worin k vom Bleiklotz herrührt; die Erdbeschleunigung g_u in der untern Schale ist grösser als diejenige g_o in der oberen (wenn der Bleiklotz nicht vorhanden) um eine kleine Grösse γ, die ich gleich einführe:

$$m\,(g_o + k) = m_u\,(g_o + \gamma - k).$$

Bei v. Jolly war γ (für 21 m) grösser als k (für 5775 kg); hier wird wohl γ (für 2 m) kleiner sein, als k (für 100000 kg), oder

$$m\left(1 + \frac{k}{g_o}\right) = m_u\left(1 - \frac{k-\gamma}{g_o}\right)$$

oder

$$m_u = m\left(1 + \frac{2k-\gamma}{g_o}\right).$$

„Dieselbe Masse m wird dann auf die Schale rechts unten gesetzt und mit Gewichtstücken m_o auf der Schale links oben äquilibrirt"; hierfür erhält man auf dieselbe Weise

$$m_o = m\left(1 - \frac{2k-\gamma}{g_o}\right).$$

Die positive Differenz δ dieser beiden Gewichtsgrössen g_o wird gemessen,

$$\delta = \frac{2m}{g_o}(2k-\gamma),$$

und dient zur Berechnung von k, wenn nun auch noch γ bekannt ist. Zu diesem Zwecke aber darf man nur das Verfahren (wie schon gesagt) ohne das Vorhandensein des Bleiklotzes wiederholen, was hier sofort durch Setzung von $k = 0$ zu den Gleichungen führt:

$$m_u' = m\left(1 - \frac{\gamma}{g_o}\right)$$

$$m_o' = m\left(1 + \frac{\gamma}{g_o}\right)$$

$$\delta' = \frac{2m}{g_o} \cdot \gamma.$$

Also schliesslich

$$k = \frac{g_o}{4m}(\delta + \delta').$$

„Ist nun V als Potential des Bleiklotzes, G die Gravitationsconstante, z die verticale Coordinate, so ist:

$$k = G \cdot \frac{dV}{dz};$$

dieser Differentialquotient lässt sich aus den bekannten Dimensionen des Parallelepipeds und dem Orte der Schalen berechnen; unsere Beobachtungen ergeben also G und damit auch die mittlere Dichtigkeit der Erde."

§ 2. Weiteres ist bis zur eventuellen Publication der Messungsresultate abzuwarten. Ich will nur noch die einzige Stelle nachholen: „dass es unzulässig ist, γ aus dem bekannten Abstande der Wagschalen und dem Erdradius zu berechnen, ist von v. Jolly experimentell nachgewiesen worden."

Da ist vom Ende hereingezählt das dritte Wort einer wesentlichen Erläuterung bedürftig. Bei v. Jolly ist nämlich

$$\frac{dg}{g} = 2\frac{h}{R}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varrho''}{\varrho}\right),$$

wo dg die Abnahme von g, g statt des vorigen g_o gesetzt ist, h der genannte Abstand der Wagschalen, R der Erdradius, ϱ die mittlere Erddichte und ϱ'' die mittlere Dichte der Massenschichte von der Höhe h, welche „einen mit den zerstreut liegenden Punkten gleichen Zug ausüben würde" (v. Jolly). Diese zerstreut liegenden Punkte sind auch innerhalb h gemeint, also Mauerstücke der Gebäude etc.

Ich habe schon angeführt 31,7 mg und $5 \cdot 10^6$ mg, $h = 21$ m, für R setze ich den abgerundeten Werth $6366 \cdot 10^3$ m, für ϱ nach Poynting und v. Jolly (auch abgerundet) 5,7. Dann ergibt sich, weil

$$\frac{dg}{g} = \frac{31{,}7}{5 \cdot 10^6},$$

$\varrho'' = 0{,}15\ldots$ gegenüber Wasser als Einheit. Jolly hat in der genannten Abhandlung der Akademie statt dieser Zahl infolge eines Schreib- und Rechenversehens 0,35 ..., worauf ich ihn aufmerksam machte,

also dass er es in dem genannten Abdrucke der Wied. Annalen corrigirte. Setzt man für ϱ und ϱ'' die Werthe, so wird die frühere Gleichung

$$\frac{dg}{g} = 2\,\frac{h}{R}(1 - 0{,}04);$$

das ist: nicht ganz um 4 % wird durch jene Umgebung der Einfluss der Höhendifferenz h allein herabgemindert. Diesen letzteren Einfluss aber (wenn ϱ'' Null wäre)

$$\frac{2h}{R} \text{ oder } \frac{2dR}{R}$$

nahm Jolly aus dem elementaren Gravitationsgesetze

$$\frac{g}{R^2} = \text{constans, oder } \frac{g+\gamma}{g} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{R} \ (\gamma \text{ wie im § 1}),$$

das er auf und nahe ausserhalb der Erdkugel, deren Masse im Erdmittelpunkte concentrirt gedacht wird, anwendet. Bei Kugeln mit concentrisch homogenen Schichten ist dies strenge richtig. Aber inwieweit dies bei der Erde annähernd richtig ist, darauf kam ich mit v. Jolly nur einmal und im Beisein noch eines Physikers zu sprechen, nämlich bei Gelegenheit der (von ihm auch citirten) Naturforscherversammlung zu München i. J. 1877, und dieses Gespräch wurde rasch abgebrochen.

§ 3. Es verlohnt sich noch, die Herkunft der Gleichung des § 2 zu verfolgen aus Poisson's Traité de Mécanique T. 1 § 255 p. 492—496, welch erstere Seite Jolly auch citirt. Poisson betrachtet da die Fallbeschleunigung γ', welche eine über dem Meeresniveau (Radius R) gelagerte Erdschichte von der Höhe H allein ausüben würde, analog wie im § 1 der Bleiklotz k ausübt. Nennen wir dann, im Anschlusse an die vorige Bezeichnung, $(g+\gamma)$ die Beschleunigung im Meeresniveau und g in der Höhe H, aber ohne Beisein der genannten Erdschichte von der mittleren Dichte ϱ', so nimmt auch Poisson

$$\frac{g+\gamma}{g} = 1 + \frac{2H}{R}, \left(\frac{\text{Meeresfläche}}{\text{Höhe } H}\right)$$

analog dem Schlusse des § 2; aber die wahre Fallbeschleunigung in der Meeresfläche ist jetzt $g+\gamma-\gamma'$ und in dem Niveau H der Erdschichte ist jetzt $g+\gamma'$. Also ist

$$\frac{g+\gamma-\gamma'}{g+\gamma'} = \left(1 + \frac{\gamma}{g} - 2\,\frac{\gamma'}{g}\right) = 1 + 2\,\frac{H}{R} - 2\,\frac{\gamma'}{g}$$

das Verhältnis der Fallbeschleunigungen in der unteren und oberen Grenzfläche der Erdschichte (H, ϱ'). Für γ' berechnet Poisson und mit ihm Jolly den Näherungsausdruck (s. § 4)

$$\gamma' = p \cdot 2\pi\varrho' H,$$

welcher gilt, wenn H gegen die horizontale Erstreckung der Schichte klein genug ist, wobei p eine Constante; und für g (oder wenn man will $g + \gamma$) muss die am Schlusse des § 2 schon erwähnte Erdkugel herhalten

$$g = p \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho}{R^2}.$$

Somit ist

$$\frac{\gamma'}{g} = \frac{3}{2}\frac{\varrho'}{\varrho}\frac{H}{R}$$

und jenes Beschleunigungs-Verhältnis

$$1 + 2\frac{H}{R} - 2 \cdot \frac{3}{2}\frac{\varrho'}{\varrho}\frac{H}{R}$$

oder

$$1 + 2\frac{H}{R}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varrho'}{\varrho}\right).$$

Man sieht jetzt, dass der zweite Summand mit der rechten Seite der ersten Gleichung des § 2 im Wesen identisch ist, dass beide Gleichungen dasselbe besagen.

§ 4. Der Poisson'sche Ausdruck für γ' im § 3 kann, wie er z. B. in der Elektricitätslehre seine Analogie hat, auch mittels des Trägheitsmomentes des Kreises $\frac{1}{2} m r^2$ oder seines Trägheitsradius $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ im Gedächtnisse behalten werden. Ich stelle deswegen zusammen

$$\gamma' = p \cdot \frac{\pi r^2 H \varrho'}{\frac{1}{2} r^2}$$

mit dem im § 3 folgenden

$$g = p \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho}{R^2},$$

d. h. ich denke mir einerseits die Scheibenmasse am Ende des Trägheitsradius sitzend (r gross gegen H), andrerseits die Kugelmasse im Centrum.

Dieser Poisson'sche Schritt über das Elementare hinaus (vergl. Schluss von § 2) ist gewiss anzuerkennen, wenn er auch in der Hauptformel der §§ 2 und 3 noch sehr damit verquickt ist.

Jolly ging insofern noch über Poisson hinaus, als er mit Recht das γ' im untersten und obersten Niveau der Schichte H bezw. negativ und positiv in Rechnung brachte, während Poisson nur das letztere

that. Dieser Mathematiker vergleicht nämlich mit dem $g+\gamma$ (ich bleibe bei der Bezeichnung des § 3) im Meeresniveau, über welchem keine solche Schichte lastet, das $g+\gamma'$ im obersten Niveau der Schichte H, und setzt also

$$\frac{g+\gamma}{g+\gamma'} = 1+\frac{\gamma}{g}-\frac{\gamma'}{g} = 1+2\frac{H}{R}-\frac{3}{2}\frac{\varrho'}{\varrho}\frac{H}{R} =$$
$$= 1+2\frac{H}{R}\left(1-\frac{3}{4}\frac{\varrho'}{\varrho}\right);$$

alsdann bricht er seine kurze Darlegung hierüber rasch ab mit dem Beispiele, dass die Dichte jener Erdschichte ungefähr halb so gross sei als die mittlere Erddichte, was ja angesichts des letzteren Werthes $\varrho = 5{,}6\ldots$ oft nahe zutreffen mag, mithin

$$\frac{g+\gamma}{g+\gamma'} = 1+\frac{5}{4}\frac{H}{R}\left(\frac{\text{Meeresküste z. B. Neapel}}{\text{Paris oder München}}\right)^{4}).$$

Dieser Betrag, oder $1+0{,}000\,000\,196\,H$, H in Metern, ging nun auch in nicht wenige und auch der neuesten Lehr- und Nachschlagebücher als Reductionsformel der Erdbeschleunigung hinsichtlich der Höhe über. Wie man sieht, mit zweifachem Unrecht. Das eine erhellt aus diesem § 4, das andere aus dem vorigen § 3, indem hiernach und wieder im Falle $\varrho' = \frac{1}{2}\varrho$

$$1+\frac{1}{2}\frac{H}{R}$$

für das unterste und oberste Niveau dieser Schichte (H, ϱ') gesetzt werden müsste.

Es bleibt demnach innerhalb atmosphärischer Schichten nichts Anderes übrig als vom Schlusse des § 2 die Reductionsformel

$$1+2\frac{H}{R},$$

wenn von städtischen Mauerschichten oder nachbarlichen Terrainwellen abgesehen werden kann oder soll. (Hierüber s. §§ 2 und 3.)

§ 5. Kirchhoff sagt in der VIII. Vorlesung seiner „Mechanik" und zwar auch in der 3. Auflage derselben vom Jahre 1883, dass mit der letzteren Annahme

$$1+2\frac{H}{R}$$

„das Resultat übereinstimmt, welches die Pendelversuche in Betreff der Abnahme der Schwere bei wachsender Höhe ergeben haben" (§ 5 daselbst).

4) Wenn die im Zähler und Nenner genannten Orte im selben Breitenkreise lägen.

Am Schlusse dieser Vorlesung wird die Aenderung der Schwere mit der geographischen Breite „als eine Folge der Drehung der Erde angesehen, wie in der folgenden Vorlesung gezeigt werden soll". Ich erwähne dies nur, weil er damit auch die „sehr angenäherte" Gestalt eines abgeplatteten Rotations-Ellipsoides einbegreift. „Hierauf soll aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden." (Schluss des § 1 der IX. Vorlesung. Man sehe auch XII § 2, das Ende des dritten Absatzes.)

Vielleicht findet sich unter den in Aussicht stehenden hinterlassenen Papieren dieses kürzlich verstorbenen Physikers auch eine auf dieses obige Thema eingehende „Stelle". Einen Brief von Kirchhoff an mich in Betreff seiner „Mechanik" überhaupt, sowie einen solchen von v. Jolly in Betreff seiner obigen Abhandlung habe ich in den heurigen Blättern für das bayerische Realschulwesen veröffentlicht.

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Soeben erschienen:

Ueber den gegenwärtigen Stand

der

elektrischen Beleuchtung.

Bericht

an den Verein der Gas- und Wasserfachmänner Deutschlands

erstattet von

Dr. Schilling sen.

Octav. 45 Seiten. *Brochirt Preis 70 Pf.*

Verlag von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig.**

Taschenbuch für Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von Ingenieur **S. Freiherr v. Gaisberg.**

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

klein 8. VIII und 128 Seiten. Preis gebunden 2 M. 40 Pf.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig**

ist erschienen:

der fünfte Jahrgang 1888

des

Kalender für Elektrotechniker.

Herausgegeben von

F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant geb. Preis 4 M., dazu Beilage brosch. 60 Pf.

Der neue Jahrgang hat abermals viele Erweiterungen erfahren, sowohl in der Physik (Magnetismus, Photometrie), als in der Elektrotechnik (Messmethode). Mehrere Tabellen sind neu berechnet und an passenden Orten Zusätze gemacht worden. In Anbetracht des stets wachsenden Materials erschien es nothwendig, diesmal einen Theil desselben abzucheiden und in einer Beilage unterzubringen.

Nachstehende Inhaltsübersicht wird die jetzige Vertheilung des umfangreichen Materials auf Taschenbuch und Beilage veranschaulichen.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(13a/3)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT. Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für Lehrzwecke.

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a/3)

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Hilfstafeln

für

Messungen elektrischer Leitungswiderstände

vermittelst

der Kirchhoff-Wheatstone'schen Drahtcombination

berechnet von

Dr. Eugen Obach.

Lex.-8°. 16 Seiten, 40 Tabellen und 2 lithographirte Tafeln.

Separat-Abdruck aus der Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Preis M. 2.40.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale

Elektrische Maasssystem

im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis M. 1.—.

XXIV. Band. 4. Heft.

JUN 1 1888

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 4. Heftes.

Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung. Von August Häussler. (Schluss.) S. 209.
Ueber die elektromotorische Gegenkraft im galvanischen Flammenbogen. Von H. Wild. S. 224.
Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft. Von Prof. Franz Exner. S. 225.
Absolute diamagnetische Bestimmungen. Von Albert v. Ettingshausen. S. 252.
Ueber die durch Bewegung eines im homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektricums hervorgerufene elektrodynamische Kraft. Von W. C. Röntgen. S. 260.
W. Weber's und R. Kohlrausch's absolute Messung des Elektricums. Von A. Kurz. S. 266.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 6. December 1887. S. 269.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 10. Januar 1888. S. 270.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 24. Januar 1888. S. 271.
Berichtigung zum letzten Theile der Abhandlung von F. Roth. S. 272.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,

Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 3).

Jahrgang 1888 Nr. 7 enthält:

Rundschau. — **Berichte und Bemerkungen über Accumulatoren,** namentlich über jene von Farbaky & Schenek, Reckenzaun und Julien, mit besonderer Rücksicht auf Trambahnzwecke. Von Dr. A. v. Waltenhofen in Wien. — **Die Leistungen der elektrischen Arbeitsübertragung zwischen Kriegstetten und Solothurn.** Von Prof. H. F. Weber in Zürich. — **E. Raub's neue Thermobatterie.** Von G. Betz, Berlin. — **Gegen die Contacttheorie.** 3. Mittheilung. Von H. Götz und A. Kurz — **Literatur.** Dr. A. Ritter v. Urbanitzky, Die Elektricität des Himmels und der Erde. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Telephonie. Telephon-Verbindung preussischer und sächsischer Industrieorte. — Staats-Telephon in Wien. — Elektrometallurgie. Grosse elektrometallurgische Maschinen der Maschinenfabrik Oerlikon. — Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung in München. — Verhandlung der Berliner Stadtverordneten-Versammlung wegen Abschluss eines neuen Vertrags mit der »Actiengesellschaft Berliner Elektricitätswerke«. — Elektr. Beleuchtung in Breslau, Hamburg, Köln, Koblenz, Eberstadt. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinen-Ausstellung in München 1888. — Errichtung einer elektrotechnischen Lehr- und Versuchsanstalt in Frankfurt a. M. — Abweisung einer Besitzstörungsklage gegen die Centralstation der Schenkenstrasse in Wien. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 8 enthält:

Rundschau. — **Ueber constante Vergleichslichtquellen für photometrische Zwecke.** Von F. Uppenborn. — **Die Leistungen der elektrischen Arbeitsübertragung zwischen Kriegstetten und Solothurn.** Von Prof. H. F. Weber in Zürich. (Fortsetzung). — **Beschreibung der Einrichtung eines Beleuchtungswagens** von Th. Wechsler & Co., Neumarkt bei Nürnberg. — **Elektrische Sonnenstiche.** Von Holthof. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachrichten. Prof. Dr. F. Kohlrausch hat die ordentliche Professur der Physik in Strassburg angenommen. — Lucien Gaulard geisteskrank. — Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung des Continental-Hôtels in Berlin. — Hydraulische und elektrische Centralstation im Hamburger Freihafengebiet. — Vertagung der elektr. Beleuchtung und Bau eines neuen Gaswerks in Braunschweig. — Herstellung einer elektrischen Centralbeleuchtungsanlage für Inner-Breslau. — Elektr. Beleuchtung des Stadttheaters in Riga. — Elektr. Beleuchtung in Dresden. — Verschiedenes. Magnesium-Lampe für Bauzwecke. — Anschluss von Blitzableitern an Gas- und Wasserleitung. — Das Zerstäuben glühender Metalle. — Elektrische Spielerei. — Concertorgel mit

HARVARD COLLEGE
JUN 1 1888
LIBRARY

Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung.

Von

August Häussler.

(Schluss.)

II. Theil.

Theorie der Rotationsbewegung der Atome.

Selbst wenn wir die fortschreitende Bewegung der Atome ganz ausser Betracht lassen, dürfte dem Satz, dass ein rotirendes Atom sich im Zustand der Bewegung befindet, dass also die Rotation an und für sich bereits den Zustand der Bewegung begründet, nicht widersprochen werden. Dieselbe besteht, nach Analogie eines ohne Raumveränderung rotirenden Körpers darin, dass die Substanzeinheiten des Atoms den Raum in einer Kreisbahn durchschreiten; das Atom selbst braucht demnach keine räumliche Veränderung zu erleiden, dagegen muss, sobald das Atom Rotation besitzt, eine fortschreitende Bewegung der Substanzeinheiten unbedingt vorhanden sein. Nun besteht jedoch, nach unseren Voraussetzungen, die Ursache aller Bewegung in Kraft, und da es weiter nur eine Art von Kraft gibt, müssen auch die uns bekannten Gesetze der Kraft auf die Kreisbewegung der einzelnen Substanzeinheiten ihre uneingeschränkte Anwendung finden. Diese Gesetze besagen zunächst, dass eine einzelne Kraft nur geradlinig fortschreitende Bewegung hervorbringen kann und dass zu einer Aenderung der Bewegungsrichtung, demnach auch zu jeder krummlinigen Bewegung die Mitwirkung mindestens noch einer Kraft erforderlich ist. Aus der Anwendung dieses Satzes auf die Rotationsbewegung folgt, dass zur Hervorbringung der Kreisbewegung der Substanzeinheiten mindestens zwei Kräfte wirksam sein müssen.

Unsere erste Aufgabe besteht daher darin, die Anzahl und Richtung der Kräfte zu bestimmen, welche die Kreisbewegung der Substanzeinheiten verursachen, welche Feststellung uns unter Zugrundelegung unserer Kraftgesetze nicht schwerfallen kann. Soll ein im Zustand der Ruhe befindliches Atom rotirende Bewegung erhalten, so kann die hierzu erforderliche Kraft sich auf daselbe nur durch mechanischen

Stoss übertragen. Letzterer kann ferner nur central oder schief sein, und, da hieraus in allen Fällen nur centrale und tangentiale Kraft resultiren kann, andrerseits aber zwei verschiedene Kräfte bei der Kreisbewegung der Substanzeinheiten in Function treten müssen, so folgt, dass wir die Rotation eines Atoms aus centraler und tangentialer Kraft abzuleiten haben. Nach unseren Voraussetzungen sind ferner alle Atome der chemischen Elementarstoffe von dem Medium des Aethers umgeben; wir werden sonach am folgerichtigsten verfahren, wenn wir die tangentialen und centralen Kräfte, welche die Rotation eines chemischen Atoms bewirken, durch den Aufprall von Aetheratomen auf dasselbe sich übertragen lassen.

Damit sind alle diejenigen Factoren gegeben, auf Grundlage derer wir die Rotationsbewegung eines chemischen Atoms zu construiren haben. Bevor wir jedoch damit beginnen, dürfte es nützlich sein, ein im Ruhezustand befindliches, chemisches Atom und sein Verhalten gegen die aufprallenden Aetheratome einer Betrachtung zu unterziehen, um hiermit später den rotirenden Bewegungszustand desselben Atoms in Parallele zu stellen. Die in fortschreitender Bewegung befindlichen Aetheratome prallen von allen Seiten auf das chemische Atom auf, wobei die dadurch übertragenen Kräfte eine Zerlegung in centrale und tangentiale Componenten erfahren. Wenden wir uns zunächst den ersteren zu, so ergibt sich aus der Voraussetzung, dass die Vertheilung aller Kraft in dem Aether durchaus gleichmässig und dass ferner die Zahl der aufprallenden Aetheratome sehr gross ist, der Schluss, dass in dem Mittelpunkt oder Schwerpunkt des Atoms von allen Punkten der Oberfläche gleich grosse, central gerichtete Kräfte zusammentreffen. Jede einzelne Kraft findet daher an dem Schwerpunkt den Widerstand einer gleich grossen entgegengesetzten Kraft, infolgedessen alle Kräfte rechtwinklig flectirt und radienförmig zertheilt werden. Der radienförmigen Zertheilung stehen jedoch ebenfalls gleich grosse Kräfte entgegen, so dass eine nochmalige rechtwinklige Flexion, im ganzen genommen daher eine Reflexion der Kräfte eintritt. Infolge der Reflexion kehrt jede einzelne Kraft wieder nach ihrem Angriffspunkt zurück und verbindet sich wieder mit dem Aetheratom, wodurch dasselbe von dem chemischen Atom abprallt. In gleicher Weise ist die Bewegung der Substanzeinheiten des Atoms auch in der Richtung der Tangente ausgeschlossen; denn auch hier wirkt jeder einzelnen tangentialen Kraft eine gleich grosse Kraft aus direct entgegengesetzter Richtung entgegen. Ein Uebergang von Kraft von den Aetheratomen auf das chemische Atom in der Richtung der Tangente kann daher ebenfalls nicht stattfinden, und, da in den Aetheratomen Materie vorhanden ist, in deren Verbindung jede einzelne Tangentialkraft ihre

Richtung unverändert beibehalten kann, so ergibt sich hieraus das Resultat, dass die Aetheratome ihre centrale Kraft in reflectirter, ihre tangentiale Kraft in unveränderter Richtung zurückerhalten. Die aus beiden Kräften resultirende Bewegung bildet den Abprall der Aetheratome von dem chemischen Atom, welcher, wie man erkennen wird, mit den bekannten Reflexionsgesetzen übereinstimmt.

Damit ist bewiesen, dass die blosse Gegenwart eines chemischen Atoms im äthererfüllten Raum nicht genügt, um eine Aenderung der normalen Vertheilung der Kräfte in dem Medium des Aethers hervorzubringen. Dies Verhältnis ändert sich jedoch, sobald wir annehmen, dass das eben betrachtete Atom rotirende Bewegung um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe erhält. Zu der Entstehung der rotirenden Bewegung ist zunächst eine Differenzwirkung der tangentialen Kräfte erforderlich, da aus einer Differenzwirkung der centralen Kräfte nur geradlinig fortschreitende Atombewegung resultiren kann. Wie vorhin bemerkt, ist jedoch eine Differenzwirkung der tangentialen Kraft allein nicht im Stande, die Kreisbewegung der Substanzeinheiten hervorzubringen; es ist vielmehr hierzu die Mitwirkung einer zweiten Kraft erforderlich, welche an jedem Punkte der Kreisbahn in solcher Stärke und Richtung einwirkt, dass aus der Vereinigung beider Kräfte die krumme, in sich zurückkehrende Bewegungslinie der Substanzeinheiten resultirt. Wie wir weiter bereits festgestellt haben, kann diese, für das Zustandekommen der Rotationsbewegung nothwendige Ergänzungskraft sich nur aus der auf den Schwerpunkt gerichteten centralen Kraft herleiten und demnach nur dadurch entstehen, dass sich dieselbe in zwei Componenten zerlegt, wozu die Bedingung in dem Widerstand gegeben ist, welchen die aus entgegengesetzten Richtungen wirkenden centralen Kräfte sich gegenseitig leisten. Da die Kreisbewegung der Substanzeinheiten sich in einer senkrecht durch die Rotationsaxe gelegten Ebene vollzieht, muss die für die Entstehung der Kreisbewegung in Betracht kommende Componente I eine derartige Richtung haben, dass aus ihrer Verbindung mit der Tangentialkraft keine Aenderung der Rotationsebene resultirt; sie muss demnach in dieselbe Ebene fallen, was nur dann möglich ist, wenn die Richtung der aus jeder einzelnen centralen Kraft hervorgehenden Componente I in diejenige Linie fällt, welche von dem Angriffspunkt auf der Atomoberfläche senkrecht auf die Rotationsaxe gezogen werden kann. Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, dass die Zerlegung der auf den Schwerpunkt gerichteten centralen Kräfte sich an allen Punkten der Atomoberfläche und während der ganzen Dauer der Rotationsbewegung vollziehen muss, da an allen Punkten und ferner in jedem aufeinanderfolgenden Zeitmoment eine Aenderung der Bewegungsrichtung von

Substanzeinheiten zu erfolgen hat. Hieraus folgt, dass ein rotirendes Atom fortwährend Kraft von dem umgebenden Medium des Aethers absorbirt, oder was hiermit gleichbedeutend ist, dass die auf ein rotirendes chemisches Atom aufprallenden Aetheratome einen Theil ihrer Kraft, und zwar nur Kraft von einer ganz bestimmten Richtung einbüssen. Es leuchtet daher ein, dass der resultirende Aetheratomabprall von einem ruhenden chemischen Atom nothwendiger Weise verschieden von demjenigen von einem rotirenden Atom sein muss. In dem einen Falle erhalten die Aetheratome alle Kraft zurück und weder der Grösse noch der Richtung nach wird die Summe der in dem Aether vorhandenen Kraft geändert. In dem zweiten Falle geht dagegen fortwährend Kraft von ganz bestimmter Richtung von dem Aether auf das rotirende Atom über, folglich muss auch die Summe und die Vertheilung der in dem Aether wirksamen Kräfte eine Aenderung erfahren. Unsere Gesetze der Kraft gewähren uns die erforderlichen Grundlagen, diese Aenderungen, welche in dem resultirenden Atomabprall ihren wahrnehmbaren Ausdruck finden, zu berechnen, und setzen uns dadurch in den Stand, die attractiven und repulsiven Wirkungen zu erkennen, welche von einem rotirenden Atom im Gegensatz zu einem ruhenden Atom in dem Medium des Aethers hervorgebracht werden.

Zu dem Zweck dieser Untersuchung nehmen wir an, dass mit dem vorhin betrachteten ruhenden Atom sich eine in der Richtung der Tangente wirkende Kraft t verbindet, welche demselben rotirende Bewegung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe zu ertheilen strebt. Zur Entstehung der Rotationsbewegung ist jedoch noch die Mitwirkung einer an allen Punkten der Atomoberfläche einwirkenden Centripetalkraft erforderlich, deren Grösse p, wie wohl nicht näher ausgeführt zu werden braucht, in einem ganz bestimmten Verhältnis zu der Kraft t stehen muss. Die Vereinigung beider Kräfte kann sich, da sie unter einem Winkel von $1r$ erfolgt, nur nach dem Gesetz von dem Kräfteparallelogramm vollziehen. Es ist daher erforderlich, das uns noch unbekannte Grössenverhältnis beider Kräfte t und p wenigstens annähernd zu bestimmen; denn nur dann sind wir im Stande, ein Parallelogramm zu construiren und die resultirenden Kräfte zu berechnen. Hierbei ist nun zunächst zu beachten, dass die Tangentialkraft t dauernd mit dem rotirenden Atom verbunden ist, während die Centripetalkraft p jeden Moment erneut auf das Atom einwirken muss, um die Kreisbewegung der Substanzeinheiten hervorzubringen. Da nun die Centripetalkraft sich auf das rotirende Atom durch den Aufprall von Aetheratomen überträgt, so muss nothwendiger Weise ein zeitlicher Zwischenraum zwischen dem Aufprall zweier Aetheratome

auf ein und denselben Punkt der Atomoberfläche liegen. Diese unendlich kurzen Zeitintervalle sind für alle Punkte der Atomoberfläche von gleicher Dauer ε, so dass wir uns den Aufprall der Aetheratome und die Entstehung der zu einer Atomumdrehung erforderlichen Centripetalkraft auf eine Anzahl von Momenten vertheilt denken können, welche durch gleiche zeitliche Zwischenräume von der Dauer ε getrennt sind. Während eines solchen Zwischenraumes kann nun selbstverständlich eine Aenderung der mit dem Atom verbundenen Tangentialkraft nicht erfolgen. Genau genommen kann daher auch keine Kreisbewegung der Substanzeinheiten resultiren, vielmehr stellt sich die von ihnen in einer Umdrehung zurückgelegte Bahn als der Umfang eines Vielecks von unendlich kurzen Seiten dar, welcher mit der Peripherie eines Kreises sehr nahe zusammenfällt. Der Einfachheit halber ersetzen wir nun die Summe aller Substanzeinheiten des Atoms durch dessen in der Abstandseinheit a von der Rotationsaxe angebrachtes Trägheitsmoment k; es folgt alsdann, dass auch dessen Bewegungsrichtung nicht genau mit der Peripherie eines Kreises von dem Radius a, sondern mit dem Umfang eines regelmässigen Vielecks von der Seitenlänge s zusammenfällt. Die Grösse s stellt daher eine geradlinige Wegestrecke dar, welche von dem Trägheitsmoment k in der Zeit ε unter Einwirkung der Kraft t zurückgelegt wird. Als Maass für die fortschreitende Bewegungsgeschwindigkeit v des Trägheitsmoments erhalten wir daher die Gleichung

$$v = \frac{s}{\varepsilon}$$

oder, wenn wir ε als die Einheit der Zeit betrachten

$$v = s.$$

Durch die Ersetzung des rotirenden Atoms durch die Kreisbewegung seines Trägheitsmoments sind wir auch im Stande, das Verhältnis der Centripetalkraft p zu der Tangentialkraft t nach dem Satze zu bestimmen, dass zu der Kreisbewegung eines Körpers um einen Mittelpunkt eine Centripetalkraft erforderlich ist, welche proportional der bewegten Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Abstand der Masse von dem Mittelpunkt der Kreisbahn ist. Für die Bewegung des Trägheitsmoments um die Rotationsaxe erhalten wir daher die Gleichung

$$p = \frac{k \cdot v^2}{a}.$$

Ersetzen wir die Grösse v einmal durch die Strecke s, ein zweites Mal durch den Quotienten $\frac{t}{k}$, so wird

$$p = \frac{ts}{a}$$

und es verhält sich dann

$$p : t = s : a.$$

Während t die dauernd mit dem Atom verbundene Tangentialkraft bedeutet, stellt p eine Kraft dar, welche in der unendlich kurzen Zeiteinheit s sich stetig erneuern muss; wollten wir daher die zu einer Umdrehung des Atoms erforderliche Centripetalkraft bestimmen, so hätten wir die Kraft $\frac{t \cdot s}{a}$ mit der Summe der zu einer Umdrehung erforderlichen Zeiteinheiten, d. h. mit der Anzahl der Seiten des Vielecks zu multipliciren, welche, unter der Voraussetzung, dass die Strecke s unendlich klein ist, durch den Quotienten $\frac{2\pi a}{s}$ gegeben ist. Die zu einer Umdrehung des Atoms erforderliche Centripetalkraft P erhalten wir dann in der Gleichung

$$P = 2\pi t.$$

Für die beabsichtigte Construction eines Parallelogramms kommt nun die Kraft P nicht weiter für uns in Betracht, sondern nur die Kraft p, deren Grösse nur dann genau berechnet werden könnte, wenn uns das Verhältnis der Wegestrecke s zu der Abstandseinheit a bekannt wäre. Durch Rechnungen lässt sich hier weiter nichts mehr ermitteln, wohl aber kann es keinem Zweifel unterliegen, dass, wenn die Bewegung des Trägheitsmoments mit der zur Voraussetzung gemachten Kreisbahn zusammenfallen soll, dies nur dann möglich ist, wenn die Strecke s nur sehr klein im Verhältnis zu der Abstandseinheit a ist. Hieraus ergibt sich dann weiter, dass die Kraft p sehr klein in Vergleichung zu der Kraft t ist. Ferner muss dann die Zeit s einen sehr kleinen Bruchtheil der zu einer Atomumdrehung erforderlichen Zeit repräsentiren, so dass während einer Atomumdrehung eine sehr häufige Wiederholung des Aufpralls von Aetheratomen und damit im Zusammenhang eine sehr häufige Erneuerung der Einwirkung einer Centripetalkraft p stattfindet. Mit dieser Folgerung befinden wir uns in Uebereinstimmung mit unserer anderweitigen Voraussetzung von der Constitution des Aethers, so dass ein Einwand wohl kaum dagegen erhoben werden dürfte, wenn wir in unseren weiteren Untersuchungen der Kraft p einen gegen t sehr kleinen Werth beilegen.

Damit sind wir in Stand gesetzt, die Vereinigung der Tangentialkraft und Centripetalkraft durch die Construction eines Parallelogramms darzustellen, dessen Seiten s dem Quotienten $\frac{t}{k}$, und s_1 dem Quotienten $\frac{p}{k}$

proportional sind. Aus dem Grössenverhältnis von t und p erhellt dann, dass s_1 sehr klein gegen s ist; das Parallelogramm ist daher ein langgestrecktes Rechteck, in welchem die resultirende Diagonale mit der Seite s nur einen unendlich kleinen Winkel bildet, was ja auch erforderlich ist, wenn die Richtung der Kraft t und die Diagonale gleichzeitig mit der Peripherie eines Kreises zusammenfallen sollen. Da nun

$$R^2 = S^2 + S_1^2$$

S_1^2 aber nur einen unendlich kleinen Werth gegen S^2 darstellt, so folgt, dass die Diagonale in Vergleichung mit S nur um eine sehr kleine Strecke l grösser sein kann. Hiernach ist auch die auf die Diagonale entfallende Kraft R nur um einen unendlich kleinen Werth grösser als t, welcher zugleich die Verringerung dp darstellt, welche die Componenten $\pi + \pi_1$ gegen p aufweisen. Es ist daher

$$R = t + dp$$

$$\pi = \frac{p - dp}{2}; \quad \pi_1 = \frac{p - dp}{2}.$$

Allein auch in Vergleichung zu p muss dp als sehr klein angenommen werden; denn es ist

$$\frac{dp}{k} = l = D - s; \quad \left(\frac{dp}{k}\right)^2 = (D - S)^2$$

$$\frac{p}{k} = s_1; \quad s_1^2 = D^2 - s^2$$

$$p^2 : (dp)^2 = D^2 - s^2 : (D - s)^2 = D + s : D - s.$$

Aus dem Längenverhältnis von D und s ergibt sich dann, dass dp nur einen kleinen Bruchtheil von p darstellen kann; für unsere weitere Beweisführung genügt eine Annahme $p > 4\,dp$, gegen welches Grössenverhältnis ein Einwand wohl kaum erhoben werden dürfte.

Es bleibt nun noch übrig, auch die Richtung dieser drei Kräfte festzustellen. Die Kraft R bewirkt das Voranschreiten der Rotationsbewegung um eine Strecke s; nach Zurücklegung derselben erfolgt eine erneute Einwirkung von Centripetalkraft auf die alsdann wieder zur Tangentialkraft gewordenen Kraft R, wobei sich der eben geschilderte Process der Vereinigung beider Kräfte wiederholt. Die Kraft R bleibt daher dauernd mit den Substanzeinheiten des Atoms verbunden; sie kann für den resultirenden Aetheratom-Abprall nicht in Betracht kommen. Weiter ergibt sich aus dem Gesagten, dass die mit dem Atom verbundene Tangentialkraft in jeder Zeiteinheit s eine Zunahme erfahren wird; die Rotationsgeschwindigkeit des Atoms muss hiernach

eine constante Beschleunigung erfahren, mit welcher wir uns nachher noch zu beschäftigen haben.

In Betreff der Kräfte π und π_1 ist zunächst klar, dass sie an allen Punkten der Atomsubstanz als unendlich viele einzelne Kraft-Componenten gleichzeitig zur Entstehung gelangen, welche, ebenso wie die ursprünglichen Kräfte t und p, sowie die Componenten R, in senkrecht auf der Rotationsaxe stehende Ebenen fallen. Jeder einzelnen Kraft der Kategorie π wirkt eine gleich grosse Kraft der Kategorie π_1 aus direct entgegengesetzter Richtung entgegen. Alle einzelnen den Werth π_1 constituirenden Componenten gehen aus der Kraft p hervor, schneiden jedoch dieselbe unter einem sehr kleinen Winkel, so dass sie eine seitlich an der Rotationsaxe vorbeiführende, nahezu centripetale Richtung besitzen. Alle einzelnen, den Werth π_1 constituirenden Componenten gehen aus der Kraft t hervor, und fallen, da sie den Componenten π_1 direct entgegenwirken, in eine nahezu centrifugale Richtung. Verfolgt man daher von einem beliebigen Punkt der Atom oberfläche aus die Richtung einer Componente π, so wird man einen steten Wechsel von Componenten π und π_1 wahrnehmen, denn jede einzelne aufeinanderfolgende Substanzeinheit bildet einen Entstehungspunkt für je eine Componente π und π_1. Damit haben wir die Richtung der Kräfte π und π_1 soweit festgestellt, dass sich die aus ihnen resultirende Bewegung erkennen lässt. Infolge ihrer senkrechten Stellung zu der resultirenden Diagonale bleiben sie auf die Bewegung der Substanzeinheiten ohne Einfluss; sie können sich daher auch nicht mit denselben verbinden, d. h. nicht mit dem rotirenden Atom verbunden bleiben, und müssen sich daher nothwendiger Weise auf andere Materie zu übertragen suchen, als welche nur der Ursprung der Kraft p, die auf die Oberfläche des Atoms aufprallenden Aetheratome, in Betracht kommen kann. Der Uebergang selbst ergibt sich aus unserer Voraussetzung über die resultirende Richtung zweier aus direkt entgegengesetzter Richtung aufeinander einwirkenden Kräfte; es kann entweder eine rechtwinklige Flexion unter radienförmiger Zertheilung oder eine Reflexion eintreten. Ersterer Fall ist jedoch deshalb ausgeschlossen, weil nach einer einmaligen Flexion und Zertheilung, welche bei allen einzelnen Componenten π und π_1 gleichzeitig vorgehen würde, die flectirten Kräfte sich gegenseitigen Widerstand in der Fortsetzung ihrer Bewegungsrichtungen leisten würden. Dieser Widerstand nöthigt uns vielmehr zu der Annahme einer Reflexion, welche für die in einer geraden Linie von der Richtung der Kraft π aufeinanderfolgenden einzelnen Kräfte π und π_1 sich so oft wiederholt, bis alle einzelnen Componenten π und π_1 eine centrifugale Richtung erlangt haben. Das Endergebnis unserer Ausführungen gipfelt daher in einem Uebergang

von Kraft von dem rotirenden Atom auf den Aether, deren Grösse gleich der Summe $\pi + \pi_1$ ist und deren Vertheilung auf die einzelnen Richtungen mit der Vertheilung aller einzelnen Componenten π und π_1 übereinstimmt. Die auf den Aether übergehende Kraft können wir daher der Grösse und Richtung nach durch die Werthe $\pi + \pi_1$ ausdrücken.

Mit der Vereinigung der Kräfte p und t nach dem Gesetz von dem Kräfteparallelogramm und ihrer Umwandlung in die Kräfte R, π und π_1 sind jedoch die Aenderungen noch nicht erschöpft, welche die Rotationsbewegung in der normalen Vertheilung der Kräfte hervorruft. Wie wir bereits nachgewiesen haben, kann die centripetale Kraft p ihren Ursprung nur aus centraler, auf den Schwerpunkt des Atoms gerichteter Kraft herleiten und nur dadurch zur Entstehung gelangen, dass alle oder ein Theil der letzteren Kraft, für welche wir den Gesammtwerth c einführen wollen, sich in zwei Componenten zerlegt, von welchen eine auf die centripetale Richtung entfällt und die Kraft p darstellt. Wir haben daher auch die Grösse und Richtung der zweiten Componenten in Betracht zu ziehen, wenn wir die aus der Rotationsbewegung resultirende Aenderung in der Vertheilung der Kräfte berechnen wollen. Die Grösse der auf diese zweiten Componenten entfallenden Kraft, welche wir mit q bezeichnen, ist bei der angenommenen Kugelgestalt des rotirenden Atoms leicht zu berechnen; wir erhalten für q der Grösse nach den Werth $\frac{p}{2}$. Die Richtung aller einzelnen, die Kraft q constituirenden Componenten steht zunächst senkrecht auf der Centripetalkraft und fällt ferner in dieselbe Ebene, in welcher auch die einzelnen die Grösse c constituirenden Kräfte und die hieraus hervorgehenden Kräfte p fallen. Hieraus ergibt sich, dass alle einzelnen Componenten q sich der Rotationsaxe parallel stellen, dass aber innerhalb der damit definirten Bewegungslinien zwei verschiedene, einander direct entgegengesetzte Bewegungsrichtungen entstehen müssen, indem alle auf der einen Polhälfte sich bildenden Componenten q denen der andern Polhälfte direct entgegenwirken. Da ferner die auf jede Polhälfte entfallenden Kräfte q die Hälfte der gesammten Kraft q repräsentiren, so ergibt sich, dass infolge der Rotationsbewegung zwei gleiche Kräfte parallel der Rotationsaxe aus direct entgegengesetzter Richtung auf das Atom einwirken, welche demselben eine fortschreitende Bewegung nicht ertheilen können, sondern infolge des gegenseitigen Widerstandes eine rechtwinklige Flexion und radienförmige Zertheilung erleiden. Ein Bedenken steht dieser Annahme nicht entgegen, denn es ist keine Kraft vorhanden, welche den Uebergang der Kraft q auf den umliegenden Aether hindern könnte. Man erkennt im übrigen auch sofort den Unterschied zwischen der Anordnung der Kräfte π und π_1 und der-

jenigen der Componenten q; letztere bilden zwei Gruppen paralleler Kräfte, welche sich durch je eine Resultirende ersetzen lassen, während die Componenten π und π_1 eine ganze Anzahl verschieden gerichteter Kräfte darstellen, welche durch je eine Resultirende nicht ersetzt werden können. Es kann daher nicht befremden, wenn die aus π und π_1 resultirende Kraft einen Unterschied gegen die aus den Componenten q resultirende Kraft, abgesehen von der Grösse, auch der Richtung nach aufweist, obschon in beiden Fällen die einzelnen Kräfte aus direct entgegengesetzter Richtung aufeinander einwirken.

Wir fassen nun die gesammten Veränderungen, welche die Rotationsbewegung des chemischen Atoms in der Vertheilung der Kräfte vollzieht, kurz zusammen. Aus dem Aufprall der Aetheratome resultirt eine auf den Schwerpunkt gerichtete centrale Kraft c, welche sich auf alle einzelnen Richtungen gleichmässig vertheilt und daher, bei einem nicht rotirenden Atom, sich gleichmässig reflectiren würde. Bei einem rotirenden Atom zerlegt sich ein Theil der Kraft c in die centripetale Kraft p und in die senkrecht auf ihr stehende Kraft q. Der bequemeren Anschauung wegen können wir dabei annehmen, dass alle Kraft p in die Horizontale fällt; alle Kraft q besitzt alsdann verticale Richtung. Die Grösse c vermindert sich infolgedessen um den Werth $\frac{3p}{2}$; der Rest $c - \frac{3p}{2}$ wird durch die Rotationsbewegung des Atoms nicht weiter berührt und geht nach seiner Reflexion auf den umliegenden Aether zurück, ohne eine Aenderung in der relativen Vertheilung der Kräfte in dem umgebenden Medium des Aethers hervorzubringen. Die Differenz $c - \frac{3p}{2}$ können wir daher von unserer weiteren Betrachtung ausschliessen.

Von der Kraft p verbindet sich ein Theil dp mit dem rotirenden Atom und wird daher für den resultirenden Aetheratomabprall ebenfalls gegenstandslos. Dagegen treten an Stelle der horizontalen Kraft p die in der gleichen Ebene wirkenden Componenten π und π_1, deren Richtung nach ihrer Reflexion nahezu centrifugal, somit nahezu identisch mit derjenigen ist, welche die Kraft p bei einer Reflexion erlangen würde. Durch Zerlegung von $\pi + \pi_1$ in zwei rechtwinklige Componenten lässt sich hieraus die auf den Aether übergehende Kraft rein centrifugaler Richtung ermitteln, dieselbe kann in keinem Falle kleiner als $p - 2\,dp$ sein. Der in der horizontalen Ebene sich vollziehende Aetheratomabprall wird jedoch nicht nur durch die Componenten π und π_1, sondern auch durch die aus der Flexion der Componenten q hervorgehende Kraft bedingt; denn alle Kraft q gelangt durch die rechtwinklige Flexion aus der Verticalen in die horizontale Ebene und wird ferner durch

die gleichzeitige radienförmige Zertheilung eine reine Centrifugalkraft. Als solche muss die aus den Componenten q hervorgehende Kraft auch auf den resultirenden Aetheratomabprall horizontaler Richtung von Einfluss sein; derselbe vollzieht sich daher unter der gleichzeitigen Einwirkung zweier Kräfte, deren Summe gleich $p - 2dp + \frac{p}{2}$ ist. Vergleicht man hiermit die durch den Aufprall der Aetheratome auf das rotirende Atom dem Aether entzogene horizontale Kraft p, so ergibt sich, dass das Gleichgewicht in der Vertheilung der Kraft horizontaler Richtung nur dann weiter bestehen kann, wenn $\frac{p}{2} = 2dp$ sein würde. Nach unseren früheren Ausführungen repräsentirt jedoch dp nur einen so kleinen Theil von p, dass

$$\frac{p}{2} > 2dp,$$

mithin auch

$$p - 2dp + \frac{p}{2} > p$$

ist. Dadurch ist bewiesen, dass infolge der Rotationsbewegung des Atoms, der Abprall der Aetheratome in horizontaler Richtung sich mit grösserer Kraft vollzieht, als der gleichgerichtete Aetheratomaufprall.

Die Wirkung der Kraft p bezieht sich, wie früher angenommen wurde, nur auf die Zeiteinheit ε. In jeder folgenden Zeiteinheit erfolgt ein neuer Aufprall von Aetheratomen und wiederholt sich dann der vorhin dargelegte Process. Nehmen wir an, dass die Rotationsgeschwindigkeit constant sei, so bleiben auch die resultirenden Kräfte und Bewegungen constant. Das rotirende Atom wird infolgedessen ein Centrum einer constanten, in der Rotationsebene gleichmässig nach allen Richtungen voranschreitenden Kraftaction, welche darin besteht, dass die von dem rotirenden Atom sich entfernenden Aetheratome eine grössere Geschwindigkeit (und somit auch eine grössere Kraft) besitzen, als diejenigen Aetheratome, deren Bewegung nach dem Atom hin gerichtet ist. Nach unseren Voraussetzungen tauschen zwei aus direct entgegengesetzter Richtung aufeinanderstossende Aetheratome ihre Richtungen und Geschwindigkeiten aus; die von dem rotirenden Atome ausgehende Kraft pflanzt sich demnach constant fort, während die auf das Atom einwirkende Kraft unverändert die normale Grösse beibehält. Aus diesem Grunde kann auch in dem weiteren Verlauf der Rotationsbewegung eine Aenderung in der gleichmässigen Ausbreitung von Kraft von dem rotirenden Atom aus nicht eintreten.

Wenn wir dagegen andrerseits bei den beiden, durch die Verlängerungen der Rotationsaxe gegebenen Richtungen den resultirenden

Aetheratomabprall mit dem Aufprall vergleichen, so ergibt sich, dass dem normalen Aufprall mit einer die Grösse c constituirenden Kraft ein Abprall mit einer Kraft von nur $c - \frac{p}{2}$ gegenübersteht. Auch hier tauschen die von dem rotirenden Atom sich entfernenden Aetheratome mit den ihnen begegnenden von normaler Bewegungsgeschwindigkeit die beiderseitigen Kräfte aus, woraus folgt, dass die auf die Pole des rotirenden Atoms sich übertragende Kraft stets unverändert bleibt. Würde man daher in einiger Entfernung von dem rotirenden Atom in einer der durch die Verlängerung der Rotationsaxe gegebenen Richtungen einen materiellen Punkt anbringen, so erhält derselbe die Einwirkung zweier ungleicher Kräfte aus direct entgegengesetzter Richtung, welche sich in jeder Zeiteinheit wiederholen und daher constant sind. Die in der Richtung nach dem rotirenden Atom wirkende Kraft ist jedoch in jeder Zeiteinheit um den Werth $\frac{p}{4}$ grösser, als die von der Richtung des Atoms her wirkende Kraft, folglich muss der materielle Punkt eine sich stetig beschleunigende Bewegung in der Richtung nach dem rotirenden Atom und senkrecht auf dessen Pol hin erhalten.

Damit ist die unseren Voraussetzungen vorangeschickte Behauptung bewiesen, dass ein rotirendes Atom ein Centrum zweier gleichzeitiger Kräfteactionen bildet, von welchen die eine nach dem Atom hin, die andere von demselben weg nach dessen Umgebung gerichtet ist und welche beide deshalb nebeneinander bestehen können, weil die Richtungen der beiden Kräfte-Actionen senkrecht aufeinander stehen. Dass die Grösse der beiden Kräfte-Actionen sich proportional der Rotationsgeschwindigkeit, und bei Gleichheit des Volumens auch proportional der Masse des rotirenden Atoms ändert, sei hier noch erwähnt. Der Beweis hierfür ergibt sich ohne weiteres daraus, dass in beiden Fällen die Centripetalkraft p sich proportional vermehren oder verringern muss.

Im Laufe unserer Beweisführung waren wir zu dem Resultat gelangt, dass die der Rotationsbewegung des Atoms zu Grunde liegende Tangentialkraft t in jeder Zeiteinheit um den Werth dp zunimmt und dass somit die Rotationsgeschwindigkeit eine constante Beschleunigung erfahren muss. Würde dies jedoch der Fall sein, so würde die Rotationsbewegung der Atome niemals ein Fundament bilden können, auf welchem sich eine Erklärung der physikalischen Erscheinungen aufbauen liesse. Nun ist jedoch leicht nachzuweisen, dass der constanten Vermehrung der Tangentialkraft auch eine constante Verminderung gegenübersteht, und zwar durch einen Process, welcher sich am an-

schaulichsten mit der Uebertragung von Kraft vergleichen lässt, welche stattfindet, wenn auf ein rotirendes Rad in centripetaler Richtung kleine Körper aufprallen; die Aenderung, welche der Reflexionswinkel infolge der Rotationsbewegung des Rades erfährt, beweist in diesem Falle, dass ein Theil der Tangentialkraft des rotirenden Rades sich auf die aufprallenden Körper überträgt. Ein ähnlicher Ausgleichungsprocess muss sich ebenfalls zwischen der fortschreitenden Bewegung der Substanzeinheiten und den aufprallenden Aetheratomen vollziehen. Bei näherer Prüfung dieses Vorgangs stellt sich jedoch heraus, dass der Uebergang von Tangentialkraft von dem rotirenden Atom auf die Aetheratome an den verschiedenen Punkten der Atomoberfläche eine ungleichmässige Wirkung hervorbringt, ganz abgesehen von dem Unterschied in der Bewegungsgeschwindigkeit, welche für die einzelnen Substanzeinheiten um so mehr abnimmt, je näher sie sich an der Rotationsaxe befinden. Ein Aetheratom, welches in der Nähe des Aequators auf das rotirende Atom aufprallt, erhält mehr oder weniger eine fortschreitende Bewegung in der Richtung der mit dem Atom verbundenen Tangentialkraft; es hängt dies wesentlich davon ab, welchen Winkel die Richtung des aufprallenden Aetheratoms mit der Ebene und Richtung bildet, in welchen sich die an der Berührungsstelle liegende Substanzeinheit bewegt. Dagegen erhält ein Aetheratom, welches direct auf einen der Atompole aufprallt, durch Uebertragung von Tangentialkraft eine gleichgerichtete rotirende Bewegung um eine Axe, welche eine geradlinige Verlängerung der Axe des chemischen Atoms bildet. Sucht man sich über den Grund dieser verschiedenen Wirkungen klar zu werden, welchen ein und dieselbe Tangentialkraft auf die an beiden Punkten gleichmässig aufprallenden Aetheratome hervorbringt, so findet man, dass am Aequator die Bewegung der Substanzeinheiten mit der Tangente einen Winkel bildet und dass daher die von den Substanzeinheiten sich übertragende Kraft als schiefer Stoss auf die Aetheratome einwirkt, infolgedessen dieselben neben einer rotirenden eine geradlinig fortschreitende Bewegung erhalten. Dagegen ist an den Polen eine Uebertragung von Tangentialkraft in centraler Richtung auf den Schwerpunkt eines aufprallenden Aetheratoms deshalb unmöglich, weil die Richtung der sich durch die Berührung übertragenden Tangentialkraft senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen dem Berührungspunkt und dem Schwerpunkt des Aetheratoms steht. Die sich übertragende Kraft kann daher hier nur in der Richtung der Tangente wirken, infolgedessen die Aetheratome an den Polen des chemischen Atoms auch nur rotirende Bewegung erhalten können. Die hierbei sich ergebende Frage, ob zu dem Zustandekommen einer Rotationsbewegung der Aetheratome es noch besonderer Voraussetzungen bedarf,

oder ob angenommen werden kann, dass die Aetheratome sich gegenseitig so häufig berühren, dass die erforderliche Centripetalkraft hieraus resultiren kann, muss vorläufig als offene betrachtet werden; und gegen die Behauptung an und für sich, dass ein Aetheratom eine rotirende Bewegung um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe annehmen kann, wird man wohl kaum einen Einwand erheben wollen. Auch wird man es begreiflich finden, dass ein rotirendes Aetheratom, wenn es mit einem nicht rotirenden Aetheratom zusammenstösst, einen Theil seiner Tangentialkraft auf letzeres übertragen kann; durch die fortschreitende Bewegung der Aetheratome wird daher Tangentialkraft des rotirenden chemischen Atoms auch auf andere, nicht unmittelbar mit demselben in Berührung tretende Aetheratome übertragen werden.

Wie gross nun diejenige Tangentialkraft ist, welche ein rotirendes chemisches Atom durch die constante Berührung mit den Aetheratomen verliert, lässt sich nicht berechnen und noch viel weniger mit der Grösse dp, der Zunahme der Tangentialkraft t in der Zeiteinheit s, vergleichen. Ob daher Zunahme und Abnahme von Tangentialkraft sich das Gleichgewicht halten, kann nicht direct bewiesen werden; wohl aber ist es unzweifelhaft, dass der constanten Zunahme auch eine constante Abnahme von Tangentialkraft bei dem rotirenden chemischen Atom gegenübersteht, welche möglicherweise der Zunahme von Tangentialkraft das Gleichgewicht hält. Wenn wir, statt wie bisher, ein einzelnes rotirendes Atom, die Gesammtheit aller chemischen Materie in Betracht ziehen, so ergibt sich, dass die Möglichkeit des Ausgleichs zwischen Zu- und Abnahme von Tangentialkraft, abgesehen von aller Verschiedenheit in der Rotationsgeschwindigkeit, für alle Atome unseres Sonnensystems nicht die gleiche ist, und dass inbesondere bei den die Sonne constituirenden Atomen diese Möglichkeit bei weitem weniger Wahrscheinlichkeit besitzt als bei den Atomen der übrigen Planeten. Die Ursache dieser Ungleichheit liegt in der Verschiedenheit der Bewegungen, welche die Sonne einerseits und die Planeten andrerseits besitzen. Aehnlich wie ein Körper rascher zu erkalten vermag, wenn er durch voranschreitende Bewegung fortwährend mit noch nicht erwärmter Luft in Berührung gelangt, ebenso natürlich ist es, dass der Uebergang von Tangentialkraft auf die Aetheratome weit rascher und wirksamer von Statten geht, wenn die rotirenden chemischen Atome fortwährend mit anderen Aetheratomen in Berührung treten. Dies ist der Fall bei allen Atomen, welche als Bestandtheile eines Planeten fortschreitende Bewegung durch den Himmelsraum besitzen, während die die Sonne constituirenden Atome bei ihrer, in der Sonnenumdrehung voranschreitenden Bewegung nur mit solchen Aetheratomen in Berührung treten können, welche das übertragungsfähige Maximum von Ro-

tationsgeschwindigkeit bereits nahezu besitzen und daher für die weitere Aufnahme von Tangentialkraft wenig geeignet sind.

In auffälligem Gegensatz hierzu steht nun die Thatsache, dass die Sonne, deren Atome verhältnismässig weniger Tangentialkraft durch Uebertragung von rotirender Bewegung auf Aetheratome abgeben können, im Stande ist, constant Licht und Wärme in Form von Aetherwellen auszustrahlen. Die Ableitung der letzteren aus einer rotirenden Bewegung der chemischen Atome bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten, sie wird sogar zur Nothwendigkeit für jeden, welcher die am Schlusse unserer Voraussetzungen ausgesprochene Hypothese über die Rotationsbewegung als Grundlage aller physikalischen Processe als richtig anerkennt. Die der vorliegenden Arbeit gesteckten Grenzen verbieten es, hier eine Theorie der Entstehung der Aetherwellen aus einer rotirenden Bewegung der chemischen Atome zu entwickeln; soviel ist jedoch klar, dass durch die Emission von Aetherwellen eine Fortpflanzung von Kraft stattfindet und dass diese Kraft nur aus einer Verminderung der Tangentialkraft des rotirenden chemischen Atoms ihren Ursprung herleiten kann. Es muss daher angenommen werden, dass es zwei Quellen gibt, aus welchen eine constante Verminderung der Tangentialkraft rotirender chemischer Atome resultiren kann, und dass überall da, wo die Uebertragung rotirender Bewegung allein nicht ausreicht, um das Gleichgewicht zwischen der Zu- und Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit herzustellen, der Gleichgewichtszustand durch erhöhte Wärmeausstrahlung herbeigeführt wird. Als letzte Consequenz aus unseren Voraussetzungen und Deductionen ergibt sich daher, dass die Erhaltung der Sonnenwärme auf eine indirecte Wirkung der Schwerkraft zurückzuführen ist; dieselbe wird durch Flexion in Centrifugalkraft umgewandelt, um sodann als Centripetalkraft eine Beschleunigung der Rotationsgeschwindigkeit der einzelnen Atome zu bewirken. Die der Beschleunigung zu Grunde liegende Kraft kann daher constant als Licht und Wärme ausgestrahlt werden, wobei die Rotationsgeschwindigkeit der Atome als die die Sonnenwärme darstellende Bewegung zugleich aber auch die ausgestrahlte Wärmemenge constant bleiben können.

Ueber die elektromotorische Gegenkraft im galvanischen Flammenbogen.

Von

H. Wild.

In der interessanten Abhandlung des Herrn Lecher: „Neue Versuche über den galvanischen Lichtbogen", die aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie in diese Zeitschrift übergegangen ist, heisst es Bd. 23 S. 796: „Der Begriff der elektromotorischen Gegenkraft im Lichtbogen wurde 1867 von Edlund eingeführt" und weiterhin: „Im Jahre 1868 veröffentlichte Edlund einen Versuch, welcher direct die Wirkung der elektromotorischen Gegenkraft zeigen soll".

Ich benutze diese Gelegenheit, auf eine, wie es scheint, wenig beachtete, jedenfalls auch von Edlund und G. Wiedemann übersehene Notiz von mir in Poggendorff's Annalen Bd. 111 S. 624 (datirend vom 10. November 1860) hinzuweisen, die den Titel führt: „Versuch einer Erklärung der unipolaren Erwärmung beim galvanischen Flammenbogen". In derselben habe ich die stärkere Erwärmung der einen Elektrode auf das bekannte Peltier'sche Phänomen der Wärme- oder Kälteerzeugung durch den elektrischen Strom an der Grenze zweier Leiter zurückzuführen gesucht und damals schon zur Stütze dieser Erklärung in einer der späteren Edlund'schen ganz entsprechenden Weise eine von mir als thermoelektrische aufgefasste Gegenkraft, resp. einen entsprechenden Gegenstrom durch rasche Verbindung der Elektroden mit einem Galvanometer nach Aufheben des primären Stroms nachgewiesen und auch gemessen.

Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft[1]).

Von

Prof. **Franz Exner.**

I. In einer früheren Publication[2]) habe ich ausführlich einerseits die Gründe auseinandergesetzt, warum die bisherigen Theorien der Luftelektricität mit der Erfahrung nicht in Einklang zu bringen sind und andrerseits gezeigt, von welchen Gesichtspunkten man ausgehen muss, um zu einer Lösung dieses Problems zu gelangen. Es hat sich als nothwendig herausgestellt, eine systematische Erforschung des elektrischen Feldes, in welchem sich die Erde befindet, vorzunehmen, und zwar zunächst bei normalem schönen Wetter und ganz abgesehen von elektrischen Störungen, wie es z. B die Gewitter sind. Als erstes Resultat darauf abzielender Messungen hat sich — ganz in Uebereinstimmung mit diesbezüglichen älteren Beobachtungen — die Thatsache ergeben, dass die Oberfläche der Erde eine bedeutende negative Ladung besitzt; die Grösse dieser Ladung sowie das absolute Potential der Erde konnte durch Messung der Intensität des elektrischen Feldes an der Erdoberfläche ermittelt werden. Aus der Variation dieser Intensität mit der Höhe, wie sie sich durch eine Beobachtung im Luftballon ergab, konnte die weitere Thatsache festgestellt werden, dass ausser der Ladung an der Erdoberfläche sich auch noch elektrische Ladungen in der Atmosphäre finden, und dass diese gleichfalls ein negatives Vorzeichen besitzen.

Es wurde ferner die Hypothese aufgestellt, dass diese letzteren Ladungen an den Wasserdampf der Luft gebunden seien und durch den Process des Verdampfens von der Erdoberfläche nach oben geführt wurden; zur Stütze dieser Hypothese wurde der bekannte tägliche und jährliche Gang der Luftelektricität herangezogen und gezeigt, dass stets das grösste Potentialgefälle an der Erdoberfläche in Richtung der Normalen mit dem kleinsten Wassergehalte der Luft zusammenfalle und umgekehrt. Ein solches Verhalten entspricht aber offenbar der

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Sitzungsberichten der Wiener Akad. Bd. 96 S. 419 (1887).

2) Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. 93, S. 222 (1886).

gemachten Voraussetzung, indem das Potentialgefälle um so kleiner werden muss, je mehr Elektricität vom Boden in die Höhe gegangen ist.

Nun sind die älteren Beobachtungen über die Stärke der Luftelektricität, so zahlreich sie auch sind, doch leider nicht geeignet, diese Hypothese einer quantitativen Prüfung zu unterziehen, und zwar aus zwei Gründen: erstens wurde immer und wird leider noch an allen meteorologischen Stationen, wo fortlaufende Beobachtungen gemacht werden, nach einem ganz willkürlichen und unbestimmbaren Maasse gemessen, indem die Potentiale zwar in Volt ausgedrückt, aber auf einen Punkt in der Luft bezogen werden, dessen Lage auf jeder Station eine andere und in elektrischer Beziehung nicht definirte ist.

Es ist unumgänglich nothwendig, die Beobachtung an der fixen Station durch gleichzeitige Messung mittels transportabler Apparate auf freier Ebene in der Nachbarschaft derselben zu reduciren und so das normale Potentialgefälle pro Meter in Volt auszudrücken [1]). Nimmt man diese Reduction nicht vor, so erhält man immer nur Relativzahlen für den betreffenden Beobachtungsort und wird kein Bild des elektrischen Zustandes der Erde gewinnen; wie schlimm es aber um unsere Kenntnis der sonstigen meteorologischen Factoren bestellt wäre, wenn an allen Stationen die Apparate wie Thermometer, Barometer etc. mit willkürlichen, ihrem Werthe nach unbekannten Theilungen versehen wären, das liegt wohl auf der Hand.

Ein zweiter Grund für die Unbrauchbarkeit der vorhandenen Beobachtungen zu vorliegendem Zwecke liegt darin, dass die Stationen zumeist innerhalb grösserer Städte situirt und damit all den durch Rauch und Staub verursachten Störungen ausgesetzt sind; dazu tritt der weitere Umstand, dass die Angaben der zumeist selbstregistrirenden Apparate ohne Rücksicht auf den herrschenden Witterungscharakter wiedergegeben sind, wodurch ihr Werth sehr bedeutend sinkt. Denn da es sich zunächst um den normalen Zustand bei schönem Wetter handelt, dieser aber schon durch verhältnismässig geringe Störungen desselben sich bedeutend ändert, so ist klar, dass Mittelwerthe, die in der Regel zum grössten Theil aus Beobachtungen bei schlechtem Wetter oder gar bei Regen gewonnen wurden, für den normalen Zustand absolut nicht massgebend sein können. Es wäre sehr zu wünschen, dass in Zukunft von Seite jener Stationen, wo fortlaufende Beobachtungen gemacht werden, diesem Punkte mehr Aufmerksamkeit geschenkt würde; im Vereine mit einer Reduction auf die Ebene würden die Messungen dann erst ein Material abgeben, dessen Werth dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft angemessen erscheint.

1) Es ist zu bemerken, dass eine derartige Reduction für eine jede Station nur ein einzigesmal gemacht zu werden braucht.

Die vorstehenden Gründe haben mich veranlasst, in den letzten Jahren zahlreiche Beobachtungen über das normale Potentialgefälle anzustellen, von denen für den vorliegenden Zweck jedoch nur die bei vollkommen schönem Wetter in Betracht kommen. Die Messungen bilden eine fortlaufende Reihe von August 1886 bis Mai 1887, welcher noch vereinzelte Messungen des Jahres 1885 vorangehen. Es wurden in diesem Zeitraume an 80 schönen Tagen im ganzen 133 Messungen ausgeführt, die sich in Tabelle I verzeichnet finden: dabei wurde an drei verschiedenen Orten beobachtet: 1. in Döbling, in unmittelbarer Nähe Wiens, auf einem freien Felde zunächst der meteorologischen Centralanstalt, 2. in St. Gilgen am Wolfgangsee in Oberösterreich auf einer Wiese, für welche der Gesichtskegel des freien Himmels einen mittleren Oeffnungswinkel von 160° hatte und 3. in Venedig am Lido, also unmittelbar am flachen Strande des Meeres mit vollkommen freiem Horizonte. Die Messungen geschahen durchwegs mit den transportablen Apparaten, deren Beschreibung ich jüngst gegeben habe [1]) und nach den eben daselbst erwähnten Methoden: die Apparate haben sich ausnahmslos gut bewährt.

Von einem Studium der täglichen Periode der atmosphärischen Elektricität und deren Zusammenhang mit der Feuchtigkeit der Luft musste dabei abgesehen werden, da ein solches sich nur an einer fixen Station, womöglich mit selbstregistrirenden Apparaten, ausführen lässt; hier wurde die Aufmerksamkeit nur auf die jährliche Periode gerichtet, d. h. auf die Aenderung des normalen Potentialgefälles mit jener Aenderung des Wassergehaltes der Luft, wie sie durch die Jahreszeiten bedingt ist.

Die Tabelle I (S. 228) ist wohl ohne weiteres klar; sie enthält ausser Ort und Zeit der Beobachtung noch die Angabe der Lufttemperatur sowie der absoluten und relativen Feuchtigkeit, ferner das beobachtete Potentialgefälle in Volt's pro Meter. Die Messungen sind, wie schon erwähnt, alle bei schönem Wetter und unbewölktem Himmel ausgeführt, also als normale zu bezeichnen, mit Ausnahme derjenigen, bei welchen sich specielle Bemerkungen in der letzten Rubrik befinden.

Zu betonen ist noch, dass das Vorzeichen der Elektrisirung ausnahmslos das positive war.

In Bezug auf die Angaben der Feuchtigkeit wäre noch zu bemerken, dass bei den Beobachtungen in St. Gilgen stets gleichzeitig eine Ablesung des Psychrometers gemacht wurde, dass dagegen für die Messungen in Wien (Döbling) und Venedig die Aufzeichnungen der betreffenden meteorologischen Anstalten verwendet wurden.

1) Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 95, S. 1084 (1887).

Tabelle I.

Nr. der Beobachtung	Ort	Jahr	Tag	Stunde	Temp. der Luft	Pot. Gefälle in Volt pro Meter	Feuchtigkeit	
							abs.	rel.
1	Döbling bei Wien	1885	20. I.	4 *p*	— 6	636	1,8	62
2	St. Gilgen	„	11. VIII.	10 *a*	+ 18,8	64	11,6	72
3	„	„	„	11 *a*	+ 18,9	64	11,7	72
4	„	„	„	12	+ 20,5	60	13,2	68
5	„	„	„	8 *p*	+ 16,6	76	9,7	70
6	„	„	4. IX.	11 *a*	+ 16,4	76	10,3	75
7	„	„	6. IX.	8 *a*	+ 9,2	110	7,4	87
8	„	„	„	10 *a*	+ 11,5	74	8,9	88
9	„	„	„	12	+ 15,1	72	9,8	75
10	„	„	„	5 *p*	+ 16,7	93	8,6	60
11	Venedig	1886	21. IV.	4 *p*	+ 14,0	85	9,5	82
12	St. Gilgen	„	20. VII.	7 *a*	+ 18,5	74	11,3	72
13	„	„	21. VII.	12	+ 24,0	60	12,0	56
14	„	„	„	4 *p*	+ 23,5	74	12,0	56
15	„	„	„	6 *p*	+ 21,0	55	12,0	65
16	„	„	22. VII.	11 *a*	+ 23,5	64	12,8	60
17	„	„	„	4 *p*	+ 23,0	72	11,0	55
18	„	„	26. VII.	11 *a*	+ 24,0	58	12,0	56
19	„	„	„	3 *p*	+ 25,0	89	9,5	40
20	„	„	„	4 *p*	+ 24,0	100	9,4	43
21	„	„	27. VII.	8 *a*	+ 18,0	69	10,9	71
22	„	„	29. VII.	10 *a*	+ 14,5	90	8,3	67
23	„	„	„	6 *p*	+ 12,5	117	8,3	77
24	„	„	„	8 *p*	+ 10,0	138	8,0	87
25	„	„	30. VII.	10 *a*	+ 15,5	100	9,7	73
26	„	„	„	3 *p*	+ 19,0	92	10,3	63
27	„	„	„	5 *p*	+ 18,5	92	10,6	67
28	„	„	2. VIII.	4 *p*	+ 16,0	71	10,0	74
29	„	„	8. VIII.	3 *p*	+ 19,5	87	10,7	63
30	„	„	9. VIII.	11 *a*	+ 21,0	87	11,2	61
31	„	„	„	1 *p*	+ 21,0	80	11,2	61
32	„	„	10. VIII.	4 *p*	+ 22,0	67	14,5	74
33	„	„	„	8 *p*	+ 16,0	67	11,4	84
34	„	„	12. VIII.	4 *p*	+ 13,0	100	8,6	77
35	„	„	13. VIII.	11 *a*	+ 15,0	113	8,7	68
36	„	„	„	1 *p*	+ 17,0	106	8,7	61
37	„	„	„	8 *p*	+ 16,5	117	10,3	75 [1]
38	„	„	„	5 *p*	+ 16,0	117	10,7	79 [1]
39	„	„	27. VIII.	4 *p*	+ 16,0	63	12,1	89
40	„	„	28. VIII.	10 *a*	+ 16,0	85	12,1	89
41	„	„	„	1 *p*	+ 18,5	80	11,3	72
42	„	„	30. VIII.	10 *a*	+ 17,5	117	11,9	80
43	„	„	„	4 *p*	+ 20,5	130	13,5	77
44	„	„	2. IX.	10 *a*	+ 19,5	95	12,1	72
45	„	„	„	12	+ 22,5	87	11,8	66
46	„	„	3. IX.	10 *a*	+ 18,5	95	11,5	76 [1]
47	„	„	„	5 *p*	+ 20,0	128	11,2	64 [1]
48	„	„	7. IX.	10 *a*	+ 16,5	95	11,7	85
49	„	„	„	4 *p*	+ 19,5	95	10,7	63
50	„	„	8. IX.	1 *p*	+ 21,5	74	11,0	58
51	„	„	10. IX.	9 *a*	+ 16,5	80	10,4	75
52	„	„	10. IX.	1 *p*	+ 20,5	77	10,1	56

1) In der Höhe Südwind.

Nr. der Beobachtung	Ort	Jahr	Tag	Stunde	Temp. der Luft	Pot. Gefälle in Volt pro Meter	Feuchtigkeit	
							abs.	rel.
53	St. Gilgen	1886	12. IX.	9 a	+ 15,5	74	10,3	79
54	"	"	"	1 p	+ 20,5	69	11,5	65
55	"	"	13. IX.	12	+ 20,0	69	11,1	64
56	"	"	"	5 p	+ 17,0	95	10,8	75
57	"	"	14. IX.	4 p	+ 19,0	87	9,6	58
58	"	"	15. IX.	10 a	+ 17,5	87	9,8	66
59	"	"	"	1 p	+ 21,0	79	11,2	61
60	"	"	17. IX.	12	+ 12,5	117	7,0	66
61	"	"	"	1 p	+ 13,5	127	8,2	72
62	"	"	"	5 p	+ 12,5	130	8,3	76
63	"	"	18. IX.	10 a	+ 13,0	79	8,6	77
64	"	"	"	3 p	+ 16,5	127	9,0	65
65	"	"	"	5 p	+ 12,5	127	8,3	77
66	"	"	19. IX.	10 a	+ 12,0	117	9,2	89
67	"	"	"	1 p	+ 16,0	108	9,3	69
68	"	"	26. IX.	1 p	+ 11,0	122	6,2	63
69	"	"	"	4 p	+ 10,0	127	6,8	74
70	"	"	27. IX.	1 p	+ 13,0	122	6,6	60
71	"	"	"	4 p	+ 11,0	95	7,4	75
72	"	"	28. IX.	11 a	+ 14,0	95	8,0	67
73	"	"	30. IX.	11 a	+ 14,0	85	9,9	84
74	"	"	1. X.	10 a	+ 11,0	100	8,6	87
75	"	"	"	2 p	+ 18,5	95	9,9	62
76	"	"	"	4 p	+ 14,5	97	9,5	78
77	"	"	2. X.	9 a	+ 12,0	108	9,2	89
78	"	"	"	2 p	+ 19,0	97	10,3	63
79	Döbling bei Wien	"	28. XI.	12	± 0	303	2,7	60
80	"	"	"	4 p	± 0	480	2,5	54
81	"	"	11. XII.	4 p	+ 3,4	147	5,2	90
82	"	"	18. XII.	12	+ 4,8	154	5,6	87
83	"	"	20. XII.	1 p	+ 4,2	212	5,6	90
84	"	"	26. XII.	2 p	+ 1,9	141	4,3	82
85	"	1887	3. I.	4 p	— 5,0	168	2,5	81
86	"	"	8. I.	1 p	— 5,6	188	2,8	93
87	"	"	11. I.	1 p	+ 0,4	493	3,2	68 [1]
88	"	"	12. I.	1 p	— 1,8	493	3,0	76 [1]
89	"	"	13. I.	1 p	— 3,4	265	2,8	80
90	"	"	15. I.	1 p	— 5,4	227	2,4	78
91	"	"	16. I.	1 p	— 10,6	265	1,8	93
92	"	"	"	4 p	— 7,6	318	2,2	86
93	"	"	17. I.	12	— 7,6	378	2,1	83
94	"	"	18. I.	1 p	— 5,7	345	2,2	75
95	"	"	"	5 p	— 5,6	604	2,2	73 [3]
96	"	"	19. I.	1 p	— 5,6	636	2,4	80 [3]
97	"	"	"	4 p	— 4,8	360	2,7	86 [3]
98	"	"	20. I.	1 p	— 8,2	349	2,1	88
99	"	"	"	4 p	— 8,6	424	2,2	94 [3]
100	"	"	24. I.	5 p	+ 2,0	189	4,0	75
101	"	"	25. I.	1 p	+ 0,8	360	3,9	80
102	"	"	26. I.	1 p	— 3,0	297	3,5	96
103	"	"	"	4 p	— 1,8	312	3,6	90

1) In der Höhe Südwind.
2) Plötzliche Klarheit.
3) Am Boden Nebel.

Nr. der Beobachtung	Ort	Jahr	Tag	Stunde	Temp. der Luft	Pot. Gefälle in Volt pro Meter	Feuchtigkeit	
							abs.	rel.
104	Döbling bei Wien	887	27. I.	4 *p*	— 1,0	282	3,9	92
105	„	„	28. I.	1 *p*	+ 1,7	441	3,6	69 [1]
106	„	„	„	4 *p*	+ 5,8	239	4,0	58
107	„	„	29. I.	11 *a*	+ 4,3	344	3,9	63
108	„	„	„	12	+ 5,8	200	3,8	55
109	„	„	„	5 *p*	+ 3,6	557	4,0	67 [2]
110	„	„	31. I.	12	— 0,4	313	4,0	90
111	„	„	„	4 *p*	+ 2,8	234	4,5	79
112	„	„	„	5 *p*	+ 2,0	371	4,5	85
113	„	„	2. II.	12	— 1,4	106	3,8	92 [3]
114	„	„	16. II.	1 *p*	— 7,0	138	1,6	62 [4]
115	„	„	17. II.	1 *p*	— 9,3	161	1,4	66 [4]
116	„	„	25. II.	11 *a*	+ 8,8	170	4,7	55
117	„	„	„	12	+ 8,8	166	4,7	55
118	„	„	1. III.	4 *p*	+ 4,4	463	5,1	82 [5]
119	„	„	5. III.	5 *p*	+ 8,5	106	5,7	69
120	„	„	6. III.	5 *p*	+ 6,4	121	4,7	65
121	„	„	7. III.	5 *p*	+ 7,6	318	5,8	74
122	„	„	8. III.	6 *p*	+ 2,2	138	4,4	82
123	„	„	9. III.	5 *p*	+ 10,4	122	6,6	70
124	„	„	2. IV.	5 *p*	+ 13,4	181	5,2	46
125	„	„	7. IV.	1 *p*	+ 15,2	106	5,3	41
126	„	„	11. IV.	12	+ 10,4	117	4,4	46
127	Venedig	„	19. IV.	5 *p*	+ 14,5	106	5,9	48
128	„	„	20. IV.	5 *p*	+ 14,3	299	8,1	66 [5]
129	„	„	24. IV.	12	+ 17,2	214	10,9	75 [5]
130	„	„	„	1 *p*	+ 17,3	233	10,9	74 [5]
131	„	„	„	5 *p*	+ 17,3	239	11,0	75 [5]
132	„	„	25. IV.	5 *p*	+ 16,1	159	10,9	80 [5]
133	„	„	28. IV.	12	+ 18,0	114	9,2	60

Die vorstehende Tabelle I enthält 110 Beobachtungen bei vollkommen normalem Wetter und ausserdem noch 23 Messungen, die zwar gleichfalls bei schönem, aber, wie die beigefügten Bemerkungen andeuten, doch nicht normalem Wetter ausgeführt wurden.

In Bezug auf die letzteren wäre folgendes zu bemerken: wenn bei ganz heiterem Himmel und ruhiger Luft in den oberen Luftschichten sich starker Südwind zeigt — ein Fall der in unseren Gegenden namentlich nicht selten ist — so ist die Grösse des Potentialgefälles immer über der normalen, mitunter sogar sehr bedeutend; diese Bemerkung wurde an allen drei Beobachtungsorten gemacht, was insoferne von Wichtigkeit ist, als damit die sehr nahe liegende Befürchtung wegfällt, dass vielleicht die Nähe einer so grossen Stadt bei gewissen Windströmungen die Messungen beeinflusst habe.

1) Nebel.
2) Thau.
3) Dichter Nebel.
4) Starker Nordwind. Staub.
5) In der Höhe Südwind.

Ein solcher Einfluss besteht zwar ohne Zweifel bei einigermaassen starker Luftbewegung in den unteren Luftschichten und wurde bei den Beobachtungen in Döbling, nordwestlich von Wien, auch wahrgenommen; es wurden daher an diesem Orte bei starker südlicher oder südöstlicher Luftströmung an der Erdoberfläche, wenn die Ausdünstungen der Stadt in die Nähe des Beobachtungsortes gelangten, auch keine Messungen gemacht.

Eine mögliche Erklärung des Einflusses starker südlicher Luftströmungen in den oberen Regionen wird sich aus dem folgenden ergeben.

Die Beobachtungen Nr. 114 und 115 zeigen ein sehr beträchtliches Herabdrücken des Potentialgefälles bei starker nördlicher Luftströmung; da um diese Zeit die Oberfläche der Erde bereits ganz schneefrei war, so muss es dahingestellt bleiben, ob der Wind aus Nord oder der damit verbundene Staub die Erscheinung verursachte.

Dass bei plötzlich eintretender Aufheiterung des Himmels oder besonderer Klarheit desselben das Potentialgefälle auffallend wächst, wie schon aus älteren Beobachtungen bekannt ist, geht auch aus einigen Zahlen der vorstehenden Tabelle hervor; der Einfluss dichten Nebels zeigt sich bald in einem, bald im andern Sinne und scheint nicht so sehr in der Anwesenheit der Nebelmassen selbst begründet zu sein, als vielmehr in der Bewegung und Ortsveränderung derselben in der Nähe des Beobachters.

Später zu erwähnende Messungen deuten wenigstens auf einen solchen Zusammenhang hin.

Die 110 Beobachtungen der Tabelle I, die bei ganz normalem Wetter ausgeführt wurden, gestatten den Zusammenhang zwischen Wassergehalt der Luft und Potentialgefälle ziemlich klar zu stellen: die Ursache dieses Zusammenhanges habe ich in der eingangs erwähnten Schrift schon ausführlich besprochen, auch findet sich dort eine kleine Tabelle von Messungen, die zeigt, dass mit zunehmendem Wassergehalte das Potentialgefälle stets abnimmt.

Allein diese Messungen waren viel zu gering an Zahl, als dass sie mehr als ein Bild des Vorganges hätten geben können, dagegen genügen, wie ich glaube, die vorliegenden vollständig, um die ganze Erscheinung nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu verfolgen.

Es sind freilich die einzelnen Messungen mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet, insoferne, als für ein und denselben Wassergehalt oft sehr verschiedene Potentialgefälle sich ergeben. Es kann dies eine Folge zufälliger Störungen der Atmosphäre in unmittelbarer Nähe des Beobachtungsortes durch geringe, dem Auge oft nicht bemerkbare Rauch- oder Staubmassen sein; dann ist aber besonders noch zu berücksichtigen,

dass das Wassergehalt der ganzen Luft aus Psychrometerbeobachtungen unter der Voraussetzung entnommen wird, dass die Abnahme des Dunstdruckes mit der Höhe eine normale ist.

Der wirkliche Zustand der Atmosphäre wird aber von diesem idealen jeweilig nach der einen oder andern Richtung hin abweichen. Dass dieser letztere Umstand und nicht locale Störungen durch Staub etc. in der Regel die Unsicherheit der Beobachtung bedingt, wird aus einer späteren Tabelle ersichtlich sein.

Diese Schwankungen machen es nothwendig, sich an Mittelwerthe zu halten, wie ja dies bei allen meteorologischen Vorgängen geschieht; es wurde dementsprechend das ganze Beobachtungsmaterial in Gruppen (A, B, C ... Tabelle II S. 233) nach steigendem Dunstdrucke angeordnet, und zwar enthalten die einzelnen Gruppen folgende Dunstdruckintervalle:

A	0— 2,9	mm
B	3,0— 3,9	„
C	4,0— 4,9	„
D	5,0— 5,9	„
E	6,0— 7,9	„
F	8,0— 8,9	„
G	9,0— 9,9	„
H	10,0—10,9	„
I	11,0—11,9	„
K	12,0 und darüber.	

In Gruppe E sind die Dunstdrucke von 6 und 7 mm vereinigt, weil für diese nur sehr wenige Beobachtungen vorhanden sind. Ausser den Angaben des Dunstdruckes finden sich in der folgenden Tabelle noch die Nummern der Beobachtung (aus Tabelle I) und die gemessenen Potentialgefälle verzeichnet, welch' letztere, wie schon erwähnt, ausnahmslos positives Vorzeichen haben, d. h. ein Punkt in der Luft hat bei normalem Wetter stets ein gegen die Erde positives Potential.

Wie man aus den Mittelwerthen dieser Tabelle ersieht, zeigt sich eine ganz regelmässige Abnahme des Potentialgefälles mit steigendem Dunstdrucke; es zeigt sich aber auch die grosse Unsicherheit der Einzelbeobachtungen, d. h. der sehr variable Zustand der Atmosphäre unter scheinbar gleichen Bedingungen. Bildet man für eine jede Gruppe von Beobachtungen die Differenzen Δ der Einzelwerthe vom Mittel und dividirt die Summe derselben durch die Anzahl n der Beobachtungen, so erhält man eine mittlere Amplitude, die als Maass der erwähnten Unsicherheit gelten kann. In Tabelle III ist dieser Werth $\frac{\Sigma \Delta}{n}$ neben den aus Tabelle II entnommenen Mittelwerthen von Dunstdruck und Potentialgefälle verzeichnet.

Tabelle II.

A			B			C			D		
Nr. der Beobachtung	Dunstdruck in Millimeter	$\frac{dV}{dn}$	Nr. der Beobachtung	Dunstdruck in Millimeter	$\frac{dV}{dn}$	Nr. der Beobachtung	Dunstdruck in Millimeter	$\frac{dV}{dn}$	Nr. der Beobachtung	Dunstdruck in Millimeter	$\frac{dV}{dn}$
1	1,8	636	101	3,9	360	84	4,3	141	81	5,2	147
79	2,5	303	102	3,5	297	100	4,0	189	82	5,6	154
80	2,5	480	103	3,6	312	106	4,0	239	83	5,6	212
85	2,5	168	104	3,9	282	110	4,0	313	119	5,7	106
86	2,8	188	107	3,9	344	111	4,5	234	121	5,8	318
89	2,8	265	108	3,8	188	112	4,5	371	124	5,2	181
90	2,4	227				116	4,7	170	125	5,3	106
91	1,8	265				117	4,7	166	127	5,9	106
92	2,2	318				120	4,7	121			
93	2,1	378				122	4,4	188			
94	2,2	345				126	4,4	117			
98	2,1	349									
Mittel:	2,3	325	Mittel:	3,8	297	Mittel:	4,4	197	Mittel:	5,5	166

E			F			G			H		
68	6,2	122	8	8,9	74	5	9,7	76	6	10,3	76
69	6,8	127	10	8,6	93	9	9,8	72	21	10,9	69
70	6,6	122	22	8,3	90	11	9,5	85	26	10,3	92
123	6,6	122	23	8,3	117	19	9,5	89	27	10,6	92
7	7,4	110	24	8,0	138	20	9,4	100	28	10,0	71
60	7,0	117	34	8,6	100	25	9,7	100	29	10,7	87
71	7,3	95	61	8,2	127	57	9,6	87	49	10,7	95
			62	8,3	130	58	9,8	87	51	10,4	80
			63	8,6	79	64	9,0	127	52	10,1	77
			65	8,3	127	66	9,2	117	53	10,3	74
			72	8,0	95	67	9,3	108	56	10,8	95
			74	8,6	100	73	9,9	85	78	10,3	97
			85	8,7	113	75	9,9	95			
			86	8,7	100	76	9,5	97			
						77	9,2	108			
						133	9,2	114			
Mittel:	6,8	116	Mittel:	8,4	106	Mittel:	9,5	97	Mittel:	10,4	84

I			K		
2	11,6	64	4	13,2	60
3	11,7	64	13	12,0	60
12	11,3	74	14	12,0	74
17	11,0	72	15	12,0	55
30	11,2	87	16	12,0	64
31	11,2	80	18	12,0	58
33	11,4	67	32	14,5	67
41	11,3	80	39	12,1	63
45	11,8	87	40	12,1	85
48	11,7	95	44	12,1	95
50	11,0	74			
54	11,5	69			
55	11,1	69			
59	11,2	79			
Mittel:	11,4	74	Mittel:	12,5	68

Tabelle III.

Zahl der Beobachtungen n	Dunstdruck in Millimeter	$\frac{dV}{dn}$	$\frac{\Sigma\Delta}{n}$
12	2,3	325	92
6	3,8	297	42
11	4,4	197	63
8	5,5	166	53
7	6,8	116	8
14	8,4	106	17
16	9,5	97	12
12	10,4	84	9
14	11,4	74	7
10	12,5	68	10

Man ersieht aus dieser Tabelle nebst dem regelmässigen Gange des Potentialgefälles auch die starke Abnahme der mittleren Amplitude der Beobachtungen, also der Unsicherheit derselben, mit steigendem Dunstdruck; man kann daraus folgern, dass dieselben nicht durch locale Störungen, z. B. Staub in der Nähe des Beobachtungsortes, hervorgerufen werden, sonst hätten dieselben im Winter bei schneebedeckter Erde am kleinsten sein müssen. Sie sind aber gerade da, bei mindestem Dunstdruck, weitaus am stärksten, und das weist darauf hin, dass sie durch eine nicht normale Vertheilung des Wasserdampfes in der Luft hervorgerufen werden; ein solcher muss zur Zeit, wo die absoluten Werthe des Potentialgefälles am grössten sind, naturgemäss auch die grössten Amplituden erzeugen.

Um auch einen eventuellen Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und relativer Feuchtigkeit zu finden, wurden die Beobachtungen in sechs Gruppen geordnet, wobei der ersten ein Procentgehalt von 40—49, der zweiten ein solcher von 50—59 u. s. f. entsprach.

Die Mittelwerthe, die sich solcherweise ergaben, finden sich in der folgenden Tabelle IV.

Tabelle IV.

Anzahl d. Beobachtung. n	Relative Feuchtigkeit	$\frac{dV}{dn}$
6	44	116
11	56	138
32	64	128
30	75	120
23	85	179
8	92	249

Wie sich ergibt, zeigt das Potentialgefälle in seiner Abhängigkeit von der relativen Feuchtigkeit nicht angenähert einen so regelmässigen Gang, wie in Bezug auf die absolute Feuchtigkeit; von 44—75 % ändert es sich so gut wie gar nicht und erst bei den höchsten Sättigungen tritt eine beträchtliche Steigerung desselben ein. Es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass der Grund dafür in dem Umstande zu suchen ist, dass die grösste Sättigung immer mit der kleinsten absoluten Feuchtigkeit zusammenfällt, nämlich in die Wintermonate, und letztere bedingt eben das starke Potentialgefälle.

Aus den vorstehenden Resultaten der Tabelle III glaube ich folgern zu können, dass die Intensität der Luftelektricität oder die Grösse des Potentialgefälles in normaler Richtung eine Function des Wassergehaltes der Atmosphäre, nicht aber der relativen Feuchtigkeit ist.

Die Werthe der Tabelle III sind in Fig. 1 graphisch dargestellt, wobei die Dunstdrucke als Abscissen, die zugehörigen Potentialgefälle als Ordinaten gewählt wurden. Die den beobachteten Mittelwerthen entsprechenden zehn Punkte gehören augenscheinlich einer Curve an, die gegen die Ordinatenaxe sehr steil ansteigt, sich dagegen der Abscissenaxe nur ganz allmählich nähert. Die einzige bedeutende Abweichung zeigt der dem Dunstdrucke 3,8 mm entsprechende Punkt; es ist das auch derjenige, für den die geringste Anzahl von Beobachtungen vorliegt.

Es fragt sich nun, inwieweit man von der gemachten Hypothese über die Ursache der Luftelektricität ausgehend, diese Curve auch quantitativ zu verfolgen vermag; es wird dabei nöthig sein, gewisse Voraussetzungen über den Zustand der Atmosphäre zu machen, doch sind das durchgehends solche, wie sie sich aus der Thatsache eines normalen schönen Wetters — und nur für solches gelten die Messungen — von selbst ergeben.

Es ist zunächst zu bemerken, dass das Potentialgefälle an der Erdoberfläche unter allen Umständen der Flächendichte der Elektricität am Beobachtungsorte proportional ist, gleichgiltig, ob sonst noch elektrische Massen im Raume vorhanden sind oder nicht. Bezeichnen wir diese Flächendichte mit σ, so gilt die Gleichung

$$\frac{\delta V}{\delta n} = a \cdot \sigma$$

für eine jede Beobachtung, wobei a eine numerische Constante bedeutet.

Nach unserer Theorie befindet sich die ganze Ladung, welche die Erde als Weltkörper hat, zum Theil auf ihrer Oberfläche, zum Theil aber auch, an den Wasserdampf gebunden, in der Atmosphäre. Wäre letztere vollkommen wasserfrei, so befände sich die ganze Ladung auf

der Oberfläche allein, und wir wollen diesen Maximalwerth der Flächendichte mit μ, das zugehörige Potentialgefälle mit A bezeichnen; man hat dann die Relation

$$A = a \cdot \mu.$$

Tritt nun Verdampfung ein, so geht ein Theil dieser Ladung μ in die Atmosphäre; wir wollen denselben mit μ' bezeichnen und die Annahme machen, dass derselbe sich über dem Beobachtungsorte in horizontalen Schichten von solcher Ausdehnung anordne, dass dagegen ihre Distanz von der Erdoberfläche vernachlässigt werden kann, eine Annahme, die bei normalem Wetter ohne Zweifel gestattet ist. An der Erdoberfläche verbleibt somit die Flächendichte $\mu - \mu'$ und das Potentialgefälle wird

$$\frac{\delta V}{\delta n} = a(\mu - \mu').$$

Es handelt sich nun darum, die Grösse μ' mit dem Wassergehalte der Luft in Relation zu setzen. Da ist zunächst klar, dass diese Elektricitätsmenge μ' dem Wassergehalte der Luft proportional sein muss; dieser selbst ist aber eine bekannte Function des Dunstdruckes p_0 an der Erdoberfläche und der Temperatur.

Was den Einfluss der letzteren auf die aus dem Dunstdrucke berechnete Wassermenge anlangt, so ist derselbe, wenn nicht sehr extreme Temperaturen ins Spiel kommen, ein so geringer, dass er für die vorliegende ganz allgemeine Untersuchung gar nicht in Betracht kommt und wir die Wassermenge der Luft ohne weiteres dem Dunstdrucke p_0 an der Erdoberfläche proportional setzen können; diese Vereinfachung wurde bei allen folgenden Rechnungen gemacht.

Es ist somit die Grösse μ' proportional p_0 zu setzen; aber sie wird nicht allein von diesem Werthe abhängen. Die Elektricitätsmenge, welche ein Wassertheilchen beim Verdampfen mitnimmt, hängt auch sehr wesentlich von der Flächendichte der Erdladung am betreffenden Orte ab und ist dieser direct proportional. Ein und dieselbe Menge Wasser kann also beim Verdampfen sehr verschiedene Elektricitätsmengen mitnehmen, je nach der Grösse der noch herrschenden Flächendichte, d. h. je nachdem schon viel Elektricität in der Luft ist oder nicht. Bei sehr geringem Wassergehalte der Luft, z. B. im Winter oder in hohen Breiten, wird eine bestimmte Wassermasse verhältnismässig viel Elektricität mitführen, dagegen wird im Sommer oder in den Tropen eine selbst beträchtliche Vermehrung des Wassers in der Luft doch nur mit einer geringen Vermehrung der Elektricität verbunden sein, weil jedes verdampfende Theilchen nur verhältnismässig wenig davon mitführt.

Dieser Umstand ist von Wichtigkeit, denn er zeigt, dass es nicht nur auf die absolute Menge des in der Luft vorhandenen Wassers ankommt, sondern auch sehr wesentlich auf die Provenienz desselben; wir müssen daher hier wieder eine Annahme machen, die aber gleichfalls mit der Voraussetzung eines normalen Wetters zusammenfällt. Wir nehmen an, dass das Wasser der Luft aus der Nähe des Beobachtungsortes stammt und die Erdoberfläche zu einer Zeit verliess, wo sich in der Atmosphäre schon ein stationärer elektrischer wie hygroskopischer Zustand gebildet hatte. Unter dieser Voraussetzung, die für ein mehrere Tage dauerndes schönes Wetter ohne Zweifel zulässig ist, wird die Grösse μ' nicht nur proportional p_0, sondern auch der Flächendichte an der Erdoberfläche, also dem Potentialgefälle am Beobachtungsorte, so dass man hat

$$\mu' = b \cdot p_0 \frac{\delta V}{\delta n},$$

wo b wieder eine Constante bezeichnet. Es resultirt somit

$$\frac{\delta V}{\delta n} = a\left(\mu - b p_0 \frac{\delta V}{\delta n}\right)$$

oder

$$\frac{\delta V}{\delta n} = \frac{A}{1 + k \cdot p_0}, \qquad (1$$

wo A das Potentialgefälle an der Erdoberfläche bei vollständiger Abwesenheit des Wasserdampfes in der Atmosphäre und k eine Constante bedeutet.

Es muss nochmals auf die drei Voraussetzungen hingewiesen werden, unter denen allein die vorstehende Formel Giltigkeit hat: 1. möglichst ebenes Terrain am Beobachtungsorte, sowie freier Horizont und reine Luft, 2. Anordnung des Wasserdampfes in horizontalen Schichten gleicher Tension und von solcher Erstreckung, dass ihre Distanz vom Erdboden dagegen klein erscheint, sowie normale Vertheilung desselben in verticaler Richtung und 3. stationärer Zustand des Wasserdampfes in der Luft, d. h. derselbe muss die Erdoberfläche zu einer Zeit verlassen haben, wo das Potentialgefälle von dem beobachteten nicht wesentlich verschieden war.

Die ersten beiden Bedingungen dürften bei schönem Wetter wohl leicht erfüllt sein, die dritte dagegen setzt offenbar länger dauerndes normales Wetter voraus, und ich glaube, dass die meisten Abweichungen in den Beobachtungen ihren Grund in einem Nichterfülltsein dieser dritten Voraussetzung haben.

So muss z. B. in unseren Gegenden bei einer südlichen oder nördlichen Luftströmung, wenn sie aus beträchtlich entfernten Breiten kommt,

die Beobachtung ein in Bezug auf Formel 1 zu grosses, resp. zu kleines Potentialgefälle ergeben; denn kommt der Wasserdampf aus niedrigen Breiten, so führt er per Masseneinheit weniger Elektricität mit sich, als in Formel 1 vorausgesetzt wurde, und das Umgekehrte findet statt, wenn er aus hohen Breiten zu uns gelangt. Ich möchte es nicht behaupten, aber die Möglichkeit liegt nahe, dass das aus Tabelle I hervorgehende Auftreten abnorm grosser Potentialgefälle bei intensiver südlicher Luftströmung in den höheren Regionen in diesem Umstande begründet ist; jedenfalls ist es bemerkenswerth, dass sich dieser Zusammenhang an allen drei Beobachtungsorten, Wien, St. Gilgen und Venedig in augenfälliger Weise kundgab.

Es handelt sich nun um die Discussion der Gl. 1. Von den beiden Constanten, welche dieselben enthält, ist k ein numerischer Factor von ziemlich complicirter physikalischer Bedeutung, der weiter kein Interesse bietet, dagegen wäre eine genaue Bestimmung von A von der grössten Wichtigkeit. A ist das normale Potentialgefälle für $p_0 = 0$, d. h., wenn die ganze Ladung der Erde sich auf deren Oberfläche und kein Bruchtheil davon sich in der Luft befindet; kennt man den Werth von A, so kennt man auch μ, denn es ist

$$\mu = -\frac{A}{4\pi}$$

und damit hat man die Gesammtladung der Erde, sowie ihr absolutes Potential, wie ich in der eingangs erwähnten Abhandlung bereits ausgeführt habe.

An eben diesem Orte habe ich den Werth von A auf ca. 600 Volt per Meter geschätzt, indem dies das grösste beobachte Potentialgefälle (bei sehr niedrigem Dunstdrucke) war und ich damals glaubte, dass die letzten Reste Wasserdampfes in der Atmosphäre nicht mehr von wesentlichem Einflusse seien; das ist aber, wie Gl. 1 lehrt, keineswegs der Fall, gerade die Reste des Wasserdampfes haben den grössten Effect und die Curve (Fig. 1) steigt sehr steil gegen den Grenzwerth $p_0 = 0$. Es wird daher der wahre Werth von A weit grösser als 600 sein, wie aus dem Folgenden näher hervorgehen wird.

Das Potentialgefälle $\frac{\delta V}{\delta n}$ in Gl. 1 hat zwei Grenzwerthe: A, für $p_0 = 0$, also für die Abwesenheit jeglichen Wasserdampfes in der Luft und Null für $p_0 = \infty$, d. h. für einen beliebig hohen Dunstdruck. Die Curve, welche die Abhängigkeit des Potentialgefälles vom Dunstdrucke darstellt, beginnt somit mit der Ordinate A und nähert sich assymptotisch der Abscissenaxe. Es kann somit bei normalem Wetter das Potentialgefälle niemals, auch nicht in den Tropen, durch Null ins

Negative übergehen, sondern höchstens sich der Nulle nähern. Die Grenze wäre erreicht, wenn von einem Stück der Erdoberfläche sich die ganze Ladung mit dem Wasserdampfe in die Höhe gehoben hätte; doch würde dieser Bedingung, wie Formel 1 lehrt, nur durch Verdampfung von unendlich viel Wasser genügt.

Ein negatives Potentialgefälle kann aber immer nur durch eine solche Störung in der Atmosphäre verursacht werden, derzufolge über einem gewissen Stück der Erdoberfläche sich mehr Elekticität in der Luft befindet, als im günstigsten Falle auf dem betreffenden Stück selbst vorhanden sein kann. Solche Störungen treten bei plötzlicher Ansammlung von Wasser in der Luft also bei intensiver Wolkenbildung sehr häufig auf.

Die Werthe von A und k lassen sich aus den vorhandenen Beobachtungen zwar angenähert bestimmen, doch ist eine einigermaassen befriedigende Genauigkeit nicht zu erwarten, weil die Curve gegen den Grenzwerth A steil ansteigt und die Beobachtungen, unserem Klima entsprechend, nicht bis zu den niedrigsten Dunstdrücken reichen.

Setzt man von den vorliegenden Beobachtungen der Tabelle III zwei Beobachtungen als richtig voraus, so ergeben sich damit aus Gl. 1 die Grössen A und k. Wählen wir zu diesem Zwecke die den Dunstdrucken $p = 2{,}3$ und $p = 9{,}5$ entsprechenden Zahlen, die erstere weil sie sich auf den geringsten Wassergehalt der Luft bezieht, die letztere weil ihr von den höheren Drucken die meisten Beobachtungen zukommen, so liefert Gl. 1 die folgenden Werthe:

$$A = 1300\,\frac{V}{m};\; k = 1{,}31.$$

Mit Hilfe dieser Constanten lassen sich dann für alle Dunstdrucke die zugehörigen Potentialgefälle berechnen; dieselben sind in der Tabelle V (S. 240) nebst den durch Beobachtung ermittelten angegeben, sowie in Fig. 1 durch die ausgezogene Curve graphisch dargestellt, die beiden der Rechnung zu Grunde gelegten Zahlen sind mit * bezeichnet. (Siehe S. 240.)

Die Unsicherheit, mit welcher der so ermittelte Werth von A behaftet erscheint, ist, wie ein Blick auf die Curve in Fig. 1 lehrt, eine sehr bedeutende; ist das Potentialgefälle für $p = 2{,}3$ nur um weniges falsch bestimmt, so resultirt daraus schon ein beträchtlicher Fehler von A. So zeigt z. B. eine einfache Rechnung, dass — die Beobachtung für $p = 9{,}5$ als richtig angenommen — der Werth von A auf 600 herabsinken würde, wenn sich für $p = 2{,}3$ ein Potentialgefälle von 262 statt des beobachteten 325 als richtig herausstellen würde.

Tabelle V.

p_0	$\frac{\delta V}{\delta n}$ beobachtet	$\frac{\delta V}{\delta n}$ berechnet
0,0	—	1300
0,5	—	787
1,0	—	565
* 2,3	325	325
3,8	297	220
4,4	197	194
5,5	166	161
6,8	116	132
8,4	106	109
* 9,5	97	97
10,4	84	89
11,4	74	81
12,5	68	74
16,0	—	59
20,0	—	48
30,0	—	33
∞	—	0

Eine so grosse Abweichung ist allerdings kaum zu erwarten, aber immerhin muss man den Werth $A = 1300$ nur als einen ganz approxi-

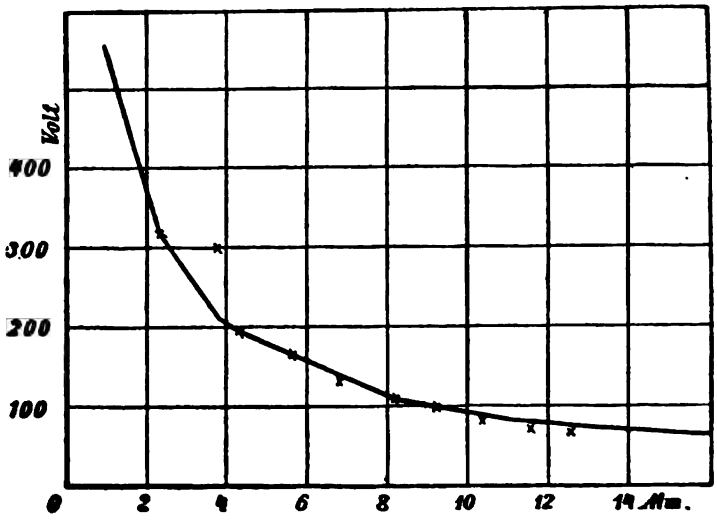


Fig. 1.

mativen ansehen, der nach den gegenwärtig vorliegenden Beobachtungen zwar der wahrscheinlichste ist, durch spätere aber vielleicht noch sehr

wesentliche Veränderungen in dem einen oder anderen Sinn erfahren wird.

Es sind aber noch zwei Wege vorhanden, um A mit grösserer Genauigkeit zu bestimmen: erstens durch Beobachtungen an geographisch so gelegenen Punkten, dass man die Curve (Fig. 1) in ihrem steilsten Theil zu verfolgen im stande ist, also an Orten, wo der Wasserdampfgehalt der Luft auf ein Minimum sinkt; in dieser Beziehung kommen vor allem die so ausserordentlich kalten und trockenen Gegenden Sibiriens in Betracht und ich erlaube mir im Interesse der Sache die Aufmerksamkeit aller, denen sich etwa dazu Gelegenheit bietet, auf diesen Punkt zu lenken. Es ist zwar zu erwarten, dass für die niedrigsten Dunstdrucke die Amplitude der einzelnen Beobachtungen, d. h. ihre Unsicherheit, noch grösser sein wird als bei den bisherigen, die Mittelwerthe würden aber nichtsdestoweniger einen Schluss auf die Grösse von A zulassen.

Ein zweiter Weg, der wahrscheinlich mit noch besserem Erfolge betreten würde, bietet sich uns durch Beobachtungen im Luftballon.

Entfernen wir uns allmählich in verticaler Richtung von der Erdoberfläche, so haben wir immer grössere und grössere Mengen Wasserdampfes unter uns; da dieser mit der Erdoberfläche gleichnamig elektrisch ist und ausserdem die Vertheilung desselben unserer Annahme gemäss eine normale sein soll, d. h. gleichmässig in Schichten von solcher Erstreckung, dass ihre Distanz von der Erde dagegen vernachlässigt werden kann, so ist die Wirkung aller unterhalb des Beobachtungsortes gelegener elektrischer Massen genau so, als befänden sich dieselben sämmtlich auf der Erdoberfläche.

In einer gewissen Höhe n über der Erde haben wir somit das Potentialgefälle

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = c \cdot m,$$

wo c eine Constante bedeutet und m die sämmtlichen elektrischen Massen, welche sich in einer Säule vom Querschnitt 1 befinden, die vom Erdboden bis zum Beobachtungsorte reicht; die Ladung des Erdbodens selbst ist dabei natürlich mitinbegriffen, so dass man auch schreiben kann

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = c\,(\sigma + \mu),$$

wo σ die Ladung der Flächeneinheit der Erde und μ diejenige der darüber bis zur Höhe n reichenden Luftsäule darstellt.

Beobachtet man gleichzeitig an der Erdoberfläche das Potentialgefälle $\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_0 = B$, so hat man weiter

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = c\mu + B.$$

Die Ladung μ ist, unserer Voraussetzung gemäss, nur an den Wassergehalt der Luftsäule gebunden und diesem proportional; nennen wir letzteren q, so erhalten wir

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = k \cdot q + B,$$

wo k eine neue Constante bedeutet.

Die Wassermenge in der Volumseinheit können wir, wie schon früher erörtert wurde, ohne wesentlichen Fehler dem jeweiligen Dunstdrucke p proportional setzen und die Wassermenge in einer Säule vom Querschnitte 1 und der Höhe dn somit dem Ausdrucke pdn. Der Werth dieses Ausdruckes wird natürlich mit der Höhe über der Erde sehr variiren, wir können ihn aber berechnen, weil die Variation des Dunstdruckes mit der Höhe bekannt ist.

Es hat zuerst Hann [1]) aus zahlreichen Beobachtungen bis zu Höhen von 7000 m sowohl auf Bergen als auch im Ballon die Formel

$$p_n = p_0 (1 - \alpha n + \beta n^2)$$

abgeleitet, mit den Coëfficienten $\alpha = 0{,}246$ und $\beta = 0{,}0159$, wobei p_0 und p_n die Dunstdrucke am Erdboden, resp. in der Höhe n zu gleicher Zeit bedeuten, und die Einheit von n gleich 1000 m gesetzt ist.

Für die gesammte Wassermenge in der betrachteten Luftsäule ergibt sich somit der Ausdruck

$$\int_0^n p_0 (1 - \alpha n + \beta n^2)\, dn = p_0 \left(n - \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{\beta}{3} n^3\right)$$

und schliesslich für das Potentialgefälle in der Höhe n

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = k \cdot p_0 \left(n - \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{\beta}{3} n^3\right) + B. \qquad (2$$

Zu bemerken ist hier, dass die Elektricitätsmengen in den einzelnen Theilen der ganzen Luftsäule den respectiven Wassergehalten proportional gesetzt wurden, mit Hilfe einer und derselben Proportionalitätsconstante, d. h. es wurde die Voraussetzung gemacht, dass längs der ganzen Säule gleichen Wassermengen auch gleiche Elektricitätsmengen anhaften. Das involvirt aber die weitere Annahme, dass alles Wasser

1) Zeitschr. für Meteorologie Bd. 9 (1874).

der Säule die Erdoberfläche angenähert am selben Orte und zur selben Zeit verlassen hat. Aus diesem Grunde wird die Curve, welche den Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und Dunstdruck längs eines Erdradius, aber für die gleiche Zeit, darstellt, eine ganz andere sein als die in Fig. 1 gezeichnete, die zwar den gleichen Zusammenhang, aber in Bezug auf die Jahreszeiten wiedergibt. In Bezug auf letztere kommen gleichen Wassermassen durchaus nicht gleiche elektrische Ladungen zu; ein Gramm Wasser, wenn es im Winter verdampft, wird ungleich mehr Elektricität mit sich führen als im Sommer, da zu letzterer Zeit die Flächendichte der Erdladung eine viel kleinere ist.

In meiner schon eingangs erwähnten Abhandlung habe ich gleichfalls einen Ausdruck für die Grösse des Potentialgefälles in beliebiger Höhe entwickelt, doch wurde damals in der Formel für die Abnahme des Dunstdruckes mit der Höhe das Glied mit n^2 vernachlässigt.

Es war dies auch statthaft, da es sich nur um Höhen bis 600 m handelte, nämlich um die Controle einer im Luftballon ausgeführten Messung, doch wird es für das Folgende nothwendig sein, die vollständige Formel beizubehalten, deren Giltigkeit bis zu Höhen von ca. 7000 m reicht.

Man erhält Formel 2 auch unmittelbar aus der Poisson'schen Gleichung

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta n^2} = -4\pi\varrho = k p_n.$$

Die beiden ersten Glieder der linken Seite sind gleich Null gemäss unserer Annahme, dass der Wasserdampf in horizontalen Schichten von relativ grosser Erstreckung gleichmässig ausgebreitet sei und wir erhalten

$$\frac{\delta^2 V}{\delta n^2} = k p_0 (1 - \alpha n + \beta n^2)$$

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = k p_0 \left(n - \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{\beta}{3} n^3\right) + \text{Const.}$$

Die Constante bestimmt sich aus der Bedingung, dass für $n = 0$ das Potentialgefälle in den am Erdboden beobachteten Werth B übergehen muss, d. h. man hat Const. $= B$ und

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = k p_0 \left(n - \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{\beta}{3} n^3\right) + B,$$

was eben Gl. 2 ist.

In der vorstehenden Form können wir Gl. 2 noch nicht verwerthen, es ist noch nöthig, die Constante k zu bestimmen, was durch Einsetzung

des Werthes von n ermöglicht wird. Aus $p_n = p_0(1 - \alpha n + \beta n^2)$ ergibt sich

$$n = \frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{p_n}{p_0}\right)}$$

und weiter

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = k \cdot p_0 \left(\frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{p_n}{p_0}\right)}\right)$$
$$\left[1 - \frac{\alpha}{2}\left\{\frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{p_n}{p_0}\right)}\right\} +\right.$$
$$\left. + \frac{\beta}{3}\left\{\frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{p_n}{p_0}\right)}\right\}^2\right] + B.$$

Erreicht n einen solchen Werth, dass der ganze Wasserdampf der Luft sich unterhalb des Beobachtungsortes befindet, so wird an diesem $p_n = 0$ und das Potentialgefälle muss dort offenbar den Werth A annehmen; setzen wir also die linke Seite vorstehender Gleichung gleich A und auf der rechten Seite derselben $p_n = 0$, so ergibt sich

$$A = k \cdot p_0 M\left(1 - \frac{\alpha}{2}M + \frac{\beta}{3}M^2\right) + B,$$

wobei der Einfachheit wegen

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}}\right) = M$$

gesetzt wurde. Vereinfachen wir die Schreibweise noch weiter, indem wir

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2}M + \frac{\beta}{3}M^2\right) = N$$

setzen, so gelangen wir schliesslich zu der Relation

$$A = k p_0 M N + B \text{ und } k = \frac{A - B}{p_0 M N}.$$

Substituiren wir diesen Werth von k in die früheren Gleichungen, so erhalten wir

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = \frac{A - B}{MN}\left(n - \frac{\alpha}{2}n^2 + \frac{\beta}{3}n^3\right) + B \qquad (3$$

dabei sind die numerischen Coëfficienten α und β aus der Hann'schen Formel bekannt und damit auch der Werth MN; es ist

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}123, \quad \frac{\beta}{3} = 0{,}0052, \quad MN = 2{,}68\ ^1).$$

1) Zusatz. Bei Ableitung der numerischen Grösse $MN = 2{,}68$ wurde seinerzeit die Grösse unter dem Wurzelzeichen vernachlässigt, da sie einen nur ganz un-

Diese Werthe der Coëfficienten gelten nur, wenn als Einheit der n 1000 m angenommen wird; will man die Höhen in Metern ausdrücken, wie man eigentlich sollte, wenn man die Potentialgefälle A und B auf diese Einheit bezieht, so muss der Werth von α mit 10^{-3}, der von β mit 10^{-6} und der von MN mit 10^3 multiplicirt werden; durch diese Manipulation ändert sich aber, wie man aus Gl. 3 sieht, der numerische Werth des Factors von $(A-B)$ gar nicht, es ist uns daher gestattet, bei Benutzung dieser Gleichung die Potentialgefälle wie bisher auf den Meter, die Höhen dagegen auf 1000 m als Einheit zu beziehen und zu schreiben

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = \frac{A-B}{2{,}68}\left(n - 0{,}123\, n^2 + 0{,}0052\, n^3\right) + B \qquad (4$$

Diese Formel gestattet nun, aus dem Werthe B des Potentialgefälles an der Erdoberfläche und der Grösse A die gleichzeitig in jeder beliebigen Höhe herrschenden Potentialgefälle zu berechnen, oder umgekehrt aus B und dem Potentialgefälle in der Höhe den Werth von A; und dieer Weg zur Bestimmung von A scheint mir aus zwei Gründen dem durch Ermittlung der Curve von Fig. 1 vorzuziehen.

1. Die durch Gl. 3 und 4 dargestellte Curve $\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = f(n)$ steigt für $n = o$ steil an und nähert sich dann asymptotisch dem gesuchten Grenzwerthe A, so dass man in sehr leicht zu erreichenden Höhen diesem Werthe schon beträchtlich nahe kommt.

2. Die Messung des Potentialgefälles in der Höhe lässt sich jedenfalls mit viel grösserer Genauigkeit ausführen, als die analogen Messungen am Erdboden bei äusserst niedrigem Dunstdruck. Wie früher schon zu erwähnen Gelegenheit war, stören nämlich in letzterem Falle geringe Abweichungen des Wasserdampfes von der angenommenen normalen Vertheilung das Resultat sehr bedeutend und verursachen jene grossen Amplituden, auf die schon hingewiesen wurde; beobachtet man dagegen in grosser Höhe, hat also einen wesentlichen Theil des Wasserdampfes schon unter sich, so ist man davon fast ganz frei, denn die stärksten Störungen werden immer in der Nähe der Erdoberfläche auftreten, für die Beobachtung in grosser Höhe also nicht mehr ins Gewicht fallen. Dazu kommt noch, dass für die letztere es genügt, wenn der unterhalb befindliche Wasserdampf in horizontalen Schichten gleicher Tension angeordnet ist, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge in verticaler

bedeutenden Einfluss auf das Resultat übt; berücksichtigt man dieselbe, so ergibt sich der genauere Werth $MN = 2{,}65$. Die Werthe der Potentialgefälle auf S. 240 müssten demnach um 0,7 — 1% erhöht werden, was für den vorliegenden Zweck aber ganz irrelevant ist.

Richtung, oder auch nur so, dass alle Luftsäulen gleichen Querschnittes bis zur Höhe des Beobachtungsortes durchschnittlich gleich viel Wasser enthalten; bei der ersten Methode dagegen ist der an der Erdoberfläche beobachtete Dunstdruck für die Berechnung des Gesammtwassergehaltes der Luft allein maassgebend, und es ist einleuchtend, dass solcherweise locale Störungen das Resultat sehr wesentlich beeinflussen müssen.

Bei Beobachtungen im Ballon wird es sich vielleicht empfehlen, die als einzelne Messung immerhin unsichere Bestimmung von B durch eine zweite Messung in der Höhe zu ersetzen; hat man im Ballon a Beobachtungen in verschiedenen Höhen gemacht, so ergeben sich daraus $a-1$ Werthe für A. Welche Höhen dabei wünschenswerth erscheinen, wird uns aus dem Folgenden hervorgehen [1]).

In Fig. 2 sind die der Gl. 4 entsprechenden Curven gezeichnet unter der Annahme, dass an der Erdoberfläche ein Werth $B = 98$ Volt

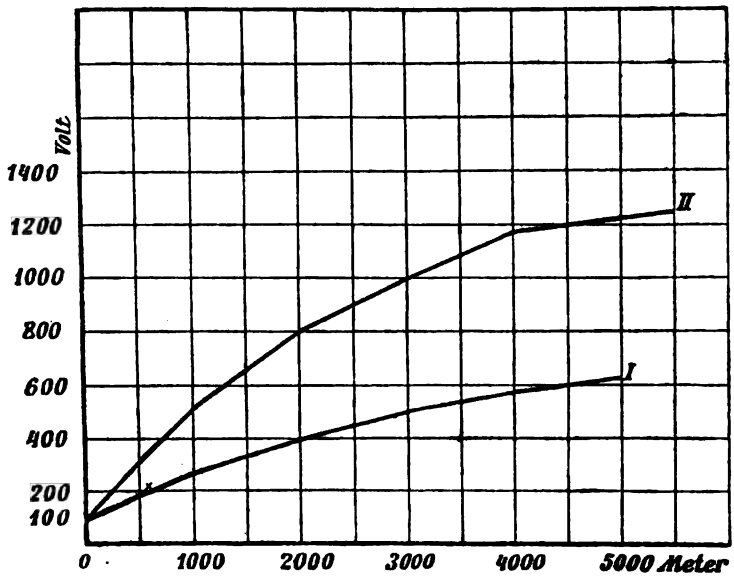


Fig. 2.

beobachtet wird; diese Annahme entspricht nämlich einer Messung, die gelegentlich einer Ballonfahrt ausgeführt wurde, über welche ich schon früher berichtet habe [2]).

1) Das Princip der Messung im Ballon habe ich in der mehrfach erwähnten Arbeit schon auseinandergesetzt; es basirt auf der Verwendung zweier Wassercollectoren von bekannter Höhendifferenz, von welchen der eine mit der Hülle, der andere mit den Blättchen eines calibrirten und isolirten Elektroskopes verbunden ist.

2) A. a. O. Es muss hier bemerkt werden, dass die Zahlenangaben in der früheren Publication, insofern sie sich auf Volt beziehen, um 6% zu erhöhen sind;

Die beiden Curven I und II beziehen sich nun auf die weitere Annahme von $A = 636$, resp. $A = 1300$ Volt, Gl. 4 liefert dafür die folgenden Werthe:

I $A = 636$		II $A = 1800$	
n	$\frac{\delta V}{\delta n}$	n	$\frac{\delta V}{\delta n}$
0	98	0	98
0,55	200	0,55	326
1	275	1	493
2	410	2	792
3	506	3	1006
4	570	4	1152
5	610	5	1240

Die gleichzeitige Beobachtung im Ballon ergab bei einer durchschnittlichen Höhe desselben von 550 m (also $n = 0{,}55$) den Werth 205 Volt, also fast genau mit Curve I übereinstimmend, doch möchte ich dieser vereinzelten Messung in quantitativer Beziehung keinen grossen Werth beilegen; es war die erreichte Höhe eine sehr geringe, die Zeit, die zur Messung zur Verfügung stand, eine viel zu kurze, kaum 10 Minuten. Der Zweck dieser ersten Messung im Ballon war eigentlich ein mehr qualitativer, indem nur entschieden werden sollte, ob das Potentialgefälle mit der Höhe wächst oder abnimmt. Dass letzteres, wie es von allen Theorien verlangt wird, die den Wasserdampf als positivelektrisch betrachten, nicht der Fall ist, hat sich wohl evident gezeigt; die starke Zunahme mit der Höhe beweist vollkommen die negative Ladung des Wasserdampfes und bildet so eine wesentliche Stütze der hier vertretenen Theorie.

Da es aber keine Schwierigkeit hat, mit dem Ballon Höhen bis zu 5000 m zu erreichen und daselbst aller Voraussicht nach die Messungen mit verhältnismässig geringen Fehlern behaftet sein werden, was wohl schon für Höhen von 2000 m, wo man bereits die Hälfte des Wasserdampfes unter sich hat, gilt, so hoffe ich, dass durch derartige Messungen sich die Grösse A, die als eine Constante der Erde zu betrachten ist, mit ziemlicher Genauigkeit wird bestimmen lassen. Es ist im Interesse der Wissenschaft dringend zu wünschen, dass bei etwaigen Auffahrten zu wissenschaftlichen Zwecken dieser Sache mehr Aufmerksamkeit geschenkt werde, als dies bisher der Fall war, wo man sich

---

es hat sich nämlich herausgestellt, dass die zur Calibrirung der Elektroskope verwendeten Elemente nicht, wie angenommen wurde, 1 Volt, sondern 1,06 Volt elektromotorische Kraft haben; das höchste am Erdboden beobachtete Potentialgefälle war demnach nicht 600, sondern 636 Volt.

gewöhnlich begnügte, irgend welche Anzeichen des elektrischen Zustandes der Atmosphäre zu notiren, ohne dass man physikalisch klar definirte Grössen gemessen hätte.

Die Curven I und II beziehen sich auf einen Sommertag (6. Juni 1885); im Winter würde der Anfangspunkt, für $n = 0$, viel höher liegen und bei gänzlicher Abwesenheit des Wasserdampfes in der Luft müssten die Curven mit dem Werthe A beginnen und als gerade Linien parallel zur Abscissenaxe verlaufen. Die wahre Curve, welche die Abhängigkeit des Potentialgefälles von der Höhe darstellt, liegt vermuthlich zwischen den Curven I und II und müsste durch eine systematische Beobachtungsreihe während einer Ballonfahrt bis zu möglichster Höhe ermittelt werden; inwiefern dabei störende Einflüsse in den höheren Regionen, wie Eisnadeln u. dgl., in Betracht kommen, lässt sich von vorneherein schwer übersehen, doch ist nicht zu erwarten, dass sich an einem normalen klaren Tag der Beobachtung wesentliche Schwierigkeiten in den Weg stellen.

Bevor wir aus den bisher gewonnenen Resultaten weitere Schlüsse ziehen, müssen wir uns noch mit einer bisher ausser Acht gelassenen Frage beschäftigen, mit der Frage nämlich, ob nicht die Luft selbst und nicht nur der in ihr enthaltene Wasserdampf von der Erde negative Elektricität aufnimmt. Da wäre zunächst zu erwähnen, dass es bisher experimentell absolut nicht gelingen wollte, ein Gas zu elektrisiren, ja nicht einmal mit Hilfe des Ausströmens der Elektricität unter sehr hoher Spannung aus Spitzen oder glühenden Körpern. Ich erlaube mir diesbezüglich auf die jüngst erschienene Arbeit von Nahrwolt[1]) zu verweisen, wo gezeigt wird, dass bei der scheinbaren Elektrisirung eines Gases auf eine der erwähnten Arten Elektricität immer nur auf die im Gase suspendirten festen oder flüssigen Partikelchen — Staub oder Elektrodentheilchen — übergeht, aber niemals auf die Masse des Gases selbst.

Beim Wasser, welches die Erde beim Verdampfen verlässt, liegt die Sache insoferne anders, als es jedenfalls nicht unmittelbar in ein permanentes Gas übergeht, sondern im Momente der Lostrennung noch aus mehr oder minder grossen flüssigen Partikeln besteht; dazu kommt, dass der Wasserdampf vorher unzweifelhaft einen Theil der leitenden Erdoberfläche bildete, während eine leitende Berührung zwischen Luft und Erde überhaupt mehr als zweifelhaft ist. Nichtsdestoweniger möchte ich nicht behaupten, dass eine derartige negative Ladung der Luftmasse selbst ganz ausgeschlossen sei, denn Processe, die, wenn sie sich im Laboratorium abspielen, wirkungslos erscheinen, können in der

1) Wied. Ann. Bd. 31 S. 448 (1887).

Natur infolge der riesigen Quantitäten, um die es sich da handelt, noch merkliche Wirkungen erzeugen.

Gesetzt nun, es besässe die Luft als solche auch eine negative Ladung, in welcher Weise würde sich dieselbe äussern? Zunächst gar nicht, denn da die Luft, von den geringen Barometerschwankungen abgesehen, eine im allgemeinen gleichmässige und constante Zusammensetzung längs der ganzen Erdoberfläche hat, so müssen wir dies auch von ihrer elektrischen Ladung voraussetzen und daraus folgt, dass das Potentialgefälle, welches diese an der Erdoberfläche erzeugt, gleich Null ist. Der einzige Effect würde sein, dass der Werth, den wir aus der Grösse A für die Gesammtladung der Erde ableiten, zu klein erscheint, indem er uns nur die Ladung des Erdkörpers und des Wasserdampfes angibt, nicht aber die Ladung der Luft.

Anders würde die Sache sich verhalten, wenn man das Potentialgefälle mittels des Luftballons in grösseren Höhen untersucht; ist die Luft selbst elektrisch, so müsste sich ein ganz analoger Einfluss geltend machen, wie er in Bezug auf den Wasserdampf schon ausführlich erörtert wurde, es müsste das Potentialgefälle mit der Höhe zunehmen; da aber die Dichte der Luft mit der Höhe nur sehr allmählich abnimmt (wenigstens im Vergleich zum Wasserdampf), so würde dieser Einfluss nur ein sehr geringer und kaum constatirbarer sein. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass die Ladung der Luft ihrer Dichte jeweils proportional gesetzt werden darf; es ist aber auch vielfach die, wie mir scheint, schwer verständliche Ansicht verbreitet, es könne von der Erdladung sich ein Theil der nächstliegenden Luftschichte mittheilen und bis zu einer Tiefe von einigen Metern in dieselbe eindringen. Diese Ansicht ist aber nicht haltbar, denn wäre sie berechtigt, so könnte das Potentialgefälle in der nächsten Nähe der Erdoberfläche nicht ein lineares sein, wie ich dies schon vor längerer Zeit für Höhen von $^1/_2$ bis 40 m nachgewiesen habe, oder es müsste die Ladung der Luft unmerklich klein sein gegen die des correspondirenden Oberflächenstückes der Erde.

Es liegen auch Versuche vor, eine eventuelle Elektrisirung direct nachzuweisen. Mascart hat zu diesem Zwecke folgenden Weg eingeschlagen: eine mit dem Elektrometer leitend verbundene Flamme zeigt bekanntlich das Potential des Ortes, wo sie brennt; überdeckt man nun dieselbe mit einem zur Erde abgeleiteten Metallgitter, so wird dadurch jede Induction von Seite jener elektrischen Massen, die sich ausserhalb desselben befinden, von der Flamme abgehalten. Durch die Maschen des Gitters kann aber die Luft frei circuliren und ihre eventuelle Ladung der Flamme mittheilen. Mascart glaubt aus dem Umstande, dass eine so adjustirte Flamme keine Anzeigen von Elek-

tricität gibt, auf die Abwesenheit einer eigenen Luftladung schliessen zu können; es scheint mir aber dieser Schluss aus den folgenden zwei Gründen nicht correct: 1. Gibt die Luft wirklich durch Leitung ihre Ladung an die Flamme ab, so kann dieser Process doch das Elektrometer niemals auf ein höheres Potential bringen, als dem Orte, wo die Flamme brennt, zukommt; darin besteht ja eben die Wirkung der Flamme. 2. Dieses Potential wird nur bedingt durch die Ladung der im Innern des Gitters befindlichen Luftmasse, und es ist wohl möglich, dass die Wirkung dieser Ladung ganz verschwindend ist, wenngleich die Wirkung ohne Gitter, also unter Einfluss der ganzen umgebenden Luft, sehr bedeutend erscheint. Denn denkt man sich um den Ort, wo die Flamme brennt, als Centrum concentrische Kugelschalen von der gleichen Dicke h geschlagen, so ist das Potential v, welches eine jede im Centrum erzeugt: $v = 4\pi\varrho hr$, wenn man mit ϱ die Raumdichte der Elektricität, und mit r den Kugelradius bezeichnet. Mit wachsendem r wird also die Wirkung immer grösser und der Effect des Gitters über der Flamme besteht darin, dieselbe nahezu vollständig dem Einflusse der Umgebung zu entziehen. Dass der innerhalb des Gitters zurückbleibende Rest keine merkliche Wirkung mehr ausübt, darf daher nicht als ein Beweis für die gänzliche Abwesenheit einer Luftladung angesehen werden.

Eher könnte man zu einem Resultate kommen, wenn man innerhalb des Gitters anstatt der Flamme einen isolirten mit dem Elektrometer verbundenen Conductor aufstellt; würde an diesen von der vorbeistreichenden Luft Elektricität abgegeben, so könnte wohl sein Potential allmählich merklich steigen und zwar bis zu jenem Werthe, der den einzelnen geladenen Partikelchen zukömmt.

Ich habe im Januar und Februar 1886 eine Reihe diesbezüglicher Versuche ausgeführt, deren Resultate ich hier kurz mittheilen will. Die Flamme war auf der Plattform des Thurmes der meteorologischen Anstalt in Döbling bei Wien aufgestellt, von ihr führte ein gut isolirter Draht in ein unterhalb gelegenes Zimmer zu einem Quadrantelektrometer. Letzteres diente für die Ablesungen bei überdeckter Flamme, während bei frei brennender wegen des sehr hohen Potentiales ein calibrirtes Elektroskop verwendet werden musste. Es zeigte sich zunächst, dass innerhalb des Gitters das Potential alle Schwankungen, die ausserhalb vorgehen, mitmacht, wie auch schon Róiti beobachtet hatte, dass aber in den Pausen sich innerhalb kein constantes Potential nachweisen liess, das mehr als $^1/_{2000}$ des äusseren betrug. Ein solches Gitter blendet gleichsam die constante Wirkung der äusseren Massen ab, lässt aber alle Schwankungen durch; der Grund dieser Erscheinung liegt, wie ich schon früher einmal erwähnt habe, in der für

schnelle Aenderungen mangelhaften Ableitung des Gitters. Im vorliegenden Falle war dasselbe durch einen Draht mit dem Blitzableiter verbunden, nichtsdestoweniger war der Einfluss einer zweiten Erdleitung, die angebracht wurde, sehr deutlich, indem die Schwankungen an Intensität bedeutend abnahmen; bei idealer Ableitung würden sie wohl vollständig verschwinden.

Ersetzt man die Flamme durch einen Metallconductor, so ändern sich die Erscheinungen nur insoferne, als es dann gleichgiltig ist, ob man denselben mit dem Gitter überdeckt oder nicht: das Elektrometer zeigt schwache, schnell wechselnde Potentiale, aber absolut keinen dauernden Ausschlag von bestimmter Richtung.

Die vorstehenden Beobachtungen beziehen sich auf schönes Wetter und klare Luft; anders wird die Sache, wenn man zwar bei klarem Wetter aber Nebel in der unteren Luftschichte beobachtet. Während die Erscheinungen mit der Flamme ganz dieselben bleiben, zeigt der Metallconductor eine stetig wachsende und zwar negative Ladung an, was offenbar nur dadurch zu erklären ist, dass der vorbeistreichende Nebel seine eigene negative Ladung zum Theil an den Conductor abgibt. Bis zu welcher Grenze auf diese Weise das Potential des Conductors steigt, konnte leider nicht constatirt werden, da das Quadrantelektrometer dazu nicht ausreichte, jedenfalls betrug es mehr als 10 Volt und konnte über das Vorzeichen der Ladung kein Zweifel sein.

Ob der Mangel eines solchen stetig wachsenden Potentiales bei reiner Luft nur der Kleinheit der vorhandenen Ladungen (im Vergleich zum Nebel) zuzuschreiben ist, oder ob gasförmiger Wasserdampf und Luft mit einem Metallconductor überhaupt nicht zu leitender Berührung kommen, wage ich nicht zu entscheiden, doch scheint mir das Letztere sehr wahrscheinlich. Soviel geht aus dem Vorstehenden jedenfalls hervor, dass die Mascart'sche Methode nicht im Stande ist, die Frage nach einer eigenen Elektrisirung der Luft zu lösen; so unwahrscheinlich eine solche auch an und für sich ist, so verdient dieser Punkt doch die grösste Aufmerksamkeit von Seite der Physiker und Meteorologen, doch sehe ich vorläufig keinen Weg, der mit Sicherheit zu einer Entscheidung führen könnte.

(Schluss folgt.)

Absolute diamagnetische Bestimmungen[1]).

Von

Albert v. Ettingshausen.

Im Nachfolgenden sind in Kürze die Resultate von Messungen mitgetheilt, welche ich zur Ermittlung der Diamagnetisirungszahlen nach absolutem Maasse für reines Antimon und Tellur vorgenommen habe. Die Substanzen, aus denen cylindrische Stangen (zwei aus Antimon *Sb* I und *Sb* II, eine aus Tellur) gegossen waren, wurden im hiesigen chemischen Institute mit grosser Sorgfalt rein hergestellt; der verstorbene Prof. L. v. Pebal hatte dieselben zu Bestimmungen der specifischen Wärme bei verschiedenen Temperaturen benutzt. Ausserdem stellte ich mir aus sehr reinem Wismuth, das ich Herrn Oberbergrath Dr. Cl. Winkler verdanke, zwei Cylinder her, von denen der eine (*Bi* I) in derselben Gusform wie die genannten drei Cylinder gegossen wurde, während der zweite (*Bi* II) eine grössere Länge, aber kleineren Querschnitt als der erste besass.

Die Methode, welche ich gebrauchte, beruht auf der Messung der Kraft, mit welcher ein diamagnetischer, cylindrischer Körper, der sich mit einer, von einem bekannten galvanischen Strom durchflossenen Spirale conaxial nahe an deren Ende befindet, aus letzterer herausgestossen wird. Die Grösse der Kraft ist, wenn die Mitte des Cylinders in die Endfläche der Spirale fällt, bestimmt durch den Ausdruck[2])

$$\xi = \frac{4\pi^2 k N^2 \nu^2 i^2 v}{b-\beta}\left[\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}} + \frac{\varrho^2}{8m^2}\left(\frac{b^3}{\sqrt{b^2+m^2}^3} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\beta^3}{\sqrt{\beta^2+m^2}^3}\right) - \frac{l^2+m^2}{4(l^2-m^2)^2}\left(b\sqrt{b^2+m^2} - \beta\sqrt{\beta^2+m^2} - \right.$$
$$\left.\left. - m^2\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}}\right) - \frac{l(b^3-\beta^3)}{3(l^2-m^2)^2}\right];$$

1) Vom Herrn Verf. aus den Sitzungsberichten der Wiener Akad. Bd. 96 S. 777 mit einigen Aenderungen mitgetheilt.

2) Boltzmann, Sitzungsber. der kais. Akad. in Wien Bd. 80 S. 687 (1879) und Bd. 88 S. 576 (1881).

hier bedeuten l die Länge, β und b innersten und äussersten Radius der Spirale, N die Anzahl der Spiralwindungen auf die Längeneinheit für eine Lage, ν die Anzahl der Lagen. $2m$ ist die Länge, ϱ der Radius, v das Volum des diamagnetischen Cylinders, i die Stromintensität in den Spiralwindungen, endlich k die (positiv eingeführte) Diamagnetisirungszahl. Es ist dabei vorausgesetzt, dass der Radius des diamagnetischen Cylinders klein sei gegen die Radien der Spiralwindungen, letztere aber wieder klein seien gegen die Länge der Spirale. Von der zu den Versuchen benutzten Rolle wurden entweder 10 oder 12 Drahtlagen vom Strome i durchflossen; es ist der Radius der innersten Windungen 3,54 resp. 4,03 cm, jener der äussersten 6,23 cm. Da der Radius der diamagnetischen Cylinder etwa 0,5 cm war, während die Länge der Spirale 50 cm betrug, so sind die obenerwähnten Voraussetzungen erfüllt.

Die angewendete Methode ist die in der Abhandlung: „Bestimmungen der Diamagnetisirungszahl des metallischen Wismuths in absolutem Maasse“ [1]) als zweite bezeichnete, nach welcher ich für vier Wismuthcylinder verschiedener Provenienz die Grösse k zwischen 13,5 und $14{,}5 \cdot 10^{-6}$ erhalten habe; sowohl die Spirale als die Drehwage sind dieselben, welche ich vor mehreren Jahren verwendete.

Der Reductionsfactor der Spiegel-Tangentenbussole zur Messung von i nach absolutem Maasse wurde im Laufe der Beobachtungen mehrere Male mit Hilfe eines Clark'schen Normalelementes bestimmt. Ist s die Länge des Hebelarmes, an welchem die der Cylinderaxe parallele Kraft ξ angreift, D das Drehmoment der Torsion des Aufhängedrahtes (Neusilber) der Drehwage für den Verdrehungswinkel 1, so ist $\xi s = D \cdot \varphi$, wo $\varphi = \frac{A}{2\delta}$ der mit Spiegel und Scala beobachtete Ablenkungswinkel der Drehwage (A = Ablenkung in Scalentheilen, δ die Scalendistanz).

Die Ermittlung von D, welches bei jeder Versuchsreihe bestimmt wurde, geschah auf verschiedene Weisen.

1. Aus der Beobachtung der Schwingungsdauern der Drehwage, bevor (T) und nachdem (T') ein Magnet (vom Moment M) in ein an der Verlängerung der Drehwageaxe befestigtes Schiffchen eingelegt wurde; hierbei fiel die horizontale Axe des Schiffchens in der Ruhelage der Drehwage nahe mit dem magnetischen Meridian zusammen. Es ergibt sich

$$D = \frac{MHT'^2 - \pi^2 \varkappa}{T^2 - T'^2};$$

1) Sitzungsber. d. k. Akad. Bd. 85 S. 37. Wied. Ann. Bd. 17 S. 272 (1882).

MH, das Directionsmoment des Magnetes, wird in gewöhnlicher Weise durch einen Schwingungsversuch ermittelt; $\varkappa$, sein Trägheitsmoment, aus den Dimensionen des cylindrischen Magnets berechnet.

2. An dem Torsionskopf der Drehwage war ebenfalls ein Spiegel befestigt, so dass auch die Drehungen des Kopfes mit Fernrohr und Scala (Distanz δ') beobachtet werden konnten.

Aendert sich die Einstellung der Drehwage (mit Magnet) um n Scalentheile, wenn der Torsionskopf um einen gewissen Winkel (n' Scalentheile) gedreht wird, so hat man

$$D = \frac{n}{n'\frac{\delta}{\delta'} - n} \cdot MH.$$

3. Auch wurde das Torsionsverhältnis $\frac{D}{MH} = \theta$ durch Ablenkungsversuche mit einem zweiten Magnet von Moment M' gemessen und daraus D bestimmt. Befindet sich der Magnet M' in der ersten Hauptlage im Abstande r vom Magnet M und wird dabei die Drehwage um a Scalentheile abgelenkt, so ist

$$1 + \Theta = \frac{2M'}{r^3 H} \cdot \frac{2\delta}{a}\left(1 - \frac{\frac{3}{2}\lambda^2 - \lambda'^2}{2r^2}\right),$$

worin λ und λ' die Poldistanzen des abgelenkten (M) und ablenkenden Magnets (M') bedeuten. $\frac{M'}{H}$ wird durch Ablenkungsversuche an einem Magnetometer erhalten.

4. Endlich kann D auch durch Ermittlung des Trägheitsmomentes K der Drehwage nach

$$D = \frac{\pi^2 K}{T^2}$$

berechnet werden.

Alle vier Methoden gaben für D nahe übereinstimmende Werthe.

Die Ruhelagen der Drehwage wurden abwechselnd bei geschlossenem und geöffnetem Strom i aus mehreren Umkehrpunkten bestimmt; jede einzelne Beobachtung wurde wiederholt, nachdem die Stromesrichtung in der Spirale commutirt war. Die Wirkung der durchströmten Spirale auf die Drehwage allein (ohne diamagnetische Substanz) musste bei den Messungen natürlich in Rechnung gebracht werden; diese Wirkung bestand in einer sehr geringen Anziehung, welche auf den Glasstab, an dem die diamagnetischen Körper hingen, und den hölzernen Wagebalken ausgeübt wurde; sie wurde durch besondere Versuche ermittelt.

Ich lasse nun die Beobachtungsresultate folgen: X bedeutet die in der Endfläche der Spirale in Richtung der Axe herrschende Scheidekraft (nach abs. Masse), welcher also die nahe der Cylindermitte liegenden Theile des Diamagnets ausgesetzt sind; zur Berechnung von X dient die Formel

$$X = \frac{2 N \nu \pi l i}{b - \beta} \log \frac{b + \sqrt{l^2 + b^2}}{\beta + \sqrt{l^2 + \beta^2}}.$$

Antimon I.

$2m = 4{,}04$ cm, $\varrho = 0{,}54$ cm, $v = 3{,}707$ cbcm, Dichte $\sigma = 6{,}698$

X (cm gr sec)	94,2,	116,	148
k	4,92,	4,91,	$4{,}87 \cdot 10^{-6}$

Antimon II.

$2m = 3{,}86$, $\varrho = 0{,}535$, $v = 3{,}450$, $\sigma = 6{,}696$

X	113,	145
k	5,57,	$5{,}58 \cdot 10^{-6}$

Tellur.

$2m = 4{,}28$, $\varrho = 0{,}55$, $v = 4{,}15$, $\sigma = 6{,}159$

X	116,	132,	149,	152
k	1,59,	1,61,	1,58,	$1{,}60 \cdot 10^{-6}$

Wismuth I.

$2m = 4{,}41$, $\varrho = 0{,}556$, $v = 4{,}305$, $\sigma = 9{,}817$

X	103.	110,	146
k	13,5,	13,4,	$13{,}6 \cdot 10^{-6}$

Wismuth II.

$2m = 6{,}8$, $\varrho = 0{,}42$, $v = 3{,}778$, $\sigma = 9{,}819$

X	87,	102,	107
k	13,8	13,7,	$13{,}8 \cdot 10^{-6}$

Auffallend ist der grosse Unterschied der Diamagnetisirungszahlen für die beiden Antimoncylinder; Cylinder II, für welchen k grösser ist, hatte vielfach zu calorimetrischen Versuchen gedient, seine Oberfläche war matt, jene von I metallisch glänzend.

Recht befriedigend ist dagegen die Uebereinstimmung der Zahlen für die beiden Wismuthcylinder. Da ich das verwendete Material aus bester Quelle erhielt und dasselbe sicher sehr rein ist, so wäre die Diamagnetisirungszahl eher etwas grösser zu erwarten gewesen. (So hatte ich seinerzeit für zwei cylindrische Stäbe Werthe gefunden, welche noch etwas grösser als $14 \cdot 10^{-6}$ waren; a. a. O. S. 61 und 63).

Von den vor fünf Jahren benutzten Wismuthcylindern besass ich noch den (a. a. O.) mit Nr. 3 bezeichneten, für welchen sich $k = 13{,}48 \cdot 10^{-6}$ ergeben hatte. Diesen Stab brachte ich auf die Länge $2m = 4{,}6$ cm und stellte zur Controle neuerdings einige Messungen an, aus welchen $k = 13{,}5 \cdot 10^{-6}$ folgte, was in vollkommener Uebereinstimmung mit dem älteren Resultate steht.

Die diamagnetischen Substanzen befanden sich bei den vorgenommenen Messungen unter dem Einflusse mässig starker magnetisirender Kräfte; innerhalb der Grenzen, welche die Scheidekraft in der Endfläche der Spirale erreichen konnte, zeigt sich eine Constanz der Diamagnetisirungszahl.

Ich versuchte noch eine Vergleichung des diamagnetischen Verhaltens bei grösseren Scheidekräften vorzunehmen, indem ich die Drehungsmomente bestimmte, mit welchen die Cylinder in dem unhomogenen Felde zwischen conischen Polen eines Elektromagnets in die äquatoriale Lage getrieben werden [1]). Dazu verwendete ich die beiden Cylinder *Bi* I und *Sb* I; dieselben haben nahe gleiche Radien, ihre Längen waren ebenfalls einander nahe gleich gemacht. Diese Cylinder wurden in ein aus Glasfäden hergestelltes Schiffchen eingelegt, welches an einem sehr feinen Messingdrahte hing, der wieder an einem Torsionskopf mit Gradtheilung befestigt war. Durch eine in der Verlängerung des Aufhängedrahtes unterhalb des Schiffchens angebrachte Glimmerplatte, die in eine mit Wasser und Glycerin gefüllte Schale tauchte, wurden die Schwingungen gedämpft.

Dem Schiffchen wurde eine bestimmte Lage zwischen den conischen Magnetpolen gegeben, bei welcher die Axe der Cylinder mit der Verbindungslinie der Pole einen Winkel von etwa 45° machte; diese Stellung war durch ein auf einen Punkt des Glasschiffchens gerichtetes Mikroskop fixirt. Die Distanz der Polenden des Elektromagnets betrug 2,8 cm.

Man bestimmte nun für zwei verschiedene Stromintensitäten des den Elektromagnet erregenden Stromes (6 und 10 Bunsenelemente) die zur Zurückführung des Wismuth- oder Antimoncylinders erforderlichen Torsionen des Messingdrahtes. Falls sich das Verhältnis dieser Torsionen sowohl für Wismuth als für Antimon gleich herausstellt, so müssen entweder die Diamagnetisirungszahlen für die beiden Scheidekräfte bei Wismuth sowohl als bei Antimon constant sein oder in dem gleichen Maasse sich verändert haben.

In der That war das Verhältnis der Torsionen nahe das gleiche, indess kamen bei den einzelnen Beobachtungen mitunter beträchtliche

1) Vergl. E. Becquerel, Wiedemann, Elektr. 3. Bd. S. 804.

Abweichungen vor, so dass einmal das Verhältnis beim Wismuth, das anderemal jenes beim Antimon das grössere war. Die Wirkung auf das Schiffchen (aus diamagnetischem Glase) allein war sehr klein. Aus mehreren Beobachtungen folgte als Mittelwerth das Verhältnis der Torsionswinkel bei Wismuth 2,06, bei Antimon 2,10. In der Nähe der Mitte zwischen den Spitzpolen betrug die Intensität der magnetischen Kraft (gemessen mit einem kleinen, 1,2 cm langen Inductionsröllchen, dessen Windungen einen mittleren Radius ungefähr gleich dem Radius der Cylinder hatten) für die Erregung des Elektromagnets mit 10 und 6 Bunsenelementen etwa 1000 und 660 (cm gr sec).

Die bei den oben beschriebenen Messungen verwendeten Materialien sind dieselben, für welche ich kürzlich die Widerstandsveränderungen im magnetischen Felde, sowie die Hall'schen Drehungs- und die elektrischen Leitungsvermögen bestimmt habe [1]). Es scheint, dass sich kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dem diamagnetischen Verhalten und jenem der von einem Strome durchflossenen, im magnetischen Felde befindlichen Substanzen auffinden lässt. Zwar zeigen Tellur, Wismuth und Antimon unter den bisher untersuchten Stoffen das Hall'sche Phänomen am stärksten, jedoch haben Tellur und Antimon (nach Hall's Bezeichnung) ein positives, Wismuth hat dagegen ein negatives Drehungsvermögen; ferner scheint bei den ersteren — soweit bis jetzt bekannt — das Drehungsvermögen unabhängig zu sein von der Stärke der magnetischen Scheidekraft, während es bei Wismuth mit steigender Feldintensität sehr bedeutend abnimmt.

Wismuth, Antimon und Tellur zeigen eine Vermehrung des scheinbar elektrischen Leitungswiderstandes, wenn ein Streifchen oder eine Platte dieser Substanzen derart in ein magnetisches Feld gebracht wird, dass die Kraftlinien desselben die Ebene der Platte rechtwinklig schneiden und daher der galvanische Strom senkrecht zu den Kraftlinien die Platte durchfliesst. Die Widerstandsvermehrung ist für Wismuth am grössten, für Tellur am kleinsten [2]). Es scheint, dass wohl auch diese Erscheinung mit dem diamagnetischen Verhalten nicht in engere Beziehung zu bringen sei, ebenso wenig wie der transversale

1) Sitzungsber. der kais. Akad. in Wien Bd. 95 S. 714 (1887).

2) Die Tellurstange, für welche $k = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ bestimmt wurde, war aus demselben Material gegossen, wie der Streifen *Te* Nr. 1 (a. a. O. S. 743).

In dem homogenen magnetischen Felde $M = 7600$ (cm gr sec) erhielt ich als Widerstandszunahme, ausgedrückt in Procenten des ursprünglichen Widerstandes, für *Te*: 0,14, für *Sb*: 0,60, für das hier gebrauchte *Bi* über 20. Nach den Beobachtungen von D. Goldhammer (Wied. Ann. Bd. 31 S. 360) findet in den genannten Substanzen auch eine Widerstandsvermehrung statt, wenn die Kraftlinien des Feldes der Ebene der Platte parallel sind und der Strom parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien fliesst.

„thermomagnetische" Effect[1]) oder die durch die Wirkung des Magnetismus auftretende Temperaturdifferenz an den Rändern einer vom galvanischen Strome durchflossenen Platte[2]), wenngleich die beiden zuletzt erwähnten Phänomene in allen drei Substanzen in demselben Sinne auftreten. Es hat nämlich bei gleicher Richtung des Wärmestromes und gleicher Erregungsart des magnetischen Feldes der transversale thermomagnetische Strom in den drei Substanzen die gleiche Richtung, ebenso tritt die Temperaturerhöhung, resp. Erniedrigung bei gleicher Richtung des die Platte durchfliessenden galvanischen Stromes und gleicher Erregung des Feldes auf derselben Seite der Platte auf.

Eine Reihe von Bestimmungen der Diamagnetisirungszahlen nach der eingangs angegebenen Methode wurde auch mit Wismuth und Antimon gemacht, als diese Metalle in zerkleinerter Form in eine Glasröhre gefüllt und in die Drehwage eingehängt waren. Bei diesen Versuchen benutzte ich ein Antimon, das Herr Prof. A. Schuller in Budapest durch Sublimation dargestellt und mir freundlichst überlassen hatte. Die Zerkleinerung des Materials geschah in einer Achatschale.

Es kamen zwei Glasröhren I und II in Verwendung, die mit dem grob gepulverten Metalle gefüllt waren, sie hatten gleiche Weite (1 cm innerer Durchmesser), aber ungleiche Länge; auf der von der Spirale abgewendeten Seite waren sie mit einem Korke verschlossen. Die Wirkung der durchströmten Spirale auf die leeren Glasröhren wurde gesondert bestimmt.

Indem man die Masse des jeweilig eingefüllten Pulvers ermittelte, erhielt man aus den Beobachtungen direct die auf die Masseneinheit bezogene Diamagnetisirungszahl; dieselbe ist mit (k) bezeichnet.

Antimon pulv., Glasrohr I; $2m = 7{,}7$ cm,
Masse des Antimons $= 23{,}63$ g.

X (cm gr sec)	91,	111
(k)	0,698,	$0{,}699 \cdot 10^{-6}$

Glasrohr II; $2m = 9{,}58$, Masse $= 29{,}32$

X	87,	106
(k)	0,692,	$0{,}696 \cdot 10^{-6}$

Die für (k) erhaltenen Zahlenwerthe stehen in guter Uebereinstimmung; nimmt man im Mittel $(k) = 0{,}696 \cdot 10^{-6}$, so folgt die auf die Volumeneinheit bezogene Diamagnetisirungszahl des gegossenen Metalles $k = (k)\sigma$, wo $\sigma = 6{,}7$ die Dichte des Antimons bezeichnet; hiernach ist $k = 4{,}66 \cdot 10^{-6}$. Diese Zahl kommt der oben für *Sb* I gefundenen ziemlich nahe.

1) Wied. Ann. Bd. 29 S. 343 (1886).
2) Wied. Ann. Bd. 31 S. 737 (1887).

Ich goss sodann aus dem gepulverten Metalle in einer Gussform eine cylindrische Stange; dieselbe hatte die Länge $2m = 9{,}35$, den Radius $\varrho = 0{,}307$ cm und wog 18,55 g.

In der gleichen Weise, wie die Pulver untersucht, ergab sich bei zwei Versuchsreihen

X	97	107
(k)	0,697	$0{,}687 \cdot 10^{-6}$

Der Mittelwerth $(k) = 0{,}692 \cdot 10^{-6}$ ist also derselbe, wie der mit dem gleichen Material in grob gepulvertem Zustande erhaltene [1]).

In analoger Weise wurde mit Wismuth verfahren. Dieses untersuchte ich zuerst in Form einer massiven Stange, sodann zerkleinerte ich dieselbe, bis ich ein grobkörniges Pulver erhielt, das in die Glasröhren gefüllt wurde. Ich wählte dazu den Cylinder, welcher in der mehrfach erwähnten Abhandlung als „Wismuth Nr. 1" bezeichnet ist. für dieses Wismuth war $k = 14{,}0 \cdot 10^{-6}$ erhalten worden (a. a. O. S. 59); Neuerliche Messungen lieferten

X	45,	69,	108
k	14,4,	14,4,	$14{,}3 \cdot 10^{-6}$,

es folgt hiernach $(k) = 1{,}465 \cdot 10^{-6}$.

Für das grob gepulverte Metall erhielt ich die Resultate:

Wismuth pulv., Glasrohr I, $2m = 7{,}7$, Masse = 35,75.

X	83,	98
(k)	1,27,	$1{,}28 \cdot 10^{-6}$.

Glasrohr II; $2m = 9{,}56$, Masse 41,92

X	66,	104
(k)	1,32,	$1{,}31 \cdot 10^{-6}$

Der aus den letzten Versuchen sich ergebende Mittelwerth $(k) = 1{,}29 \cdot 10^{-6}$ ist um fast 12 % kleiner, als der aus den Messungen mit der massiven Stange folgende. Es muss dahingestellt bleiben, ob nicht beim Zerkleinern der Stange geringe Mengen magnetisirbarer Substanz in das Wismuthpulver gekommen sind. Da sich das Wismuth nicht in der Achatschale zerkleinern liess, sondern dieses durch Zerschlagen mit einem Hammer vorgenommen werden musste — wobei allerdings die Substanz mehrfach in Papier gewickelt war —, so ist eine Verunreinigung durch sehr geringe Mengen von Eisen nicht eben unwahrscheinlich.

1) Vergl. Matteucci, Ann. de Chim. et de Phys. vol. 56 p. 193 (1859). Wiedemann, Elektr. Bd. 3 S. 842.

Ueber die durch Bewegung eines im homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektricums hervorgerufene elektrodynamische Kraft[1]).

Von

W. C. Röntgen.

Die vorliegende Mittheilung enthält die auf experimentellem Wege gefundene Beantwortung folgender Frage: Kann die Bewegung eines in einem homogenen und constanten elektrischen Felde befindlichen Dielektricums, welches keine eigentliche Ladung mit sich führt, eine elektrodynamische Kraft erzeugen?

Zunächst möchte ich darlegen, dass die Möglichkeit, auf diese Weise eine elektrodynamische Wirkung zu erzielen, vorhanden ist. Man stelle sich zwei parallele, ebene, unendlich grosse Condensatorplatten vor, welchen eine bestimmte Potentialdifferenz ertheilt wurde; die isolirende Zwischenschicht werde senkrecht zu den Kraftlinien in gerader Richtung mit constanter Geschwindigkeit bewegt. Nehmen wir dann an, dass das Medium, in welchem die elektrische Polarisation stattfindet, die Bewegung der Schicht mitmacht, so muss jene Schicht sich nach aussen elektrodynamisch verhalten, wie zwei in ihrer oberen bezw. unteren Begrenzungsfläche vorhanden gedachte, in Ruhe befindliche Stromlamellen, von denen die eine in der Richtung der Bewegung, die andere in der entgegengesetzten Richtung von gleich starken, constanten Strömen durchflossen würde. Ist z. B. die obere Condensatorplatte bis zu einem höheren Potential geladen als die untere, so muss der äquivalente Strom in der unteren Begrenzungsfläche in der Richtung der Bewegung fliessend gedacht werden.

Am einfachsten kommt man zu der Einsicht von der Richtigkeit dieser Betrachtung, wenn man das Dielektricum aus polarisirten Theilchen bestehend denkt: dann ist die Ursache der elektrodynamischen Kraft in der Bewegung der elektrischen Pole zu finden. Aber

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Berliner Akad. Bd. 2 S. 23 (1888).

auch die Maxwell'sche Theorie von der elektrischen Verschiebung führt zu demselben Resultat.

Von den Versuchen, die ich zur Prüfung der angeregten Frage ausführte, gestatte ich mir zwei mitzutheilen.

Ich liess eine runde Glasscheibe (oder eine Hartgummischeibe) rotiren zwischen zwei horizontalen Condensatorplatten, von denen die obere dauernd zur Erde abgeleitet war, die untere von einer Elektricitätsquelle aus mit positiver bezw. negativer Elektricität geladen werden konnte. Dicht über der oberen Condensatorplatte hing die eine von zwei zu einem sehr empfindlichen System verbundenen Magnetnadeln; ihre Richtung stand senkrecht zu einem Radius der Scheibe und ihr Mittelpunkt befand sich über der Scheibe unweit vom Rande derselben. Durch Fernrohr, Spiegel und Scala konnten die Ablenkungen der Nadel, die beim Commutiren der Ladung des Condensators eventuell eintraten, beobachtet werden.

Bei diesen Versuchen ergab sich nun, dass jedesmal, wenn commutirt wurde, die Nadel eine Ablenkung erfuhr; die so gerichtet war, wie wenn man die oben näher angegebene Richtung eines vorhanden gedachten Stromes umgekehrt hätte. Die Wirkung der Bewegung der positiven Pole auf die Nadel entsprach der eines in gleicher Richtung wie die Bewegung fliessenden Stromes, die Bewegung der negativen Pole, der eines der Bewegung entgegengesetzt fliessenden Stromes.

Abgesehen von anderen leicht zu entkräftenden Einwänden gegen diese Versuche, wie namentlich der Möglichkeit, dass die Ablenkungen der Nadel durch wirkliche in den Condensatorplatten vorhandene Ströme erzeugt wurden, bleibt noch ein Einwand übrig, der einer besonderen Erwähnung bedarf und beseitigt werden muss. Es ist das der folgende: Wenn eine Scheibe zwischen kräftig geladenen Condensatorplatten rotirt, so ist es möglich, dass sie allmählich eine eigentliche Ladung enthält, sei es durch ihre wenn auch nur geringe Leitungsfähigkeit, oder durch eine directe Mittheilung von Elektricität von Seiten des Condensators. Die Bewegung dieser Ladung würde, wie Rowland gezeigt hat, auf die Nadel elektrodynamisch wirken, und man könnte geneigt sein, die bei meinen Versuchen beobachtete Ablenkung dieser Wirkung zuzuschreiben.

Um sicher zu sein, dass die beobachteten Ablenkungen nicht auf diese bekannte Erscheinung zurückzuführen waren, stellte ich Versuche an mit einem Condensator, dessen untere Platte in zwei voneinander isolirten Hälften getheilt war, die beide gleichzeitig aber entgegengesetzt geladen waren; der Mittelpunkt der Nadel befand sich über einer Stelle der rotirenden Scheibe, die von einem Radius derselben getroffen wurde, welcher senkrecht stand zu der Trennungslinie der

beiden Condensatorhälften. Von einer merklichen durch Leitung in der Scheibe entstandenen Ladung derselben konnte nun in Anbetracht der raschen Rotation nicht mehr die Rede sein; dass auch keine Elektricität von dem Condensator auf die Scheibe überströmte, ergab sich aus der Beobachtung, dass der Ausschlag von zwei mit je einer Condensatorhälfte verbundenen Elektrometern von einer Commutirung bis zur folgenden constant blieb.

Auch bei dieser Versuchsanordnung erhielt ich im wesentlichen dieselben Ausschläge der Nadel, wenn commutirt wurde.

Es dürfte daher die Thatsache experimentell festgestellt sein, dass elektrodynamische Kräfte erzeugt werden können durch die Bewegung eines unter dem Einfluss von statischen Ladungen stehenden Dielektricums; ob auch umgekehrt jede beobachtete elektrodynamische Kraft auf diese Ursache zurückgeführt werden kann, ist eine Frage, deren Beantwortung ich noch nicht in Angriff zu nehmen wage.

Die erhaltenen Ausschläge waren immer klein: 2—3 Scalentheile; vergeblich bemühte ich mich dieselben zu vergrössern. Der Grund, weshalb ich viel Werth darauf legte, grössere Ablenkungen zu bekommen, ist nicht etwa darin zu suchen, dass ich noch im Zweifel bin über die Existenz oder über die Ursache derselben, sondern vielmehr darin, dass ich dann vielleicht im Stande gewesen wäre, die Versuchsresultate besser quantitativ zu verwerthen. Es wäre mir namentlich von grossem Interesse gewesen, zu erfahren, ob dasjenige Medium, in welchem die dielektrische Polarisation stattfindet, die Bewegung der ponderabelen Theilchen vollständig mitmacht, oder sich ähnlich wie der Lichtäther nach Fresnel's Ansicht verhält. In der That sind die sich nach dieser Richtung hin eröffnenden Perspective zu verlockend, um nicht alles zu versuchen, was zu einem entscheidenden Resultat führen könnte. Indessen blieben, wie schon gesagt, meine Bemühungen bis jetzt erfolglos.

Schliesslich gestatte ich mir, meiner Mittheilung noch einige weitere Betrachtungen hinzuzufügen.

1. Zunächst die folgende, welche an das zuletzt Gesagte anknüpft. Aus gewissen optischen Ursachen hat man bekanntermaassen geschlossen, dass zwischen den Körpern auf der Erdoberfläche und dem sie umgebenden Lichtäther eine Geschwindigkeitsdifferenz bestehen müsse; ob mit Recht oder nicht, ist, wie mir scheint, eine noch offene Frage. Sollte es nicht gelingen, auch auf elektrischem Wege zu einer Entscheidung zu gelangen? Sprechen doch manche Gründe für die Annahme, dass der Lichtäther auch das Medium ist, durch welches die elektrischen Kräfte übertragen werden. Eine Möglichkeit, dieses Ziel zu erreichen, schien mir durch meine Versuche gegeben zu sein. Man

denke sich einen aus zwei parallelen metallischen Platten bestehenden Condensator horizontal aufgestellt und über der oberen Platte eine Magnetnadel angebracht. Zwischen den Platten befinde sich Luft oder irgend ein anderer Isolator, der aber nicht wie bei den oben beschriebenen Versuchen künstlich bewegt wird, sondern sich relativ zum Condensator in Ruhe befindet. Wenn nun eine Bewegung des Lichtäthers in Bezug auf die Körper auf der Erdoberfläche wirklich vorhanden wäre, so würde derselbe auch zwischen den geladenen Condensatorplatten durchstreichen und zwar nach der erwähnten Annahme von der Identität des Licht- und des Elektricitätäthers in einem dielektrisch polarisirten Zustand. Würde man somit für die Beobachtung eine Zeit wählen, wo diese Bewegung möglichst parallel mit den Condensatorplatten und der Magnetnadel stattfände, so wäre es möglich, dass man beim Commutiren der Ladung eine Ablenkung der Nadel wahrnähme. Eine solche wirklich beobachtete Ablenkung würde eine kräftige Stütze bilden für die Richtigkeit der gemachten Voraussetzungen.

Leider muss ich mittheilen, dass meine Versuche in dieser Beziehung negative und daher nicht beweiskräftige Resultate ergeben haben. Es war nämlich niemals auch nur die geringste Ablenkung der Nadel zu beobachten, wiewohl ich zu sehr verschiedenen Jahres- und Tageszeiten und bei verschiedenen Stellungen der Nadel zum Meridian experimentirte.

2. Nach verschiedenen Beobachtern besitzt die Erde eine elektrische Ladung; der die Erde umgebende Raum ist daher dielektrisch polarisirt, und da das diesen Raum erfüllende Dielektricum an weit von der Erde entfernten Stellen die Bewegung der Erde jedenfalls nicht vollständig mitmacht, so ist zu vermuthen, dass auf eine mit der Erdoberfläche mitgeführte Magnetnadel eine ähnliche elektrodynamische Kraft ausgeübt wird, wie wir sie bei meinen Versuchen kennen gelernt haben. Ueber die Grösse dieser Kraft lässt sich vorläufig nichts Bestimmtes sagen, da aber grosse Geschwindigkeitsdifferenzen vorkommen und das Dielektricum einen grossen Raum ausfüllt, so könnte diese Kraft möglicherweise nicht so sehr gering sein.

3. Wenn ein senkrecht zu den Kraftlinien bewegtes Dielektricum auf einen ausserhalb des elektrischen Feldes liegenden, ruhenden Magnetpol elektrodynamisch wirkt, so wird auch dieser Pol auf das Dielektricum zurückwirken; es fragt sich, worin diese Rückwirkung sich äussert. Falls die Bewegungsrichtung unveränderlich ist, könnte meines Erachtens diese Wirkung in einer Aenderung der Richtung und des Momentes der dielektrischen Polarisation bestehen. Der Nachweis einer solchen Aenderung dürfte aber, auch wenn grosse magnetische Kräfte angewendet werden, äusserst schwierig zu erbringen sein.

Betrachtet man ein senkrecht zu den Kraftlinien eines homogenen elektrischen Feldes bewegtes Dielektricum wie eine aus sehr vielen, übereinander gelagerten, in Ruhe befindlichen Stromlamellen bestehende Scheibe, von der jede Lamelle in der entgegengesetzten Richtung vom Strom durchflossen wird, als die benachbarten, so kommt man zu der Schlussfolgerung, dass auch im Innern des Dielektricums elektrodynamische Kräfte auftreten, welche eine Ausdehnung des Dielektricums in der Richtung der Kraftlinien, oder eine Aenderung des dielectrischen Momentes, oder auch beides zusammen bewirken. Auch die Wahrnehmung dieser Erscheinungen dürfte mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein.

Die Dimensionen des zu den Versuchen mit ungetheiltem Condensator verwendeten Apparates waren folgende:

Durchmesser der rotirenden Scheibe	10,0 cm
Dicke „ „ „	0,35 „
Abstand der Scheibe von der oberen Condensatorbelegung	0,14 „
Abstand der Scheibe von der unteren Condensatorbelegung	0,25 „
Durchmesser der Belegungen	20,0 „
Excentricität der Nadel	4,0 „
Abstand der unteren Nadel von der oberen Fläche der rotirenden Scheibe	0,30 „
Abstand der beiden Nadeln voneinander . . .	24,5 „
Länge der unteren Nadel	4,65 „
„ „ oberen „	4,74 „
Magnetisches Moment der unteren Nadel . . .	9,393 $\frac{cm^{\frac{5}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{sec}$
„ „ „ oberen „ . . .	9,551 $\frac{cm^{\frac{5}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{sec}$
Schwingungsdauer des gedämpften astatischen Systems	17,0 sec
Torsionsverhältnis des gedämpften astatischen Systems	0,0062
Log. Decrement des gedämpften astatischen Systems	1,0
Schwingungsdauer des Systems mit gleichgerichteten Nadeln	1,3 sec
Torsionsverhältnis des Systems mit gleichgerichteten Nadeln	0,000050
Logar. Decrement des Systems mit gleichgerichteten Nadeln	0,0879

Die Potentialdifferenz der beiden Condensatorbelegungen entsprach einer Funkenstrecke von 0,3 cm in Luft zwischen Kugeln von 2,0 cm Durchmesser.

Die Umdrehungszahl der Scheibe betrug ungefähr 100 pro Sec.

Die nach dem Commutiren beobachteten Ausschläge betrugen 2—3 Scalentheile (Millimeter).

Die Entfernung des Spiegels von der Scala war 229 cm.

W. Weber's und R. Kohlrausch's absolute Messung des Elektricums.

Von

A. Kurz.

In dem Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus von Mascart und Joubert, deutsch von Levy, 2. Bd. 1888 § 1130 sind diese „ersten Untersuchungen wegen ihrer historischen Wichtigkeit mit den Einzelheiten angeführt". Die Quelle „Elektrische Maassbestimmungen, Abh. der k. sächs. Ges. der Wiss., V 1856" war mir bisher nicht zugänglich. Da ich seit vier Jahren (s. Repert. 20. Bd. S. 457 und 858) solche wenn auch minder sorgfältige Messungen im Unterrichte anstelle, so hat mich dieser Fund sehr interessirt und ich will ihn jetzt mit angenäherten Zahlen und Ergänzungen hinsichtlich der dort nicht angegebenen Einheiten in Kürze vorführen.

Eine Leydnerflasche wurde mit einer Kugel von 8 cm Radius berührt; deren Capacitätenverhältnis wurde $C : C' = 30$ gefunden.

Mit dieser Kugel wurde die eine der beiden gleichen Kugeln der Torsionswage berührt, deren Radius 14 mal so klein war als der vorhingenannte Kugelradius.

Mittels der „von Plana nach Poisson berechneten Tabelle" ergab sich das Capacitätenverhältnis der beiden Kugeln

$$C' : c = 127\ ^{1}).$$

Also $C : c = 3800 : 1$. Ein so kleiner Bruchtheil von Elektricität geht auf die beiden Kugeln der Torsionswage über, jede fasst also den

7600 ten Theil,

den unser Fundort mit q' bezeichnet.

Die Situation derselben ist folgende: Man denke ein rechtwinkliges Dreieck; im rechten Winkel ist der Drehpunkt des Armes 6,17 cm der beweglichen Kugel, die andere Kathete bildet der Abstand 9,35 der festen Kugel, so dass sich die Hypotenuse 11,2 und das zu ihr gehörige Lot 5,15 berechnet.

---

1) Wäre jede Kugel für sich, so wäre das Verhältnis nur 14 (der Radien); aber das Dichte-Verhältnis $e R^2 : E r^2 = 196 : 127$ ist nahe wie 3 zu 2 zu Gunsten der kleineren Kugel.

Demnach ist das statische Moment der elektrischen Kraft

$$\frac{q'^2}{11{,}2^2} \cdot 5{,}15 \text{ oder } \frac{q'^2}{24{,}43}$$

gleich dem Torsionsmomente für T Winkelminuten 0,0050615 T, wie die Angabe im Buche lautet, die ich jetzt gleichwie in meiner citirten Abhandlung mittels des Torsionselasticitätsmoduls D und des Radius ϱ und der Länge l des Aufhängedrahtes gebe

$$0{,}0050 \ldots T = \frac{D \cdot \pi \varrho^4}{2l} \cdot \frac{\pi}{180} \frac{T}{60}.$$

Da aber über den Draht (Material D, Grösse ϱ und l) keine Angaben sich vorfinden, so fahren wir der Quelle gemäss weiter

$$q' = 0{,}35 \ldots \sqrt{T}.$$

Dass hierbei ausser dem Centimeter als Längen- und der Secunde als Zeit-Einheit das Gramm als Masseneinheit zu Grunde gelegt ist, erfährt man nur aus der gelegentlichen Angabe 0,18 für das Feld des horizontalen Erdmagnetismus. Es wird nämlich trotz des Titels „Messung der Elektricitätsmenge" des genannten Paragraphen hauptsächlich die kritische Geschwindigkeit bestimmt, wie dies dem Titel des achten Kapitels „Verhältnis der Einheiten zu einander" allerdings entspricht. Auch kann (muss) man entnehmen, dass der Torsionswinkel sich nicht über 400 Winkelminuten erstreckte, so dass

$$q' = 7 \frac{\text{Gramm}^{\frac{1}{2}}, \text{ Centimeter}^{\frac{1}{2}}}{\text{Secunde}}$$

sich höchstens belief.

In meiner erwähnten Messung [2]) waren auf jedem Probescheibchen 2,5 solche Einheiten und der Torsionswinkel betrug 120 Winkelminuten. Man sieht jetzt auch, dass die im Eingange von mir reproducirte Capacitäten-Rechnung zu der engeren Aufgabe der Elektricitätsmessung nicht nothwendig ist, wenn man die Daten des Torsionsmomentes genügend angibt.

Dieses Moment wurde von den Verfassern „nach der Schwingungsmethode ermittelt". Dazu nenne ich, wie in meiner vorjährigen Abhandlung über das Bifilarpendel, den Bestandtheil

$$\frac{D \pi \varrho^4}{2l}$$

2) Dort ist der Factor $\cos \frac{\beta}{2}$ aus Versehen weggeblieben, da $\beta = 13^0$ also dieser Factor nahe 1 ist.

der drittletzten Gleichung das Directions-Moment und bezeichne es kurz mit Δ, um die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{K : \Delta}$$

anzuschreiben, welche nebst dem Trägheitsmoment K des Apparates noch bestimmt werden musste. (Die Angaben hierüber fehlen.)

Die erwähnte kritische Geschwindigkeit wurde als Mittelwerth von fünf Messungen der beiden Physiker gleich 310 Millionen Meter (durch Secunden) gefunden.

Selbstverständlich hat es diese meine Notiz, soweit auch sie „kritisch" ist und nicht bloss referirend, nicht so sehr mit jenen bahnbrechenden Versuchen als mit dem Vortrage derselben durch das genannte Lehrbuch zu thun, welches übrigens, soweit ich es bisher benutzen konnte, mir als eine vorzügliche Fundgrube für tiefer eingehende Belehrung erschien.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 6. December 1887.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Prof. Dr. Lewandowsky hält einen Vortrag: „Ueber die einfachste Methode zur Herstellung gleichgerichteter, galvanisch messbarer Inductionsströme".

Darauf spricht Herr Dr. R. Benedikt: „Ueber Schellak".

Herr Prof. Dr. R. Andreasch und Herr Dr. Jos. Nevinny werden als neue Mitglieder aufgenommen.

Wien, 10. Januar 1888.

Der Secretär.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 10. Januar 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Herr Dr. S. Zeisel hält den angekündigten Vortrag: „Zur Constitution des Colchicins".

Hierauf spricht Herr Prof. Dr. Latschenberger über: „Die Bildung des Gallenfarbstoffs aus dem Blutfarbstoff".

Wien, 24. Januar 1888.

Der Secretär.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 24. Januar 1888.

Vorsitzender: Dr. Guido Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr J. Miesler hält den angekündigten Vortrag über: „Die Zerlegung der elektromotorischen Kräfte der Elemente".

Ueber diesen Vortrag entwickelt sich eine Discussion, an der sich Prof. F. Exner, Dr. J. Moser und der Vortragende betheiligen.

Hierauf demonstrirt Herr Dr. J. Moser einige im Laboratorium des Herrn Prof. J. Loschmidt angefertigte Photographien.

Herr J. C. Pürthner wird als neues Mitglied aufgenommen.

Wien, 7. Februar 1888.

Der Secretär.

Berichtigung

zu dem letzten im 2. Hefte dieses Jahrganges veröffentlichten Theile der Abhandlung von F. Roth:

„Ueber die Bahn eines freien Theilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe".

Seite 67 setze überall im Exponenten von e $\sqrt{f} \cdot t$ statt $\sqrt{f \cdot t}$.

„ 67 nach Gl. 46 schalte ein: „Eine einzeln stehende Constante wird durch Gl. 44 ausgeschlossen".

„ 68 Abschnitt D, Zeile 7 von unten lies „Entwickelung" statt „Entwicklungen".

„ 69 zweite Formelzeile lies $+ i \sin (w - \sqrt{\varphi})\, t$ statt $- i \sin (w - \sqrt{\varphi})\, t$.

„ 69 vierte Formelzeile lies $\sin (w - \sqrt{\varphi})\, t$ statt $\sin (w - \sqrt{\varphi})\, t$.

„ 69 hinter $x = X_1 + X_2$ schalte ein: (entsprechend $y = Y_1 + Y_2$).

„ 69 in Gl. 48 lies $\cos (w + \sqrt{\varphi})\, t$ statt $\cos (w + \sqrt{\varphi})\, t$ und

$\cos (w - \sqrt{\varphi})\, t$ „ $\cos (w - \sqrt{\varphi})\, t$.

„ 70 vor der fünften Gleichung lies „Wiedemann" statt „Wiedenmann".

„ 71 Zeile 6 nach der ersten Gleichung lies „bildet" statt „bildete".

„ 73 erste Gleichung, im Exponenten lies $-\left(\beta_1 + \frac{a}{2}\right) t$ statt $-\left(\beta + \frac{a}{2}\right) t$.

„ 73 dritte Gleichung lies ax' statt ax^2.

„ 74 letzte Zeile des dritten Absatzes lies „dass $\sqrt{\beta - \frac{a}{2}}$ stets positiv",

statt „dass $\sqrt{\beta + \frac{a}{2}}$ stets positiv".

„ 75 vorletzte Zeile vor der Formel für β_1 streiche das Komma hinter „Wurzel".

„ 77 Zeile 27 von unten lies „vier" statt „fünf".

„ 77 „ 26 „ „ „ „fünf" „ „sechs".

„ 78 Zeile 11 von oben lies „zur Entfernung" statt „zu Entfernung".

„ 78 „ 14 „ „ „ „Lesers" statt „Lehrers".

elektro-pneumatischer Traktur. — Thomson-Brücke von Siemens & Halske. — Techniker und Juristen. — Entscheidung des k. k. Oberlandesgerichts in der Besitzstörungsklage gegen die Centralstation der Schenkenstrasse in Wien. — Weltausstellung in Paris. — Die ersten Exemplare von Edison's neuen Phonographen. — **Patente.** — **Berichtigung.**

Jahrgang 1888 Nr. 9 enthält:

Rundschau. — Berichte und Bemerkungen über Accumulatoren, namentlich über jene von Farbaky & Schenek, Reckenzaun und Julien, mit besonderer Rücksicht auf Trambahnzwecke. Von Dr. A. v. Waltenhofen in Wien. (Fortsetzung und Schluss.) — **Ueber den Widerstand des elektrischen Lichtbogens.** Von Dr. K. Feussner. — **Die Leistungen der elektrischen Arbeitsübertragung zwischen Kriegstetten und Solothurn.** Von Prof. H. F. Weber in Zürich. (Fortsetzung und Schluss.) — **Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens.** Statistisches. — Telephonnetz ohne Vermittlungsstelle. — Die Verwendung des Siliciumbronzedrahtes im Telegraphen- und Telephonbau. — **Bemerkung zu der Bestimmung des Widerstandes galvanischer Elemente von O. Canter, Telegraphen-Inspector.** Von Dr. B. Nebel. — **Literatur.** W. E. Fein, Elektrische Apparate, Maschinen und Einrichtungen. — **Kleinere Mittheilungen.** Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung in Fürth bei Nürnberg, Bamberg, Frankfurt a. M., Leipzig, Martigny, Glasgow, Chettenham. — Verschiedenes. Lichtbogen und Bogenlicht. — Kraft- und Arbeitsmaschinen-Ausstellung in München 1888. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 10 enthält:

Rundschau. — Ueber die Messung hoher Potentiale mit dem Quadrant-Elektrometer. Von A. Voller. — **Zur Frage der elektrischen Kraftübertragung bei Bahnen.** Von Cörper. — **Elektrischer Strassenbahnbetrieb.** Von J. Zacharias. — **Nebenapparate für Anlagen elektrischer Kraftübertragung.** Von W. Boveri. — **Kleinere Mittheilungen.** Telephonie. Beschwerde der Mainzer Handelskammer über das Funktioniren der Telephonverbindung Mainz—Frankfurt. — Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung in Weissenburg a. d. S , Baden-Baden, Braunschweig. — Elektrische Beleuchtungscentrale in Bremen. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 11 enthält:

Rundschau. — Zur Theorie des Herrn Dr. Frölich. Von M. Baumgardt. (Hierzu Tafel II u. III.) — **Ueber die Messung hoher Potentiale mit dem Quadrant-Elektrometer.** Von A. Voller. (Schluss statt Fortsetzung.) — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachricht. C. Dornfeld, der bish. Leiter der Firma Spiecker & Co. nach Australien abgereist. — Telephonie. Fernsprechverbindung im Rheingau. — Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung in Weissenburg a. d. S. — Die Thüringer Gasgesellschaft in Leipzig über die elektrische Beleuchtung. — Elektr. Beleuchtung des kaiserl. Torpedo-Depôts in Friedrichsort bei Kiel. — Elektr. Beleuchtung des Stadttheaters in Olmütz. — Elektrische Zugsbeleuchtung. — Ueber die elektrische Beleuchtung der Eisenbahnzüge. — Elektr. Beleuchtung in Luzern und London. — Verschiedenes. Veränderlichkeit von Magneten. — Patentprocess wegen Verletzung eines Patentes für ein Verfahren zur Tränkung roher Kohlenstäbe. — Submission der Verwaltung der belgischen Staatsbahnen für elektrische Beleuchtung. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, *Verlagsbuchhandlung.*

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale

Elektrische Maasssystem

im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis M. 1.—.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(13a 4)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a 4)

Verlag von **Arthur Felix** in **Leipzig.**

Die

Lehre von der Energie

historisch-kritisch entwickelt.

Nebst Beiträgen zu einer allgemeinen Energetik.

Von Dr. **Georg Helm,**

Oberlehrer an der Annenschule zu Dresden.

In gr. 8. VI, 104 Seiten. 1887. Broschirt.

Preis: 3 Mark. (5 4)

Verlag v. R. Oldenbourg, München und Leipzig.

Geschichte

der

Technologie

seit der Mitte des 18. Jahrhunderts.

Von

Karl Karmarsch.

Separat-Ausgabe der Geschichte der Wissenschaften XI. Band.

VII und 932 S. 8°. 1872. 11 M.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig**

ist erschienen:

der fünfte Jahrgang 1888

des

Kalender für Elektrotechniker.

Herausgegeben von

F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant geb. Preis 4 M., dazu Beilage brosch. 60 Pf.

Der neue Jahrgang hat abermals viele Erweiterungen erfahren, sowohl in der Physik (Magnetismus, Photometrie), als in der Elektrotechnik (Messmethode). Mehrere Tabellen sind neu berechnet und an passenden Orten Zusätze gemacht worden. In Anbetracht des stets wachsenden Materials erschien es nothwendig, diesmal einen Theil desselben abzuscheiden und in einer Beilage unterzubringen.

Nachstehende Inhaltsübersicht wird die jetzige Vertheilung des umfangreichen Materials auf Taschenbuch und Beilage veranschaulichen.

XXIV. Band. 5. Heft.

HARVARD COLLEGE
JUN 30 1888
LIBRARY.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 5. Heftes.

Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft. Von Prof. Franz Exner. (Schluss.) S. 273.
Ueber den zweiten Kirchhoff'schen Satz. Von O. Chwolson. S. 291.
Ueber die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales. Von O. Chwolson. S. 294.
Ueber den Zusammenhang von Oberflächenspannung, Oberflächendichte und oberflächlicher Wärmeentwicklung. Von K. Fuchs. S. 298.
Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Bewegungsgeschwindigkeit von Flüssigkeitswellen. Von A. Ahrendt. S. 318.
Replik auf die „Erwiderung" des Herrn J. W. Häussler. Von E. Lampe. S. 324.
Ueber die Rückwirkung der Flutbewegung auf den Mond. Von K. Fuchs. S. 328.
Ein einfacher Kohlenhalter zum Löthen und Schweissen der Metalle mittels des elektrischen Lichtbogens. Von Dr. B. Nebel. S. 330.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 7. Februar 1888. S. 334.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 21. Februar 1888. S. 335.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 6. März 1888. S. 336.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,
Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 4).

Jahrgang 1888 Nr. 12 enthält:

Rundschau. — **Correspondenz.** — **Zur Frage des Anschlusses von Blitzableitern an Gas- und Wasserleitungsrohre.** — **Neuerungen in der Form und Anordnung von Telephon-Apparaten.** Von W. E. Fein. — **Entwickelung einiger Formeln zur Betriebskostenberechnung elektrischer Beleuchtungsanlagen mit Glühlicht.** Von Ingenieur Chr. Garbe, Bremen. — **Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens.** — Die Verwendung von Dynamomaschinen im Telegraphenbetrieb. — Die Almaenna Telfonactiebolag in Stockholm. — Die Telephonie in Italien. — Was ein Telephonvermittlungsamt leisten kann. — **Literatur.** Dr. Karl Strecker, Fortschritte der Elektrotechnik. — Gustav Fock, Katalog XIII der Central stelle für Dissertationen und Programme. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachricht. Dr. v. Stephan's Ernennung zum Ehrenmitgliede des Solinger Sängerbundes. — Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung in Dresden und Barmen. — Die fahrbare elektrische Beleuchtungsvorrichtung der kgl. ungar. Staatsbahnen. — Kosten der elektrischen Beleuchtung. — Elektrische Beleuchtung von Bahnhöfen. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinen-Ausstellung, München 1888. — Anschluss der Blitzableiter an die Gas- und Wasserrohre eines Hauses. — Preisaufgabe der belgischen elektrotechnischen Gesellschaft. — Patente.

Jahrgang 1888 Nr. 13 enthält:

Rundschau. — **Wirkungsweise elektrischer Maschinen.** Von Friedrich Vogel in Braunschweig. — **Eine neue Methode zur Untersuchung arbeitender Batterien.** Von Ludwig von Orth, Assistent für Elektrotechnik an der kgl. technischen Hochschule zu Berlin. — **Bemerkungen über die Anlage von Centralstationen für elektrische Beleuchtung.** Von W. Fritsche. — **Messung elektromotorischer Kräfte an Hydro-Elementen.** Von H. Götz und A. Kurz. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Telephonie. Das Telephon in Wien. — Telegraphie. Die Einführung eines gleich dem Postwesen von der Bundesregierung der Vereinigten Staaten Amerikas gebauten, betriebenen und verwalteten Telegraphen nach europäischem, zunächst englischem Muster. — Elektrische Kraftübertragung. Elektrische Strassenbahn von Field. — Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung in München. —

HARVARD COLLEGE
JUN 30 1888
LIBRARY.

Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft.

Von

Prof. **Franz Exner.**

(Schluss.)

II. Die im vorigen Abschnitte mitgetheilten Beobachtungen haben für die Grösse A, das normale Potentialgefälle an der Erdoberfläche bei Abwesenheit alles Wasserdampfes, einen viel höheren Werth ergeben, als bisher angenommen wurde, wenngleich dieser Werth — 1300 Volt pro Meter — noch mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet ist, so ist er doch gegenwärtig der wahrscheinlichste und es erübrigt, die elektrischen Constanten der Erde auf diesen neuen Werth zu reduciren.

Bezeichnen wir die Gesammtladung der Erde mit M, ihren Radius mit R, so ist ihr Potential

$$V = \frac{M}{R}$$

und die Kraft:

$$-\frac{\delta V}{\delta n} = \frac{M}{R^2}$$

somit

$$V = -R\frac{\delta V}{\delta n}.$$

Wählen wir als Längeneinheit das Centimeter, so ist weiter

$$R = 7 \cdot 10^8, \frac{\delta V}{\delta n} = 13 \text{ und } V = -9 \cdot 10^9.$$

Dieser letztere Werth gibt die Potentialdifferenz zwischen der Erde und einem Punkte im Weltraume an, der unendlich weit von allen elektrischen Massen entfernt ist. Nennen wir das Potential dieses Punktes Null im absoluten Sinne, so liegt dieser absolute Nullpunkt bei $+ 9 \cdot 10^9$ Volt, gezählt vom Potential der Erde an.

Die Dichte der Erdladung ergibt sich aus der Formel

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta V}{\delta n}$$

und in absoluten elektrostatischen Einheiten: $\mu = -0{,}0035$.

Diese Elektricitätsmenge findet sich auf dem Quadratcentimeter der Erdoberfläche und daraus ergibt sich die Gesammtladung in den gleichen Einheiten:

$$M = -2 \cdot 10^{16}.$$

Der elektrostatische Druck k, oder die Kraft, mit welcher die Ladung eines Quadratcentimeters nach aussen getrieben wird, ist ausserordentlich klein, nämlich:

$$k = 2\pi\mu^2 = 0{,}000072 \text{ Dyn} = 7 \cdot 10^{-8} \text{ Grm.}$$

Diese Grösse dürfte schwerlich durch irgend welche Hilfsmittel nachweisbar sein.

In Bezug auf die vorstehenden Grössen wäre noch Folgendes zu bemerken: Eine negative Erdladung von der angegebenen Grössenordnung existirt unzweifelhaft, denn ihr Vorhandensein folgt mit Nothwendigkeit aus der Thatsache des normalen Potentialgefälles, und zwar ganz abgesehen von den Ursachen, die das Letztere bedingen; das Gleiche gilt von jenen Grössen, die von μ abgeleitet sind. Anders liegt die Sache in Bezug auf den Werth von V, der im Vorhergehenden mit $-9 \cdot 10^9$ angegeben wurde, denn dieser gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass unsere Annahme einer lediglich negativen Erdladung richtig sei. Wollte man dagegen, wie es z. B. früher von W. Thomson geschehen ist, nebst dieser negativen noch eine gleiche positive Ladung in den höchsten Schichten der Atmosphäre annehmen, so wird der Werth von V auch noch von der Lage dieser letzteren abhängig. Es zeigt sich aber, dass dieser Einfluss kaum die Grössenordnung unseres Werthes beeinflussen kann; denn setzen wir den Radius der Erde gleich R und den der concentrischen positiven Schichte gleich R', so wird das Potential V' der Erde nach dieser Annahme:

$$V' = -\frac{M}{R} + \frac{M}{R'}.$$

Nun ist, wie die schon mehrfach erwähnte Ballonfahrt gezeigt hat, die Luft nicht positiv, sondern, ganz unserer Hypothese gemäss, negativ elektrisch, und wenn dieser Zustand bisher auch innerhalb verhältnismässig geringer Höhen constatirt wurde, so wird man denselben doch bis zu jenen Höhen als existirend ansehen können, innerhalb welchen die Luft den gleichen physikalischen Zustand zeigt. Wenn daher jene positive Schichte wirklich existirt — und ich muss bemerken, dass ihre Existenz lediglich hypothetischer Natur und durch keinerlei Anzeichen wahrscheinlich gemacht ist — so kann sie sich nur an der äussersten Grenze unserer Atmosphäre vorfinden, also in jenen Theilen derselben, die, wegen ihrer Unerreichbarkeit, leider so oft zu Trägern räthselhafter Erscheinungen gestempelt werden. Setzen wir die Entfernung

dieser Theile vom Erdboden gleich einem Erdradius, so wird $R' = 2R$ und $V' = \frac{V}{2}$, d. h. das Potential der Erde wäre $-4{,}5 \cdot 10^9$ statt $9 \cdot 10^9$. Aber selbst wenn wir die Höhe dieser fraglichen Schichten nur zu $\frac{1}{10}$ Erdradius annehmen, wird das Potential der Erde immer noch $-0{,}8 \cdot 10^9$ Volt betragen. Man sieht daraus, dass dieser Werth seiner Grössenordnung nach ziemlich unabhängig von den gemachten Voraussetzungen ist.

Wir wollen nun noch den Verlauf der elektrischen Niveauflächen um die Erde untersuchen, speciell die Abhängigkeit derselben vom Wasserdampfe der Luft; dazu ist allerdings die Kenntnis der geographischen Vertheilung des letzteren erforderlich und diese ist direct nicht bekannt. Wir können dieselbe aber mit für den vorliegenden Zweck vollkommen genügender Genauigkeit aus der Temperaturvertheilung an der Erdoberfläche ermitteln, wobei wir als durchschnittliche relative Feuchtigkeit 70 % der Sättigung annehmen wollen. Es wird freilich in Wirklichkeit niemals gleichzeitig auf der ganzen Erdoberfläche dieser Sättigungsgrad herrschen, die nachfolgenden Betrachtungen sollen aber auch nur ein schematisches Bild des elektrischen Feldes in der Nähe der Erde liefern, das sich, soweit das Beobachtungsmaterial reicht, der Wirklichkeit möglichst nähern soll.

Die Temperaturverhältnisse der Erdoberfläche sind ziemlich genau bekannt und ich halte mich diesbezüglich an die Zahlen, welche Spitaler[1]) in seiner Abhandlung über diesen Gegenstand mittheilt, dabei wollen wir nur die besser erforschte nördliche Halbkugel der Erde in Betracht ziehen, für die südliche werden die Verhältnisse im Grossen und Ganzen natürlich dieselben sein.

In der Tabelle VI (S. 276) sind unter φ die geographischen Breiten von 10 zu 10 Graden, unter T die einem jeden Parallel im Mittel zukommende Temperatur und unter p die entsprechenden Dunstdrucke angegeben, wobei, wie schon erwähnt, eine Sättigung von 70 % vorausgesetzt ist.

Diese Tabelle enthält die vorgenannten Daten für den Januar und Juli, sowie das Jahresmittel; aus demselben können wir uns zunächst die Grösse des normalen Potentialgefälles an der Erdoberfläche — die Grösse B der früheren Formeln — für alle Breitengrade ableiten nach der bekannten Gleichung 1

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_0 = B = \frac{A}{1 + kp_0}$$

1) Wiener Akad. Denkschriften Bd. 51 (1886).

in welcher wir die Constanten A und k früher bestimmt und erhalten haben:

$$A = 1300 \text{ Volt}, \quad k = 1{,}31.$$

Tabelle VI.

	Januar		Juli		Jahresmittel	
φ	T	p	T	p	T	p
0	+ 26,2	17,6	+ 25,4	16,8	+ 25,9	17,3
10	+ 25,7	17,0	+ 26,7	18,2	+ 26,4	17,9
20	+ 21,7	13,4	+ 28,1	19,7	+ 25,6	17,1
30	+ 13,9	8,3	+ 27,3	19,0	+ 20,3	12,4
40	+ 3,9	4,3	+ 23,8	15,2	+ 14,0	8,4
50	− 7,2	1,8	+ 18,1	10,8	+ 5,6	4,7
60	− 15,9	0,9	+ 14,1	8,4	− 0,8	3,0
70	− 25,4	0,5	+ 7,2	5,3	− 9,9	1,5
80	− 32,0	0,3	+ 2,6	3,9	− 16,5	0,9
90	− 36,0	0,2	+ 2,0	3,7	− 20,0	0,6

In der folgenden Tabelle VII finden sich für alle Breiten die so gerechneten Werthe von B für den Januar, den Juli und im Jahresmittel angegeben.

Tabelle VII.

	Januar		Juli		Jahresmittel	
φ	B	h	B	h	B	h
0	54	18,5	56	4,0	55	13,1
10	56	17,8	52	4,3	53	13,6
20	70	14,3	48	4,7	56	12,9
30	109	9,2	49	4,6	75	9,6
40	182	5,4	62	3,6	108	6,7
50	393	2,5	86	2,5	183	3,9
60	591	1,7	108	2,1	265	2,7
70	812	1,2	164	1,3	448	1,6
80	928	1,1	213	1,0	591	1,2
90	1000	1,0	224	1,0	722	1,0

Man kann aus dem Werthe von B ohne weiteres die Gestalt der der Erde zunächst liegenden Niveauflächen construiren. Die Werthe von B geben das Potential in 1 m Höhe über der Erde; das würde z. B. im Januar am Pol 1000 Volt sein, am Aequator findet sich das gleiche Potential aber erst in grösserer Höhe, indem es dort für das

Meter nur 54 Volt beträgt. Da das Potentialgefälle innerhalb kleiner Strecken aber als linear angesehen werden kann, so gibt die Division der beiden Werthe von B unmittelbar in Metern die Höhe h, in welcher am Aequator das Potential gleichfalls den Werth 1000, wie am Pol, hat. Verfährt man für die übrigen Breiten auf gleiche Weise, so bekommt man alle Höhen h längs eines Meridianes, in welchen das Potential denselben Werth hat, wie am Pol in 1 m Höhe. Auf diese Weise sind die unter h angegebenen Zahlen der Tabelle VII ermittelt; sie sind in Metern ausgedrückt und geben den jeweiligen Abstand jener Niveaufläche von der Erde an, die am Pol in 1 m Höhe passirt. Wie man sieht, passirt dieselbe am Aequator je nach der Jahreszeit in 4—18, im Jahresmittel in 13 m Höhe.

Diese Verhältnisse sind in Fig. 3 graphisch dargestellt, die Curve a bezieht sich auf den Juli, b auf den Januar und c auf das Jahresmittel.

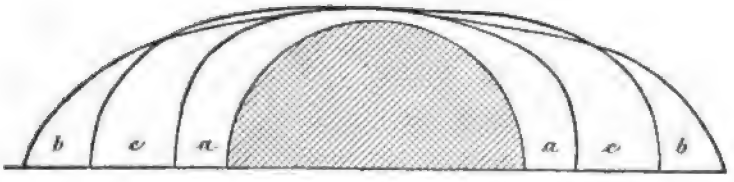


Fig. 3.

Der Maassstab dieser drei Niveauflächen ist nicht der gleiche, indem sie alle durch denselben Punkt am Pol gelegt wurden, ihre Gestalt wird aber dadurch nicht alterirt.

Es ist auffallend, wie dicht gedrängt selbst im Jahresmittel in den Polargegenden die Niveauflächen zunächst der Erde im Vergleich mit jenen am Aequator sind und wie plötzlich circa vom 60. Breitegrad an abwärts die Ausbauchung derselben sich zeigt; ebenso auffallend ist die verhältnismässig geringe Aenderung derselben innerhalb der heissen Zone, wobei jedoch auf der nördlichen Halbkugel noch der Umstand mitspielt, dass der Wärmeäquator in ca. 10° n. B. liegt.

Im Allgemeinen ist das Potentialgefälle in den Polargegenden 13mal, im Sommer 4mal, im Winter sogar 18mal so gross als am Aequator; die elektrostatische Kraft, d. h. die Kraft, mit welcher die Ladung der Erde die Oberfläche der letzteren zu verlassen strebt, ist aber dem Quadrate dieser Zahlen proportional. Diese Kraft ist demnach in den Polargegenden 16—330mal, im Jahresmittel aber 170mal so gross als in der heissen Zone. Man wird angesichts dieser Zahlen und des Verlaufes der Niveauflächen in Fig. 3 unmittelbar an die vehementen elektrischen Vorgänge in den Polargegenden, speciell an das Nordlicht erinnert; wenn es auch gewagt wäre, die Ursache des letzteren direct

in einer Ausströmung der Elektricität zu suchen, so ist doch soviel gewiss, dass die in den Polargegenden so intensive elektrostatische Kraft auf alle in der Atmosphäre aus welcher Ursache immer vorgehenden elektrischen Processe gerade in jenen Gegenden von besonderem Einflusse sein muss.

Vergleicht man die Niveauflächen *a* und *b* (Fig. 3), die sich auf den Januar, resp. Juli, beziehen, so würde man daraus folgern, dass, wenn obiger Einfluss existirt, derselbe im Winter bedeutender sein muss als im Sommer. Nun zeigt das Nordlicht, wie aus der von Fritz gegebenen Zusammenstellung aller bisherigen Beobachtungen folgt, in der That eine sehr ausgeprägte jährliche Periode, indem auf die Wintermonate mehrere hundert, auf Juni und Juli dagegen kaum einzelne, mitunter gar keine Nordlichter entfallen. Da diese Periode jedoch nur aus mit dem Auge angestellten Beobachtungen folgt, im Sommer aber die langen und hellen Tage das Sichtbarwerden der Nordlichter offenbar verhindern, so wird man denselben keinen Werth, jedenfalls nicht in dem grossen scheinbaren Betrage beilegen können. Da Nordlichter immer mit Störungen der magnetischen Elemente verbunden sind, so würden die letzteren hier einen viel verlässlicheren Aufschluss geben können, allein die bisher vorliegenden Messungen, namentlich aus höheren Breiten, sind so wenig umfassend, dass sich daraus kein Schluss auf die Häufigkeit der Störungen ziehen lässt. Das einzige, was mit Sicherheit daraus hervorgeht, ist, dass die Intensität der Störungen in höheren Breiten im Winter eine viel beträchtlichere ist als im Sommer; dies würde allerdings sehr für einen Zusammenhang zwischen Nordlicht und elektrostatischer Kraft sprechen.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Niveauflächen der Erde in grösseren Höhen gestalten. Die in Fig. 3 gezeichneten gelten für die unmittelbare Oberfläche der Erde, in je grössere Höhen wir gelangen, desto mehr muss offenbar der Einfluss des Wasserdampfes verschwinden und jene Niveauflächen, die über allem Wasserdampf liegen, werden bald in Formen übergehen, die von der Kugelgestalt unmerklich abweichen. Um dieses Verhalten genauer zu verfolgen, benützen wir Gl. 4, die uns das Potentialgefälle in einer beliebigen Höhe als Function des an der Erdoberfläche gleichzeitig herrschenden darstellt. Es ist

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_n = \frac{A-B}{2{,}68}(n - 0{,}123\,n^2 + 0{,}005\,n^3) + B \qquad (4$$

und daraus erhält man das Potential V_n in der Höhe n:

$$V_n = \frac{A-B}{2{,}68}(0{,}5\,n^2 - 0{,}041\,n^3 + 0{,}001\,n^4) + B \cdot n$$

Es ist jedoch nicht zu vergessen, dass die Längeneinheit für die Potentialgefälle A und B in dieser Formel 1 m, für die Höhe n aber 1000 m ist; bei Formel 4 war es gleichgiltig, wie früher gezeigt wurde, welche Einheit wir für n wählen, das ist aber jetzt nicht mehr der Fall, wo die n sämmtlich in einer um 1 höheren Potenz erscheinen. Wenn wir daher zur Vermeidung grosser Zahlen als Einheit der Höhen 1000 m beibehalten wollen, so müssen wir noch die rechte Seite der vorstehenden Gleichung mit 1000 multipliciren und erhalten

$$V_n = 1000\frac{A-B}{2{,}68}(0{,}5\,n^3 - 0{,}041\,n^3 + 0{,}001\,n^4) + 1000 \cdot B \cdot n. \quad (5$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir V in Volt ausgedrückt, wenn wir für A, B und n die bisherigen Grössen einsetzen. In der folgenden Tabelle VIII sind auf diese Weise die Potentiale für einige Höhen am Aequator und am Pol gerechnet, man darf dabei aber nicht die Grenzen, innerhalb welcher die Formel für die Abnahme des Wasserdampfes Giltigkeit hat, überschreiten; am Aequator erstreckt sich letztere wohl bis zu 7000 m, am Pol ist sie dagegen schon bei 4000 m erreicht. Ich habe dabei jene geographische Vertheilung des Wasserdampfes vorausgesetzt, wie sie der mittleren Jahrestemperatur der nördlichen Halbkugel entspricht, wo also die der Erde zunächst liegenden Niveauflächen die Gestalt der Curven cc in Fig. 3 haben. Die Grösse B ist demnach (Tabelle VII) 55 für den Aequator und 722 für den Pol.

Tabelle VIII.

	Aequator	Pol
n	V_n	V_n
0,001	55	722
1	268000	821000
2	898000	1811000
3	1770000	2918000
4	2864000	—
7	6509000	—

Durch graphische Interpolation erhält man aus diesen Zahlen leicht die Höhen h_a und h_p, die am Aequator resp. Pol ein und demselben Potential entsprechen; so ist z. B.;

V	h_a	h_p	$\frac{h_a}{h_p}$
722	0,013	0,001	13,0
2860000	4,0	2,9	1,35

Die beiden den vorstehenden Potentialen entsprechenden Niveauflächen sind in Fig. 4 gezeichnet: cc ist jene, die den Pol in 1 m Höhe

passirt, während dd dies in einer Distanz von 2,9 km thut. Diesen Distanzen ist in Fig. 4 natürlich ein willkürlicher Maassstab zu Grunde gelegt, da es ja nur auf die Form der einzelnen Curven ankommt. Man sieht aus der Zeichnung, sowie aus dem Werthe $\frac{h_a}{h_p}$, dass schon in einer Höhe von 4000 m über dem Aequator die Niveauflächen sich merklich der Kugelgestalt nähern.

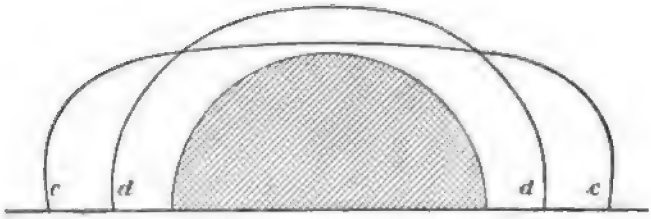


Fig. 4.

III. Der supponirte Zusammenhang zwischen dem normalen Potentialgefälle an der Erdoberfläche und dem Wassergehalte der Luft ist durch das Voranstehende, wie ich glaube, zum mindesten sehr wahrscheinlich gemacht; einen deutlichen Einblick in denselben wird man aber zumeist von Messungen des Potentialgefälles in höheren Luftschichten erhalten, in erster Linie also durch Beobachtungen im Ballon. Da diese aber nur in seltenen Fällen ausführbar sind, so wäre irgend eine andere Methode zur Erreichung dieses Zweckes sehr erwünscht. Von Beobachtungen auf hohen Bergspitzen muss, wenigstens in dieser Beziehung, Abstand genommen werden, weil für das Potentialgefälle auf denselben nicht allein die umgebende Atmosphäre, sondern in erster Linie die geometrische Configuration massgebend ist. Die Niveauflächen, welche in der Ebene in gewissen Abständen übereinander verlaufen, liegen über der Spitze eines Berges selbstverständlich bei weitem dichter gedrängt, d. h. das Potentialgefälle erscheint dort an und für sich schon sehr vergrössert. Eine Berechnung dieses Einflusses ist aber ganz ausgeschlossen, da selbst kleine Abweichungen des Berges von der der Rechnung zu Grunde gelegten Form, wenn sie sich in der Nähe des Beobachtungsortes befinden, bedeutende Störungen erzeugen.

Es muss daher das Potentialgefälle auf der Spitze eines Berges immer höher sein als das gleichzeitig in der benachbarten Ebene herrschende, erstens weil die über dem Beobachtungsorte befindliche Menge Wasserdampfes geringer ist und zweitens wegen der Gestalt des Berges; es muss also das Potentialgefälle daselbst auch höher sein, als es unter gleichen Umständen an einem ebenso hoch, aber frei in der Luft gelegenen Punkte wäre.

Ich habe eine derartige Messung am 29. August 1886 auf der Spitze des 1780 m hohen Schafberges bei schönstem Wetter ausgeführt; es ergab sich ein sehr constanter Werth von 2000 Volt pro Meter, während gleichzeitig in der Ebene der Werth 100 beobachtet wurde. Nach Curve II (Fig. 2) würde einem freien Punkte gleicher Höhe der Werth 730 Volt zukommen; es ist also in der That die Wirkung der geometrischen Gestalt des Berges eine sehr bedeutende.

Es fragt sich nun, ob es nicht durch passende Wahl des Beobachtungsortes gelingt, diese Wirkung zu beseitigen; ich glaube, man ist von derselben frei, wenn man nicht auf der Spitze eines Berges, sondern in der Mitte eines Hochplateaus beobachtet. Ueber einem solchen liegen nämlich die Niveauflächen nur an den Rändern, nicht aber in der Mitte dichter gedrängt, als in der Ebene, vorausgesetzt, dass die Höhe derselben ein gewisses Verhältnis zu dessen Ausdehnung nicht überschreitet.

Ich habe auf experimentelle Weise die Dimensionen bestimmt, die für eine parallelopipedische oder flach cylindrische Erhöhung einer ebenen Fläche noch zulässig sind, indem ich die dem Potentialgefälle proportionale Dichte mittels Probescheibchen und Elektrometer mass. Es wurde zu diesem Zwecke eine quadratische leitende Platte von 70 cm Seitenlänge isolirt geladen und vorerst das Verhältnis der Dichten im Mittelpunkte und in einem markirten Randpunkte bestimmt, der ca. 10 cm vom Rande entfernt lag. Dieses Verhältnis betrug 1,38; dann wurde auf den Mittelpunkt eine kreisrunde Metallplatte von 10 cm Durchmesser und 0,8 cm Höhe gelegt und dasselbe Verhältnis zu 1,39 bestimmt, welcher Werth für eine Metallplattenschichte von 2,0 cm Höhe 1,35 wurde. Diese Differenzen sind immer noch nicht von Belang und man kann sagen, dass auf einem kreisrunden Plateau von fünffachem Durchmesser der Höhe in der Mitte dasselbe Potentialgefälle herrscht wie in der Ebene. Das gilt aber nur für die Mitte; wurde anstatt des Centrums der Kreisplatte mit dem Probescheibchen ein Punkt in der Mitte eines Radius berührt, so änderte sich dadurch das gesuchte Verhältnis schon um 6 %.

An Stelle der Kreisplatten wurde auch ein leitender parallelopipedischer Körper von 21 cm Länge, 12 cm Breite und 6 cm Höhe verwendet; das Verhältnis der Dichten im Mittelpunkte seiner Oberfläche und im Vergleichspunkt ergab sich zu 1,37, also wieder der ursprüngliche Werth. Auch hier konnte man mit dem Probescheibchen bis in die Hälfte einer Diagonale der Oberfläche gehen, bevor eine Abweichung um 5 % eintrat. Man sieht aus diesen Zahlen, dass man sehr wohl natürliche Plateaux, wenn sie isolirt liegen, zur Bestimmung des Einflusses des Wasserdampfes verwenden kann, indem man gleichzeitig auf ihrer Höhe und in der Ebene Messungen anstellt.

Was die Berechnung solcher Messungen anbelangt, so wäre noch Folgendes zu bemerken: Ist das Plateau nur wenig ausgedehnt, etwa einige Kilometer, so dass man annehmen kann, die Hauptmasse des Wasserdampfes darüber stamme nicht von dem Plateau selber, sondern habe die gleiche Provenienz wie der Wasserdampf über der Ebene, so geschieht die Berechnung wie für eine Messung im Luftballon, d. h. nach der Formel 4. Ist das Plateau aber sehr ausgedehnt, so dass der Wasserdampf darüber aller vom Plateau selbst herrührt, so muss die Berechnung nach Formel 1 geschehen und die gleichzeitige Beobachtung in der Ebene wird überflüssig; die Ebene und das Plateau verhalten sich im letzteren Falle nicht wie zwei übereinanderliegende Punkte ein und derselben Luftmasse, sondern wie ein und derselbe Ort sich zu verschiedenen Jahreszeiten verhält. Deshalb ist auch eigentlich nur die Messung auf kleinem Plateau, die Ballonfahrten ersetzt und einen directeren Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und Wasserdampf erkennen liesse, von Wichtigkeit, und ich hoffe bald Gelegenheit zu haben, auch derartige Beobachtungen ausführen zu können.

Eine Untersuchung, die sich auf dem Gipfel eines hohen Berges ausführen liesse, wäre auch die folgende: Es ist bekannt, dass der tägliche Gang der Luftelektricität eine ziemlich ausgeprägte Periode zeigt, die ihren Ursprung wohl in der wechselnden Constitution der Wasserdampfatmosphäre in der Nähe des Erdbodens hat. Befindet man sich aber über dem grösseren Theile des Wasserdampfes, was in einer Höhe von 2—3000 m schon erreicht ist, so ist zu erwarten, dass die Periode an Intensität sehr verliert, wenn nicht ganz verschwindet. Es käme dabei natürlich gar nicht auf den absoluten Werth des Potentialgefälles an, sondern nur auf dessen tägliche Variation; die Natur des Beobachtungsortes ist daher gleichgiltig, nur muss derselbe immer der gleiche bleiben. Auch derartige Beobachtungen beabsichtige ich auszuführen.

Ich theile nun noch einige Beobachtungen und Messungen mit, die ich im Laufe der letzten Jahre anzustellen Gelegenheit hatte und welche sich zwar nicht auf den normalen elektrischen Zustand der Atmosphäre beziehen, doch aber mit dem Gegenstand der vorliegenden Abhandlung in innigem Zusammenhange stehen.

Wenn die Erdoberfläche eine negative Ladung besitzt, so müssen alle leitenden Theilchen, die sich von derselben ablösen, wie: Wasserstaub oder trockener Staub, gleichfalls negativ elektrisch sein. Das Zutreffen dieser Folgerung für trockenen Staub hat man schon lange erkannt, so z. B. Siemens bei seiner Beobachtung in der Nähe der Pyramiden in Aegypten; ebenso fand Dellmann bei seinen durch

Jahre fortgesetzten Messungen im Freien, dass Staub in der Nähe des Beobachtungsortes sich immer wie eine negativ elektrische Masse verhalte. Man hat diese Elektrisirung des Staubes gewöhnlich der Reibung zugeschrieben, ich glaube aber, dass letztere dabei gar keine wesentliche Rolle spielt, sondern dass der Staub, wie der Wasserdampf, beim Verlassen der Erde negative Elektricität mitführt. In dieser Meinung wurde ich nur bestärkt durch Beobachtungen an Wasserstaub, wie er durch eine mässige Brandung des Meeres an flacher Küste erzeugt wird.

Ich beobachtete am Lido in Venedig, also auf einer ganz flachen und freien Sandbank, längs welcher die Wellen ganz allmählig auflaufen, und fand, dass bei glatter See das Potentialgefälle dasselbe bleibt, ob man den Stock mit der Flamme in den unmittelbaren Bereich der flachen Wellen steckt oder hundert Meter landeinwärts; ist die See aber etwas bewegt, so dass durch das Ueberstürzen der Wellen (das aber nicht am Beobachtungsorte selbst, sondern ca. 50 m vom Ufer vor sich ging) viel Wasserstaub in die Luft kommt, so findet man das Potentialgefälle in unmittelbarer Nähe des Wassers kleiner als landeinwärts, ein Beweis, dass dieser Wasserstaub negativ elektrisch ist.

So fand ich z. B. an einem klaren Tag und bei mässigem Wellengang das Potentialgefälle hundert Meter vom Ufer gleich 232 Volt, am Ufer selbst dagegen nur 160 Volt. An einem anderen Tage wurde dagegen bei ganz glatter See an beiden Orten genau derselbe Werth, 138 Volt, erhalten. Ich hatte wiederholt Gelegenheit, diesen Einfluss des Wasserstaubes zu beobachten, und derselbe erscheint mir namentlich aus dem Grunde von Interesse, weil man hier nicht wohl von einer Elektrisirung desselben durch Reibung, am Wasser selbst, sprechen kann; es scheint mir das vielmehr ein directer Beweis für die Convection der Elektricität von der Erdoberfläche aus zu sein.

Ganz wie die Wassertheilchen des Meeres verhält sich unserer Annahme nach auch der Wasserdampf; eine Wolke, die sich aus demselben bildet, muss daher negativ elektrisch geladen sein. Dass dies in den allermeisten Fällen der Fall ist, habe ich seinerzeit schon erörtert, auch findet man, wenigstens soweit meine Beobachtungen reichen, das herabfallende Regenwasser fast immer negativ. Eine Wolke kann aber in doppelter Weise auf das Potentialgefälle des Beobachtungsortes wirken: erstens durch ihre eigene Ladung, zweitens durch die in ihr auftretende Induction. Die erste Wirkung lässt sie negativ erscheinen, die zweite aber positiv. Es kann nun vorkommen, dass eine Wolke durch theilweises Verdunsten oder durch Regen ihre negative Ladung verliert, eine solche muss dann durch Induction wie positiv geladen erscheinen.

Bei Aufstellung von Gewittertheorien werden Wolken mitunter wie leitende Massen behandelt; obwohl diese Ansicht nicht plausibel ist, da die Wolken aus discreten leitenden Theilchen bestehen, also ganz die Constitution der Dielektrica haben, so habe ich doch noch diesbezüglich Beobachtungen angestellt. Wenn in einem Gebirgsthale dichte Stratusschichten ringsum auf den Bergen auflagern und fast bis an die Erde reichen, so müsste, wenn diese Schichten Leiter im gewöhnlichen Sinne wären, offenbar das Potentialgefälle in dem so geschlossenen Raume auf Null sinken; das trifft aber nur in den seltensten Fällen zu. In der Regel behält es einen beträchtlichen positiven Werth (negative habe ich niemals beobachtet) oft, namentlich nach längerem Regenwetter, ist es ganz so wie bei schönem Wetter, die Wolkenschichte wirkt also gar nicht. Es folgt daraus, dass man Wolken durchaus nicht als zusammenhängende Massen betrachten darf.

Ich habe früher von der Induction gesprochen, die in jeder der Erde sich nähernden Wolke auftreten muss und dieselbe positiver erscheinen lässt, als sie wirklich ist. Ich glaube, dass auf diese Induction auch die öfters beobachtete positive Natur des Nebels zurückzuführen ist. Bei Besprechung der Methode von Mascart wurde schon eines Versuches gedacht, der die negative Elektrisirung der Nebeltheilchen zeigte; die bei ruhigem Nebel ausgeführten Messungen (Tabelle I) lassen auch keinen besonderen Effect derselben erkennen, dagegen verhält sich die Sache ganz anders bei Beobachtung der Herbstnebel, wie sie am frühen Morgen klaren Tagen vorauszugehen pflegen. Bei drei Beobachtungsreihen, die ich an solchen auszuführen Gelegenheit hatte, glaube ich die deutliche Wahrnehmung gemacht zu haben, dass nicht so sehr die Anwesenheit des Nebels als vielmehr dessen Steigen und Sinken über dem Beobachtungsorte von Einfluss ist. Solange der Nebel festliegt, zeigt das Potentialgefälle einen constanten Werth, dieser steigt aber plötzlich, sowie das Sinken des Nebels beginnt. Ich habe diese Erscheinung in mehreren Fällen beobachtet, und wenn sie sich als die Regel herausstellt, so kann man sie wohl der in der bewegten Nebelmasse auftretenden Induction zuschreiben.

Es wurde früher erwähnt, dass das Regenwasser immer negativ ist; eine Ausnahme davon habe ich nur im Winter gefunden, wenn Regen und Schnee abwechselnd fällt. Letzterer scheint immer positiv zu sein, obwohl ich nur wenige Beobachtungen darüber anzustellen Gelegenheit hatte, und seine positive Ladung ist wohl auf die Reibung beim Herabfallen zurückzuführen. Denselben Grund möchte ich der positiven Ladung des Regenwassers im Winter zuschreiben, das in grösseren Höhen jedenfalls als Schnee existirt hat. Eine systematische Untersuchung der Niederschläge nach dieser Richtung wäre wohl sehr

wünschenswerth, und an einem dazu eingerichteten Institute auch leicht ausführbar.

Beobachtungen über Gewitter sollten womöglich in der Ebene angestellt werden, wo ein freier Horizont die Beurtheilung der in der Atmosphäre gleichzeitig vor sich gehenden Veränderungen in weitem Umkreise gestattet. Ich habe leider nur im Gebirge zu beobachten Gelegenheit gehabt, und fand im allgemeinen den Zeichenwechsel des Potentialgefälles beim Heranziehen des Gewitters bestätigt. Sehr auffällig war die Wirkung der Blitze auf das Elektroskop, indem dieselben, selbst wenn sie sich in einer Entfernung von ca. 20 km entluden, ein plötzliches heftiges und ganz gleichzeitiges Ausschlagen der Plättchen zur Folge hatten. Es beschränkte sich aber diese Erscheinung ausschliesslich auf Zickzackblitze, während Flächenblitze auch in nächster Nähe nicht die geringste Wirkung zeigten. Dieser Unterschied ist sehr auffallend; er lässt sich vielleicht darauf zurückführen, dass die ersteren zwischen Wolken und Erde übergingen, letztere dagegen nur zwischen Wolken. Im ersteren Falle muss dem Blitzschlage eine Induction auf der Erde vorangegangen sein, deren Ausgleichung im Momente des Blitzes ihre Wirkung in der Erde selbst bis zum Beobachtungsorte erstreckte.

Vor vielen Jahren habe ich von der Spitze des Schafberges aus bei Tage die Erscheinung beobachtet, dass aus einer etwas unterhalb stehenden Gewitterwolke heftige Blitze nach oben in den blauen Himmel fuhren; wie ich nun einer Untersuchung Reimann's [1]) über Gewittererscheinungen entnehme, scheint diese Bewegung der Blitze nach aufwärts, namentlich nach Beobachtungen auf der Schneekoppe, durchaus nichts Seltenes, ja mit Rücksicht auf die Schwierigkeit ihrer Beobachtung sogar die Regel zu sein. Diese an und für sich auffallende Erscheinung ist aber die nothwendige Consequenz der Kraft, welche durch das elektrische Feld der Erde erzeugt wird; denn ist die Gewitterwolke negativ geladen, so muss das Potentialgefälle nach oben im allgemeinen einen grösseren Werth haben als nach unten gegen die Erde, und Blitze nach oben müssten, gleichgute Leitungsbahnen vorausgesetzt, häufiger auftreten als in entgegengesetzter Richtung. Jedenfalls dürfte diese Erscheinung durch jede andere Hypothese als die hier zu Grunde gelegte nur sehr schwer zu erklären sein.

Ich glaube durch die vorstehenden Untersuchungen den fraglichen Zusammenhang zwischen atmosphärischer Elektricität und Wassergehalt der Luft soweit klar gestellt zu haben, als dies durch die Beobachtungen eines Einzelnen und in verhältnismässig kurzer Zeit möglich

1) Meteorologische Zeitschrift Mai 1887.

ist; aber einen wirklichen Einblick in die elektrischen Verhältnisse unseres Planeten wird man erst durch systematische über die ganze Erdoberfläche vertheilte Beobachtungsstationen erhalten, wie dies seinerzeit mit Rücksicht auf das magnetische Verhalten der Erde der Fall war, und unter der Voraussetzung, dass diese Stationen nicht, wie bisher üblich, willkürliche Grössen messen, sondern jene Grösse, auf die es hier einzig und allein ankommt: das normale Potentialgefälle.

Phys. Cab. Univ. Wien.

Bericht über die von E. Drory ausgeführten Beobachtungen der atmosphärischen Elektricität in der heissen Zone.

Herr E. Drory hat gelegentlich einer Reise um die Welt an verschiedenen Punkten der heissen Zone Messungen des normalen Potentialgefälles ausgeführt; ich erlaube mir die Resultate derselben in seinem Namen zu publiciren und zwar in directem Anschlusse an vorstehende Abhandlung, auf deren Inhalt sie ja unmittelbar Bezug haben. Dabei kann ich nicht umhin, Herrn E. Drory sowohl für die Mühe, welche er auf diese Beobachtungen verwendete, als auch für die Liebenswürdigkeit, mit welcher er mir die Resultate derselben zur Verfügung gestellt, hiermit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Sind die Beobachtungen auch infolge ungünstiger Witterungsverhältnisse nicht sehr zahlreich, so sind sie doch die ersten und einzigen aus jenen Gebieten der Erde und als solche für die Theorie der Luftelektricität von fundamentaler Bedeutung.

Die Beobachtungen sollten eigentlich nur ein qualitatives Resultat anstreben, nämlich die Frage zur Entscheidung bringen, ob das normale Potentialgefälle in allen Breiten sein positives Vorzeichen behält oder, wie einige Theorien fordern, in der Nähe des Aequators ins Negative übergeht. Es wurde aber nicht nur diese Frage vollkommen gelöst, sondern auch in quantitativer Beziehung eine schöne Uebereinstimmung mit der hier vertretenen Theorie erzielt.

Die Messungen wurden sämmtlich mit den schon öfters erwähnten transportablen Elektroskopen ausgeführt, welche sich auf der ganzen Reise zur vollen Zufriedenheit bewährt haben. Leider konnten nicht gleichzeitig mit den elektrischen Messungen auch solche des jeweiligen Dunstdruckes gemacht werden; für die Beobachtungen an normalen schönen Tagen wurde derselbe daher unter Berücksichtigung der Beobachtungszeit aus den mehrjährigen Aufzeichnungen der betreffenden

Stationen ermittelt. Man kann schon aus diesem Grunde eine sehr genaue Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung nicht erwarten, eine solche ist aber bei vereinzelten Beobachtungen überhaupt ausgeschlossen und muss man sich diesbezüglich auf ein Uebereinstimmen oder Nichtübereinstimmen im grossen und ganzen beschränken.

In der folgenden Tabelle sind die einzelnen Beobachtungen angeführt; wenn sich in der Colonne „Bemerkung" nichts verzeichnet findet, so besagt dies, dass die Messung unter ganz normalen Umständen stattgefunden hat, soweit sich dies nach dem Augenscheine beurtheilen lässt.

Ort der Beobachtung	Jahr	Tag	Stunde	Temp.	Abs. Feuchtigkeit	$\frac{\delta V}{\delta n}$	Bemerkung
Rand der Wüste zwischen den Pyramiden v. Saggarah u. Gizeh	1886	25. XII.	3 *p*	+ 18,5	—	28	
Suez	„	29. XII.	3 *p*	+ 19,5	8,3	+ 116	
„	„	„	„	„	„	+ 96	
Colombo	1887	16. I.	10½ *a*	+ 31,5	19,5	+ 85	
„	„	23. I.	12	+ 29,5	„	+ 106	
„	„	26. I.	9 *a*	+ 28,5	„	+ 135	
„	„	„	9¼ *a*	„	„	+ 218	
Penang	„	9. II.	8 *a*	+ 31,0	22	+ 66	
„	„	„	10 *a*	+ 32,0	„	+ 58	
Albany	„	7. III.	12½ *p*	+ 26,0	11,7	+ 73	
Adelaide	„	11. III.	12	+ 27,0	8,0	+ 33	Wind und Staub
Sydney	„	17. III.	2½ *p*	+ 28,0	13,8	+ 63	
Christchurch	„	1. IV.	5h 30 *p*	+ 17,0	8,8	+ 45	bis 5 *p* war der Himmel ganz bedeckt.
55° 29′ S. B. 98° 29′ W. v. G. auf See	„	18. IV.	12	+ 11,0	4 — 4,5	< 165	

Zu diesen Beobachtungen wäre nur noch Folgendes zu bemerken: Sie geben, wie ein Blick auf die Tabelle zeigt, alle mit Ausnahme der ersten ein positives Potentialgefälle; dass am Rande der Wüste ein negatives beobachtet wurde, steht ganz in Uebereinstimmung mit der am gleichen Orte, wenn auch nur qualitativ ausgeführten Messung von Siemens und beweist, dass die Luft dort, anscheinend rein und klar, doch mit Wüstenstaub geschwängert ist, welch letzterer negative Elek-

tricität durch Convection von der Erde mit sich führt. In Suez, Penang, Albany, Sydney, sowie bei der Beobachtung auf See waren die Verhältnisse ganz normale; bei letzterer Messung wurde die Flamme an einem bestimmten Punkte am Bug des Steamers „Doric" aufgestellt, und später, im Hafen von Rio, die Reduction dieser Messung auf die Ebene ausgeführt; leider war dabei der Himmel bedeckt, so dass letztere Beobachtung ihrem absoluten Werthe nach nicht verwendbar ist, wenngleich sie ihren Zweck als Reduction selbstverständlich erfüllte.

Von den Messungen in Colombo sind die an den beiden ersten Tagen ausgeführten auch normal, dagegen scheint der 26. I., obwohl ein schöner Tag, in elektrischer Beziehung nicht normal gewesen zu sein; dafür spricht nicht nur der absolute Werth, der beobachtet wurde, als namentlich die ausserordentliche Variation desselben im Laufe einer Viertelstunde. Aehnliches kommt an normalen Tagen nicht vor und wurde auch weder bei der Doppelbeobachtung in Suez, noch bei der in Penang beobachtet.

Die Messungen von Adelaide in Südaustralien und von Christchurch in Neuseeland sind, wenigstens ihrem absoluten Werthe nach leider nicht als normale zu betrachten, die erstere, weil der Beobachtungsort bei ziemlich starkem Winde vielem Staube ausgesetzt war — daher auch die Kleinheit des Potentialgefälles — und die letztere, weil der Himmel bis 5 Uhr nachmittags vollkommen bedeckt war und sich erst eine halbe Stunde vor der Beobachtung ausheiterte.

Für eine Vergleichung in quantitativer Beziehung verbleiben somit neun Messungen von folgenden Orten: Suez, Colombo, Penang, Albany, Sydney und auf der Höhe des Cap Horn im stillen Ocean. In der folgenden Fig. *A* ist die früher aus den Wiener Beobachtungen be-

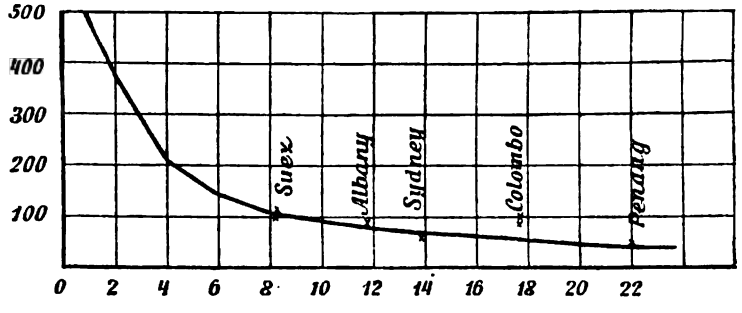


Fig. A.

rechnete Curve gezeichnet, die die Abnahme des Potentialgefälles mit zunehmendem Dunstdrucke darstellt und die, soweit sie die Wiener Beobachtungen umfasst, schon in Fig. 1 wiedergegeben wurde.

In Fig. *A* sind nun die Messungen von vorstehenden Orten eingetragen, und man wird zugeben müssen, dass zwischen Rechnung und Beobachtung nicht nur in qualitativer, sondern auch in quantitativer Beziehung eine sehr befriedigende Uebereinstimmung herrscht, namentlich wenn man bedenkt, dass man es hier nicht mit Mittelwerthen, sondern mit den Resultaten einzelner Messungen zu thun hat. Eine bemerkenswerthe Differenz zeigen nur die Werthe von Colombo, und es muss diesbezüglich erwähnt werden, dass nach den Aussagen der Einwohner während der Zeit der Beobachtungen und schon vorher eine ganz aussergewöhnliche Trockenheit der Luft herrschte, so dass der aus den früheren Jahren entnommene Werth des Dunstdruckes offenbar ein viel höherer ist, als der wirkliche war; dadurch würde das ungewöhnlich hohe Potentialgefälle seine Erklärung finden.

Von besonderem Interesse ist auch die auf der Höhe des Cap Horn im stillen Ocean ausgeführte Messung; sie zeigt gegen die früheren ein sehr hohes Potentialgefälle (es konnte wegen zu grosser Empfindlichkeit des Elektroskopes nur die untere Grenze bestimmt werden) als Gefolge der erreichten hohen Breite und des niedrigen Dunstdruckes. Nach den meteorologischen Beobachtungen, die seinerzeit am Cap Horn ausgeführt wurden, hat der Dunstdruck dort im März und April einen Werth von 4—4,5 mm.

Die in Fig. *A* dargestellten Beobachtungsresultate zeigen somit, dass die theoretisch gefolgerte Curve nicht nur für unsere Breiten, sondern auch für die heisse Zone der Wirklichkeit entspricht; es ist somit der weitaus grösste Theil derselben experimentell untersucht und es fehlen jetzt nur noch Messungen aus möglichst hohen Breiten, d. h. bei möglichst niedrigem Dunstdrucke, um auch das letzte Stück derselben einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Die Thatsache, dass das normale Potentialgefälle in der heissen Zone dasselbe Vorzeichen behält wie in höheren Breiten, ist mit Rücksicht auf manche Theorien der Luftelektricität von höchster Bedeutung.

So folgert z. B. Lemström [1]) aus der bekannten Theorie Edlund's, dass in der Nähe des Aequators das Potentialgefälle das Zeichen wechseln müsse, und das Nichtzutreffen dieser Erscheinung allein würde, abgesehen von anderen Umständen, genügen, berechtigte Zweifel in Edlund's Theorie zu setzen. Auch dass die absolute Grösse des Potentialgefälles gegen den Aequator zu abnimmt, widerspricht allen Theorien, die den Ursprung der Luftelektricität in einer durch die Bewegung der Erde hervorgebrachten Reibung der Luft suchen, so z. B. der jüngst von

1) Arch. d. sc. et ph. (1887).

Kiesel[1]) aufgestellten; es ist überhaupt zu bedauern, dass auf dem Gebiete der atmosphärischen Elektricität, wo doch vor allem Zahlen nothwendig wären, immer mehr und mehr auf Speculationen aufgebaute Theorien entstehen, während das brauchbare Beobachtungsmaterial nur sehr langsam wächst.

Umsomehr muss man es jedem danken, der auf Reisen seine kostbare Zeit diesem höheren Zwecke widmet.

---

1) Programm d. Louisenstädt. Gymn. Berlin 1887.

Ueber den zweiten Kirchhoff'schen Satz.

Von

O. Chwolson.

In allen Lehrbüchern, welche ich Gelegenheit hatte durchzublättern, (Wiedemann, Müller-Pfaundler, Mousson, Jamin, Reiss, Mascart et Joubert, F. Neumann [Vorlesungen über elektrische Ströme], Fl. Jenkin, Cumming u. s. w.) findet sich ein und derselbe Beweis des zweiten Kirchhoff'schen Satzes: es wird ein geschlossener Stromkreis betrachtet, in welchem an mehreren Punkten elektromotorische Kräfte thätig sind. An jedem dieser Punkte wird die Potentialdifferenz zu beiden Seiten desselben der betreffenden elektromotorischen Kraft gleich gesetzt; der Stromkreis wird in mehrere Theile getheilt und bei jedem derselben die bekannte Formel angewandt, welche ausdrückt, dass die Stromstärke i in ihm gleich ist der Potentialdifferenz seiner Enden, dividirt durch seinen Widerstand. Herr J. Borgmann hat im „Journal der Russischen Physikal.-Chem. Gesellschaft" 1886, T. 18, S. 8, diesen Beweis verallgemeinert, indem er annahm, dass zwischen den Punkten, in welchen elektromotorische Kräfte wirken, Stromverzweigungsstellen vorhanden sind.

Die übliche Art, den zweiten Kirchhoff'schen Satz zu beweisen, leidet, wie mir scheint, an drei ziemlich bedeutenden Uebelständen.

Erstens bezieht sich der Beweis stets auf einen bestimmten Stromkreis, welcher der Entwicklung zu Grunde liegt; hierbei können Zweifel entstehen, ob der Beweis auch vollkommen allgemein ist, da in dem betrachteten Stromkreise vielleicht nicht alle möglichen Fälle gegenseitiger Lage von Stromverzweigungspunkten und elektromotorischen Kräften vorhanden sind. So könnten z. B. zwischen zwei Punkten, in welchen elektromotorische Kräfte thätig sind, mehrere Stromverzweigungsstellen vorkommen, für welchen Fall der strenge Beweis eine ziemlich complicirte Form annehmen würde.

Zweitens ist es für den Anfänger meist schwierig zu begreifen, woher die Potentialdifferenz an beiden Seiten eines Punktes gleich der elektomotorischen Kraft gesetzt wird, welche in diesem Punkte wirkt, da ja später bei den Anwendungen vorausgesetzt wird, dass in jedem

Punkte galvanische Elemente sich befinden, für welche bekanntlich die Potentialdifferenz zu beiden Seiten bei geschlossener Kette der elektromotorischen Kraft nicht gleich ist. Bei dem Beweise des zweiten Kirchhoff'chen Satzes wird eben vorausgesetzt, dass der innere Widerstand des Elementes gleich Null ist; dem Anfänger macht es Schwierigkeit einzusehen, dass diese Voraussetzung auf das Endresultat keinen Einfluss haben kann.

Drittens erscheint der zweite Kirchhoff'sche Satz bei der üblichen Ableitung desselben als eine Gleichung, welcher gewisse Grössen scheinbar zufällig genügen; die äusserst einfache physikalische Bedeutung jenes Satzes bleibt, besonders für den Anfänger, vollkommen unklar.

Im Nachfolgenden soll ein Beweis des zweiten Kirchhoff'schen Satzes gegeben werden, welcher auf keinem bestimmten Stromkreise, auf keiner bestimmten Zeichnung basirt und dabei den äussersten Grad von Allgemeinheit besitzt, und ausserdem die wahre physikalische Bedeutung jenes Satzes sofort klarlegt.

Wir stellen die nachfolgenden Sätze, ohne welche jedenfalls kein Beweis des zweiten Kirchhoff'schen Satzes denkbar ist und welche in jedem Lehrcursus jedenfalls früher durchgenommen worden, als bekannt voraus:

1. Die elektromotorische Kraft, welche sich bei der Berührung zweier heterogener Körper entwickelt, ist gleich der Potentialdifferenz an beiden Seiten der Berührungsoberfläche, oder, mit anderen Worten, sie ist gleich dem Sprung in der Grösse des Potentiales.

2. Die elektromotorische Kraft eines Elementes ist gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche an den Berührungsoberflächen der verschiedenen Stoffe, aus welchen das Element besteht, thätig sind.

3. Die Stromstärke i ist gleich dem Potentialgefälle $V_1 - V_2$, dividirt durch den Widerstand r, oder, mit anderen Worten, es ist das Potentialgefälle $V_1 - V_2 = ir$.

Wir gehen nun zu dem eigentlichen Beweise über.

Wir denken uns (ohne Zeichnung) einen völlig beliebigen Stromkreis, in welchem eine beliebige Anzahl von Stromverzweigungsstellen vorhanden sein und eine beliebige Anzahl von elektromotorischen Kräften thätig sein können. Auf diesem Stromkreis nehmen wir einen beliebigen Punkt M und durchlaufen, von ihm anfangend, den ganzen Stromkreis, bis wir zu diesem Punkte zurückkommen; dabei verfolgen wir im Geiste die Variationen des Potentiales. Indem wir den Stromkreis durchlaufen, finden wir erstens Strecken, in welchen das Potential sich stetig ändert, in welchen das Potentialgefälle $V_1 - V_2$ gleich ir ist, wobei

einem positiven Strom i ein positives Gefälle, d. h. eine Verminderung (Hinabgehen) des Potentiales entspricht; zweitens treffen wir auf unserem Wege Stellen, in welchen das Potential einen Sprung macht, wobei einem jeden positiven Sprunge, d. h. jedem Sprunge hinauf, eine positive elektromotorische Kraft entspricht. Haben wir den ganzen Stromkreis durchlaufen und sind wir zu M zurückgekehrt, so gelangen wir zu dem ursprünglichen Werthe des Potentiales; die Summe aller Veränderungen des Potentiales muss also gleich Null sein. Hieraus folgt, dass die algebraische Summe aller Gefälle des Potentiales gleich sein muss der algebraischen Summe aller Sprünge desselben hinauf. Nun ist aber die Summe aller Gefälle gleich Σir und die Summe aller elektromotorischen Kräfte gleich Σe, wo e die elektromotorische Kraft eines Elementes ist. Wir erhalten also

$$\Sigma ir = \Sigma e$$

und dies ist der zweite Kirchhoff'sche Satz. Aus diesem Beweise wird die wahre physikalische Bedeutung des zweiten Kirchhoff'schen Satzes ohne weiteres klar: dieser Satz sagt also aus, dass in jedem geschlossenen Stromkreise die Summe aller Potentialgefälle, d. h. das gesammte „stetige Sinken" des Potentiales gleich sein muss der algebraischen Summe aller „Sprünge hinauf" der Potentialwerthe.

Ueber die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales.

Von

O. Chwolson.

Um die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales abzuleiten, wird in den Lehrbüchern folgendermaassen verfahren: Es sei ψ die Intensität eines magnetischen Feldes, i eine Stromstärke, e eine Elektricitätsmenge, v ein elektrisches Potential, wobei alle Grössen in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt sein sollen; endlich sei r eine Arbeit. Die Einheiten aller Grössen sollen mit denselben aber grossen Buchstaben ausgedrückt werden. Auf bekannte Weise wird zuerst gezeigt, dass die Dimension der elektromagnetischen Einheit der Intensität eines magnetischen Feldes ausgedrückt wird durch die Formel

$$(\text{Dim. } \Psi) = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Indem man hierauf das Gesetz von Biot und Savart für den Fall der Wirkung eines Kreisstromes auf einen Magnet-Pol in seinem Centrum anwendet, findet man die Dimension der elektromagnetischen Einheit der Stromstärke, wobei

$$(\text{Dim. } J) = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \qquad (1$$

erhalten wird. Die entsprechende Einheit der Elektricitätsmenge wird aus der Formel $e = it$ abgeleitet, wo t die Anzahl der Secunden ist, während welcher der Strom i dauert und die Elektricitätsmenge e vorbeifliesst. Dies gibt uns die Dimension der elektromagnetischen Einheit der Elektricitätsmenge, wobei erhalten wird

$$(\text{Dim. } E) = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}. \qquad (2$$

Um nun die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales v zu finden, benutzt man den Satz, dass bei der Ueberführung der Elektricitätsmenge e zwischen zwei Punkten, welche eine Potential-Differenz v besitzen, eine Arbeit r ausgeführt wird, welche gleich ist

$$r = ve. \qquad (3$$

Hieraus folgt, dass

$$(\text{Dim. } R) = (\text{Dim. } V)\,(\text{Dim. } E).$$

Da nun die Dimension der Arbeits-Einheit gleich ist

$$(\text{Dim. } R) = M L^2 T^{-2},$$

so erhält man, siehe noch Formel 2,

$$(\text{Dim. } V) = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}. \qquad (4$$

Diese Ableitung macht dem Anfänger aus folgendem Grunde bedeutende Schwierigkeiten. Ehe er sich dem Studium der Lehre über die absoluten Einheiten zuwendet, hat der Anfänger jedenfalls die Theorie des elektrischen Potentiales durchgenommen, wobei er als Ausdruck des Potentiales v in einem Punkt, welcher sich in der Entfernung ϱ von der Elektricitätsmenge e befindet,

$$v = \frac{e}{\varrho}$$

gefunden hat. Dem Anfänger muss es nun stets scheinen, dass aus dieser Formel die Dimension der Einheit des elektrischen Potentiales müsste abgeleitet werden können. Es ergibt aber diese Formel, (siehe Formel 2):

$$(\text{Dim. } V) = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}.$$

Man erhält auf solchem Wege ein vollkommen falsches Resultat und es ist natürlich nicht schwer, sich klar zu machen, wo der Fehler steckt.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, dass der richtige Ausdruck für die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales gefunden werden kann auf Grund eines Raisonnements, welches sich von dem eben angeführten falschen im Grunde nur sehr wenig unterscheidet.

Das elektrische Potential in einem Punkte wird definirt als diejenige Arbeit, welche von den elektrischen Kräften geleistet wird, wenn die Einheit der Elektricitätsmenge aus diesem Punkte auf beliebigem Wege in die Unendlichkeit hinausgeführt wird. Um diese Arbeit berechnen zu können, müssen wir ausgehen von dem Coulomb'schen Gesetze, nach welchem die Kraft f der Wechselwirkung zweier Elektricitätsmengen e und e_1, die sich in der Entfernung ϱ voneinander befinden, ausgedrückt wird durch die Formel

$$f = C \frac{e\, e_1}{\varrho^2}. \qquad (5$$

Der Factor C wird gleich Eins, wenn wir die Einheit der Elektricitätsmenge auf ganz bestimmte Weise wählen; bekanntlich ist dieses die elektrostatische Einheit der Elektricitätsmenge. Im elektromagnetischen

System erhalten wir jedenfalls eine vollkommen andere Einheit der Elektricitätsmenge, so dass der Proportionalitätsfactor C nicht gleich Eins wird. Wie man aus der Formel 5 ersieht, ist die Grösse dieses Factors C abhängig von den fundamentalen Einheiten L, M, T, da einerseits die Grösse f, andrerseits die Grösse $\frac{e\,e_1}{\varrho^2}$ in verschiedener Weise von jenen fundamentalen Einheiten abhängen. Es ist nun leicht zu zeigen, wie C von L, M, T abhängt. Die Formel 5 gibt

$$(\text{Dim. } F) = \frac{[(\text{Dim. } E)]^2}{L^2} \cdot (\text{Dim. } C),$$

oder, siehe Formel 2,

$$\frac{M\,L}{T^2} = \frac{M\,L}{L^2} \cdot (\text{Dim. } C),$$

also

$$(\text{Dim. } C) = \frac{L^2}{T^2}. \tag{6}$$

Bei der Bestimmung der Grösse des elektrischen Potentiales v, d. h. bei Berechnung der Arbeit, welche ausgeführt wird, wenn die Einheit der Elektricitätsmenge aus einem gegebenen Punkte sich in die Unendlichkeit entfernt, gehen wir in der allgemeinen Theorie des Potentiales meistentheils aus von der Formel

$$f = \frac{e\,e_1}{\varrho^2}$$

wobei erhalten wird

$$v = \frac{e}{\varrho}.$$

Geht man aber aus von der Formel

$$f = C\frac{e\,e_1}{\varrho^2},$$

so wird die Kraft, welche auf die Einheit der Elektricitätsmenge ($e_1 = 1$) wirkt, nicht mehr gleich $\frac{e}{\varrho^2}$, sondern gleich $C\frac{e}{\varrho^2}$ sein, infolgedessen auch für die Arbeit v ein um C grösserer Werth erhalten wird. Es wird also das elektrische Potential in unserem Falle gleich

$$v = C\frac{e}{\varrho}. \tag{7}$$

Diese Formel benutzen wir nun, um die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales zu bestimmen. Wir haben

$$(\text{Dim. } V) = \frac{(\text{Dim. } C) \cdot (\text{Dim. } E)}{L}.$$

Nach Einsetzung von Formel 2 und 6 erhalten wir

$$(\text{Dim. } V) = \frac{L^2 T^{-2} \cdot M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{L}$$

oder

$$(\text{Dim. } V) = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}. \qquad (8$$

Auf diesem Wege haben wir also den vollkommen richtigen Ausdruck für die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales erhalten, vergl. Formel 4.

Aus pädagogischen Gründen dürfte es rathsam sein, mit der hier angegebenen Ableitung anzufangen und dann erst zu beweisen, dass die gefundene Dimension von V der Gleichung $r = ve$ genügt, wo die Dimension der Einheiten R und E selbstverständlich früher bereits gefunden worden sind.

Die Notiz von M. Meslin (Journ. de physique 1885, p. 225 et 289) beweist jedenfalls, dass es nicht überflüssig sein dürfte, die übliche Ableitung der Dimension des elektrischen Potentiales durch die hier angegebene zu ersetzen.

Ueber den Zusammenhang von Oberflächenspannung, Oberflächendichte und oberflächlicher Wärmeentwicklung.

Ein Beitrag zur Capillaritätstheorie.

Von

K. Fuchs.

1.

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Dichte einer Flüssigkeit eine unveränderliche Grösse ist. Den Werth der Oberflächenspannung können wir dann durch folgenden Gedankengang leicht berechnen. Die Flächeneinheit freier Oberfläche zu bilden erfordert den Aufwand von Arbeit. Diese Arbeit muss dieselbe bleiben, wie immer die freie Flächeneinheit gebildet wird. Nun wollen wir zwei Bildungsarten freier Oberfläche betrachten.

1. Die Flüssigkeit bildet in einem offenen Gefässe einen Spiegel. Wenn wir unter Ueberwindung der Oberflächenspannung p die Einheit der Wandlänge um die Strecke Eins zurückschieben, dann haben wir die Einheit freier Oberfläche gebildet und hierbei die Arbeit Spannung $\times$ Weg, d. i. $p \cdot 1 = p$ geleistet.

2. Quer durch einen Flüssigkeitsfaden vom Querschnitte $q = 1$ legen wir zwei aufeinander gelegte mathematische (dickenlose, indeformable) Platten und heben dieselben voneinander ab, wodurch der Faden entzwei gerissen wird. Wir haben hierbei die Anziehung zu überwinden, welche die Moleküle der unteren Fadenhälfte auf die Moleküle der oberen Fadenhälfte ausüben. Diese Arbeit lässt sich leicht berechnen. Wir nehmen zuerst nur eine Elementarattraction an, d. h. eine Molecularkraft, welche mit der Intensität k aber nur von der Entfernung r bei dr wirksam ist. Um von einem ebenen Flüssigkeitsspiegel einen normal auf demselben stehenden Faden vom Querschnitt dq abzuheben, ist eine Arbeit erforderlich, deren Werth leicht durch einige Integrationen bestimmt wird als

$$\frac{1}{4}\pi\varrho^2 r^4 k\, dr\, dq.$$

Wenn wir so viel Säulen vom Querschnitt dq nehmen, dass ihr Gesammtquerschnitt gleich Eins ist, und die Summe aller Elementarkräfte,

welche von $r = 0$ bis $r = \infty$ je mit der Intensität $k = f(r)$ wirksam sind, nehmen, dann erhalten wir als Zerreissungsarbeit eines Fadens vom Querschnitt = 1 die Arbeit

$$\frac{1}{4}\pi\varrho^2\int_0^\infty r^4 f(r)\,dr,$$

wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist. Hierbei sind aber Zwei freie Oberflächen gleich Eins gebildet worden: eine an der oberen, eine an der unteren Fadenhälfte. Die Einheit freier Oberfläche erfordert also eine Zerreissungsarbeit gleich

$$\frac{1}{8}\pi\varrho^2\int_0^\infty r^4 f(r)\,dr,$$

wofür wir kürzer schreiben wollen $\varrho^2 a_4$, wobei der Index 4 andeutet, dass das Integral die vierte Potenz von r enthält.

Da die Oberflächenbildungsarbeit die gleiche sein muss, ob man die Wand verschoben oder einen Faden zerrissen hat, so muss

$$p \times 1 = \varrho^2 a_4$$

sein, und wir können sagen: Die Oberflächenspannung ist gleich der halben Zerreissungsarbeit per Einheit des Querschnittes (dividirt durch Eins).

Wir finden nun leicht den Zusammenhang von Oberflächenspannung und Temperatur unter der Voraussetzung, dass die Molecularkräfte durch die Temperatur nicht beeinflusst werden. Wenn α der Ausdehnungscoefficient der Flüssigkeit ist, dann ist bei Vernachlässigung höherer Glieder

$$\varrho_t = \varrho_0(1 - \alpha t)$$

wenn ϱ_t und ϱ_0 die Dichten der Flüssigkeit bei t^0, resp. Null Grad bedeuten. Die Oberflächenspannung p_t bei der Temperatur t^0 ist dann

$$p_t = \varrho_0^2(1 - 2\alpha t)\,a_4 = p_0 - 2\alpha t\varrho_0^2 a_4$$

wobei in der Klammer wieder das dritte Glied als klein vernachlässigt ist. Die Oberflächenspannung wird also mit steigender Temperatur kleiner.

Von der Betrachtung freier Oberfläche gehen wir über auf die Betrachtung der Contactfläche zweier Flüssigkeiten A und B. Um die Einheit der Contactfläche zu bilden sind drei Arbeiten erforderlich.

1. Wir bilden die Einheit freier Oberfläche an A. Die erforderliche Arbeit ist $\varrho_1^2 a_4$.

2. Wir bilden die Einheit freier Oberfläche an B. Die erforderliche Arbeit ist analog $\varrho_2^2 b_4$.

3. Wir bringen die beiden freien Oberflächen in Contact. Hierbei wird Arbeit gewonnen, die wir erst berechnen müssen. Zu dem Behufe lassen wir die Flüssigkeiten A und B bereits in Contact sein, schieben zwischen beide unser obiges mathematisches Plattenpaar, und heben die Flüssigkeiten wieder voneinander ab. Wenn wir genau so, wie bei der Cohäsion, jetzt auch im Falle der Adhäsion rechnen, d. h. zunächst nur eine Elementaradhäsionskraft von der Intensität k und der Wirkungsweite von r bis $r+dr$ annehmen, und schliesslich noch r integriren, finden wir als Zerreissungsarbeit per Einheit dr Contactfläche

$$2 \cdot \frac{1}{8} \pi \varrho_1 \varrho_2 \int_0^\infty r^4 f(r)\, dr$$

wofür wir kürzer $2\varrho_1\varrho_2 c_4$ schreiben wollen. Durch Wiedervereinigung der beiden Flüssigkeiten wird also diese Arbeit wieder gewonnen. Um die Einheit der Contactfläche zu bilden, ist also die erforderliche Arbeit gleich

$$\varrho_1^2 a_4 + \varrho_2^2 b_4 - 2\varrho_1\varrho_2 c_4.$$

Dies ist also auch der Werth der Contactflächenspannung, nachdem ja die Einheit der Contactfläche auch durch Verschiebung der Randstrecke Eins um den Weg Eins unter Ueberwindung der Contactspannung gebildet werden kann.

Wenn die Ausdehnungscoefficienten der beiden Flüssigkeiten α und β sind, und die Dichten bei der Temperatur t sind ϱ_{1t} und ϱ_{2t}, dann erhalten wir als Contactspannung bei der Temperatur t

$$p_t = \varrho_{10}^2 (1 - 2\alpha t) a_4 + \varrho_{20}^2 (1 - 2\beta t) b_4 - 2\varrho_{10}\varrho_{20} (1 - \overline{\alpha + \beta}\, t)\, c_4.$$

Wenn wir die Spannung bei $t = 0$ mit p_0 bezeichnen, dann ist

$$p_t = p_0 - 2(\alpha \varrho_{10}^2 a_4 + \beta \varrho_{20}^2 b_4 - [\alpha + \beta]\, \varrho_{10}\varrho_{20} c_4)\, t$$

oder wenn wir die constanten Dichten in die Capillaritätsconstanten einbeziehen

$$p_t = p_0 - 2(\alpha a_4' + \beta b_4' - [\alpha + \beta] c_4')\, t.$$

Lassen wir der Einfachheit wegen die Dichte von der Temperatur unabhängig sein, so ist

$$p = a_4' + b_4' - 2c_4' = 2\left(\frac{a_4' + b_4'}{2} - c_4'\right).$$

Diese Formel sagt: Die Contactspannung ist contractiv, wenn die Adhäsionsconstante kleiner ist als das arithmetische Mittel der beiden Cohäsionsconstanten. Im entgegengesetzten Falle ist sie expansiv. Der letztere Fall scheint zwischen Wasser und Alkohol vorzuliegen, denn expansive Contactspannung genügt, um die merkwürdigen heftigen

Strömungen zu erklären, welche wir beobachten, wenn wir unter geeigneten Umständen einen Tropfen Alkohol in eine kleine Menge Wasser bringen.

Kehren wir zur Formel für p_i zurück. Die Temperatur bleibt ohne Einfluss, wenn der Klammerausdruck gleich Null wird. Wenn wir für c_i' die Form

$$c_i' = \frac{1}{2}(a_i' + b_i') + x$$

einsetzen, und x die Ueberadhäsion nennen, dann nimmt unsere Bedingung folgende Gestalt an:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)(a-b).$$

Die Ueberadhäsion muss also positiv sein, wenn die cohärentere Flüssigkeit, beispielsweise B, den grösseren Ausdehnungscoefficienten β besitzt; im entgegengesetzten Falle entgegengesetzt. Positive Ueberadhäsion gibt aber der Contactfläche, wie wir gesehen haben, Expansionsspannung. Die Erwärmung liefert eine contrahirende Componente, wenn

$$c > \frac{\alpha a_i' + \beta b_i'}{\alpha+\beta};$$

im entgegengesetzten Falle liefert sie eine expansive Componente.

Wir können leicht auch die Formeln entwickeln, welche zeigen, wie die Capillaritätsconstanten vom Drucke abhängen, falls die Molecularkräfte vom Druck unabhängig sind. Wenn nämlich die Flüssigkeit compressibel ist, dann ist

$$\varrho_q = \varrho_0(1+\zeta_q),$$

wenn ϱ_q die Dichte der Flüssigkeit unter dem Drucke q, ϱ_0 die Dichte in Abwesenheit eines äusseren Druckes und ζ den Compressibilitätsfactor der Flüssigkeit bedeutet. Wir haben dann, wie leicht zu verstehen ist

$$p_q = \varrho_0^2(1+2\zeta q)\, a_i = p_0(1+2\zeta q).$$

Durch Druck wird also die Oberflächenspannung vergrössert. Wenn Druck und Temperatur sich gleichzeitig ändern, erhalten wir

$$p_{qt} = p_{oo}(1+2\zeta q - 2\alpha t).$$

Es hat keinen praktischen Zweck, in dieser Richtung weiter zu gehen.

Betrachten wir nun den Randwinkel, welchen eine Flüssigkeit A an einer festen Wand B bildet. Für ihn gilt

$$\cos\varphi = 1 - 2\frac{c_i'}{a_i'} = 1 - 2\frac{\varrho_a\varrho_b c_i}{\varrho_a^2 a_i} = 1 - 2\frac{\varrho_b c_i}{\varrho_a a_i}.$$

Wie hängt derselbe von Temperatur und Druck ab? Die Dichte von A bei der Temperatur Null und in Abwesenheit eines äusseren Druckes soll mit ϱ_1, die von B mit ϱ_2 bezeichnet werden. Dann haben wir für die Temperatur t

$$\cos\varphi_t = 1 - 2\frac{\varrho_2 c_1 (1-\beta t)}{\varrho_1 a_1 (1-\alpha t)}$$
$$= 1 - 2\frac{\varrho_2 c_1}{\varrho_1 a_1}(1-\beta t+\alpha t).$$

Wir finden hieraus: Der Randwinkel wird mit steigender Temperatur grösser, wenn der Ausdehnungscoefficient α der Flüssigkeit A grösser ist, als der Ausdehnungscoefficient β der Wand. Hierbei ist zu merken, dass der Randwinkel in unserer Formel als ausserhalb der Flüssigkeit liegend angenommen ist, so dass er beispielsweise zwischen Quecksilber und Glas als spitzer Winkel erscheint.

Aehnlich gestaltet sich die Formel für Druck. Sie lautet

$$\cos\varphi_q = 1 - 2\frac{\varrho_2 c_1}{\varrho_1 a_1}(1+\xi q-\zeta q)$$

wobei ξ und ζ die Compressibilitätscoefficienten für B und A bedeuten. Wir sehen dann: Wenn die Flüssigkeit compressibler ist, als die Wand, dann wird der Randwinkel mit steigendem Drucke kleiner.

2.

Wir haben bisher angenommen, dass die Dichte jeder Flüssigkeit in allen Punkten dieselbe ist. Diese Annahme ist kaum haltbar, und wir wollen untersuchen, welche Aenderungen die Dichte der Flüssigkeit in der Grenzregion, d. h. in der Nähe der Oberfläche, zeigen muss, wenn die Flüssigkeit überhaupt compressibel ist.

Jedes Molekül in der Oberflächenhaut wird durch die Flüssigkeit normal zur Oberfläche nach innen stärker grenzen als nach aussen, weil innerhalb seines Attractionsbereiches vom Radius r mehr nach unten als nach oben ziehende Moleküle sich befinden, nachdem die Attractionssphäre theilweise über die Oberfläche ins Leere hinausragt. (Die Oberflächenhaut hat die Dicke gleich r). Hieraus folgt, dass der Binnendruck der Flüssigkeit von der Oberfläche nach innen zu bis in die Tiefe r stetig zunehmen muss, weil jede Schicht den Druck aller über ihr (d. h. zwischen ihr und der Oberfläche) liegenden Schichten zu tragen hat. Wenn die Flüssigkeit compressibel ist, dann muss also die Dichte von der Oberfläche bis in die Tiefe r stetig zunehmen. Nun lässt sich aber zeigen, dass die Dichte auch von der Tiefe r bis $2r$ stetig zu-

nehmen muss. Jedes in dieser Tiefe zwischen r und $2r$ liegende Molekül wird nämlich normal zur Oberfläche nach innen stärker grenzen als nach aussen, weil ein Theil seiner Attractionssphäre in die Oberflächenhaut reicht, in derselben die Flüssigkeit aber weniger dicht ist, als in grösserer Tiefe, also weniger Moleküle enthält, als die polar entgegengesetzte Region der Wirkungssphäre. Hieraus resultirt aber abermals eine Druck- und Dichtigkeitszunahme bis in die Tiefe $2r$. Wenn wir dergestalt fortschliessen, so finden wir, dass die Dichte der Flüssigkeit von der Oberfläche bis in unendliche Tiefen (d. h. bis ins Centrum) stetig zunehmen muss. In der Praxis können wir allerdings bereits von einer sehr geringen Tiefe an, vielleicht von der Tiefe $= 2r$ an, die Dichte als constant annehmen, und dies wollen wir auch im folgenden thun. Wir können dann sagen; Eine Flüssigkeit ist in der Region der freien Oberfläche aufgelockert. Es entsteht nun die Frage, ob die Auflockerung der Grenzhaut einen Einfluss auf die Oberflächenspannung besitzt, nachdem wir bei der Berechnung der Oberflächenspannung ausdrücklich eine Grenzauflockerung nicht angenommen haben. Wir werden bald sehen, dass ein Einfluss der Grenzauflockerung auf die Oberflächenspannung stattfindet.

Betrachten wir wieder unsere Flüssigkeitssäule vom Querschnitte Eins. Schieben wir wieder durch dieselbe unser mathematisches Plattenpaar und heben die beiden Säulentheile voneinander ab. Welche Arbeit haben wir hierbei zu leisten? Wir können keinen sicheren Schluss ziehen, wenn wir nicht zuvor einige Sätze der Wärmetheorie sehr scharf formulirt haben.

In einem geschlossenen Gefässe befinde sich ein Gas, dessen Moleküle einander weder anziehen noch abstossen. Wenn das Gefäss sich erweitert, warum kühlt das Gas dann ab? Wenn ein elastischer Ball gegen eine feste Wand schlägt, dann wird er nach der Reflexion sich so schnell von der Wand entfernen, wie schnell er sich vor der Reflexion ihr genähert hat, und er verliert also keine Geschwindigkeit. Wenn jedoch die Wand zurückweicht, dann ist für die Reflexion nicht die absolute sondern die relative normale Geschwindigkeitscomponente des Balles maassgebend, und diese ist um die Geschwindigkeit der Wand kleiner als die absolute normale Geschwindigkeitscomponente. Hieraus folgt aber, dass die absolute Geschwindigkeit des Balles nach der Reflexion kleiner ist, als vor der Reflexion. Die Rechnung zeigt, dass der Verlust, den die reflectirten Gasmoleküle an einer zurückweichenden Wand erleiden, gerade gleich ist dem Gewinn an lebendiger Kraft, der der Wand zu Theil wird, oder der Arbeit, welche wir finden, wenn wir die Molecularstösse, welche die Wand erleidet, auf Druck umrechnen und mit dem Wege der Wand multipliciren. Hieraus ergibt sich eine

einfache Consequenz. Je schneller die Wand zurückweicht, um so weniger Moleküle werden sie erreichen oder ihr folgen können; um so weniger Moleküle verlieren lebendige Kraft; um so weniger wird sich das Gas durch Expansion abkühlen. Wenn die Wand schneller zurückweicht als das schnellste Molekül, dann expandirt sich das Gas ohne Abkühlung, wie ja der bekannte Gay-Lussac'sche Versuch zeigt.

Nehmen wir nun an, dass die Moleküle eines Gases einander abstossen. Zwei freie Moleküle können sich dann nicht einander nähern, ohne lebendige Kraft zu verlieren; sie können sich nicht voneinander entfernen, ohne lebendige Kraft zu gewinnen. Zwei freie Moleküle, die einander abstossen, können wir ein Joch, ein geschlossenes Joch, ein positives, geschlossenes Joch nennen, und zwar ein enges oder weites Joch, je nachdem die Moleküle nahe oder ferne voneinander liegen. Ein Joch wird gelöst, wenn die Moleküle bis ausser Wirkungsweite sich voneinander entfernen. Wenn unser Gas ohne äussere Arbeit, d. i. also unter sehr raschem Zurückweichen der Wand, sich expandirt, dann wird die mittlere Weite der Joche vergrössert, d. i. die Moleküle rücken auseinander, und hieraus folgt, dass das Gas sich erwärmen muss, weil die Moleküle lebendige Kraft gewinnen. Ein Gas mit abstossenden Molecularkräften erhitzt sich also durch Expansion. Wenn die Expansion unter äusserer Arbeit (langsamer Wandverschiebung) erfolgt, dann wird die Temperatur des Gases fallen oder steigen, je nachdem die Molecularabstossung klein oder gross ist, d. h. je nachdem die Abkühlung durch Wandweichung oder die Erwärmung der Jocherweiterung überwiegt.

Umgekehrt verhält sich die Sache, wenn das Gas anziehende Molecularkräfte besitzt, wenn also die Erweiterung der Joche (Expansion des Gases) die lebendige Kraft der Moleküle vermindert, die Verengung der Joche aber (Compression des Gases) ihre lebendige Kraft vermehrt. Expansion bei langsamer Wandregression verursacht dann doppelte Abkühlung: durch Wandregression und durch Jocherweiterung. Compression hingegen verursacht bei langsamer Wandprogression doppelte Erwärmung: durch Wandprogression und durch Jochverengung.

Vielleicht nicht uninteressant ist der Fall rapider Wandprogression. Wenn die Wand vordringt, wird die relative normale Geschwindigkeitscomponente der anfliegenden Moleküle um die Wandgeschwindigkeit vermehrt, und die reflectirten Moleküle zeigen absoluten Zuwachs an lebendiger Kraft, d. h. das Gas ist erwärmt. Wenn die Wand aber so schnell vordringt, dass vor ihr Verdichtung des Gases eintritt (d. h. im Gase nicht in jedem Momente sich Gleichheit des Druckes an allen Stellen herstellen kann), dann werden von der Wand mehr Moleküle getroffen, als wenn der Druck Zeit hat, sich im ganzen Gase fort-

während zu nivelliren. Dann wird die rapide Wandprogression eine höhere Temperatur erzeugen, als bei langsamerer Progression. Natürlich hat die Wand dann auch einen grösseren Widerstand zu überwinden.

Der Widerstand, den die Theoreme von Robert Meyer seinerzeit fanden, hat vielleicht auch darin seinen Grund, dass man damals noch annahm, dass die Gasmoleküle mit abstossenden Kräften begabt sind und noch nicht darauf achtete, dass die Wandprogression nothwendig die lebendige Kraft der Moleküle, selbst wenn dieselben anfangs vollkommen ruhen, proportional der Progression steigern muss. Unter dieser Annahme lässt sich allerdings eine Erwärmung durch Compression durchaus nicht motiviren. Die Erwärmung der Gase durch Compression konnte man geradezu als einen Beweis dessen ansehen, dass die Gasmoleküle keine Abstossungskräfte besitzen, da solche eine Abkühlung bei Compression verursachen müssten.

Wenn wir die Moleküle eines Gases so klein und so zahlreich annehmen, dass wir die Masseneinheit des Gases auch dann noch als einen homogenen Körper ansehen können, wenn sie sich auf ein unendliches Volumen expandirt hat, dann können wir die Arbeit berechnen, welche die Molecularkräfte leisten, wenn die Masseneinheit des Gases aus unendlicher Verdünnung sich auf das Volumen v condensirt. Die Formel, welche auf verschiedene Weisen berechnet worden ist, lautet

$$\frac{\frac{2}{3}\pi\int_0^\infty r^3 f(r)\,dr}{v} = \frac{a_3}{v}.$$

Hierbei ist $f(r)$ das Gesetz der Attractionskraft. Im Integral konnte man ruhig als Grenzen r_1 und r_2 einsetzen, da die Formel in Giltigkeit bleibt, auch wenn die Molecularkräfte nur innerhalb zweier endlicher Grenzen wirksam sind. Die einfachste Ableitung ist vielleicht folgende:

Das Massenelement $\varrho\,dv$ eines homogenen Gases besitze nur eine Elementarkraft von der Intensität k, welche nur von der Entfernung r bis $r + dr$ wirksam ist. Die Kugelschale von der Dicke dr, welche der Schauplatz der Wirksamkeit der Anziehungskraft ist, umschliesst die Gasmasse

$$\frac{4}{3} r^3 \pi \varrho.$$

Diese Masse hat bei der Condensation des Gases aus unendlicher Verdünnung die Wirkungsschale passiren müssen, wobei jede Masseneinheit

mit der Intensität $k\varrho dr$ über die Strecke dr gezogen worden ist. Hierbei ist die Arbeit geleistet worden:

$$\frac{4}{3}r^3\pi\varrho\cdot k\varrho\, dv\cdot dr.$$

Alle Elementarkräfte zusammengenommen liefern dann die Arbeit

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^2 dv\int_0^\infty r^3 f(r)\,dr = 2\varrho^2 a_3\, dv.$$

Die Volumeinheit des Gases liefert dann die Moleculararbeit $2\varrho^2 a_3$. Hierbei haben wir aber die Annäherung je zweier Moleküle doppelt gerechnet, indem jedes Molekül einmal als Bestandtheil der Centralmasse $\varrho\, dv$, einmal als Bestandtheil der Füllungsmasse

$$\frac{4}{3}\pi r^3\varrho$$

angesehen haben. Das richtige Resultat ist dann die Hälfte des obigen, oder $\varrho^2 a_3$. Wenn wir die Arbeit der Masseneinheit, nicht der Volumeinheit rechnen, dann erhalten wir natürlich $\frac{a_3}{v}$, da die Anzahl der Masseneinheiten in der Volumeinheit gleich $\varrho = \frac{1}{v}$ ist.

Wenn eine Gasmasseneinheit sich aus unendlicher Verdünnung auf das Volumen v_1 contrahirt, erscheint die lebendige Kraft, welche durch die Verengung der Joche gewonnen worden ist, als Wärme, und wenn W das Wärmeäquivalent der Arbeit ist, dann liefert bei der Condensation die Gasmasseneinheit die Wärme r

$$\frac{W a_3}{v_1}.$$

Hätte sie sich auf das Volumen v_2 contrahirt, wäre die erzeugte Wärme

$$\frac{W a_3}{v_2}.$$

Wenn die Gasmasseneinheit sich also von v_1 auf v_2 contrahirt, wird durch Verengung der Joche die Wärme gewonnen

$$\frac{W a_3}{v_2} - \frac{W a_3}{v_1} = W a_3\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right).$$

Für kleine Volumänderungen erhalten wir als Wärmegewinn

$$\frac{W a_3\, dv}{v^2}.$$

Eine Flüssigkeit können wir als ein Gas ansehen, dessen Moleküle mit Anziehungskräften begabt sind. Wenn dann eine comprimirt gewesene Flüssigkeitsmasse sich ausdehnt, dann findet doppelte Abküh-

lung statt. Durch Jocherweiterung wird die Wärme w_i verbraucht; durch Wandregression wird die Wärme w_e consumirt. Dies gilt für den Fall, dass die comprimirende Wand allmählich zurückweicht. Wenn sie aber plötzlich verschwindet oder unendlich schell zurückweicht, dann verursacht sie auch keine Abkühlung, nachdem keine Moleküle an sie mit verminderter relativer Geschwindigkeit anprallen, und w_e wird nicht consumirt. Bei freier, explosiver Expansion einer Flüssigkeit wird also nur die Wärme w_i verbraucht.

Nun können wir zur Betrachtung der Oberflächenspannung zurückkehren. Wir nehmen wieder eine Flüssigkeitssäule vom Querschnitt Eins, legen quer durch dieselbe unser mathematisches Flächenpaar, und heben die Säulentheile voneinander ab und bilden somit zwei Einheiten freier Oberfläche. Wir wollen diesen Process eine normale Spaltung nennen, wenn die neu gebildeten Oberflächenhäute keine Auflockerung, überhaupt keine Dichtigkeitsänderung erleiden. Die Arbeit, die wir bei normaler Spaltung leisten, ist, wie wir gesehen haben, $2\varrho^2 a_i$, für beide Flächeneinheiten zusammengenommen. Wenn die Spaltung mit Auflockerung verbunden ist, complicirt sich das Problem. Wir wollen zur Erleichterung der Uebersicht annehmen, dass die Flüssigkeitssäule zuerst normal gespalten wird, indem wir etwa auch an beide Enden der Flüssigkeitssäule je eine mathematische Platte anlegen, wodurch wir jede Säulenhälfte während der Spaltung in ihrer ursprünglichen Länge erhalten und jede Auflockerung verhindern können. Nach erfolgter Spaltung erst gestatten wir jeder Säulenhälfte sich aufzulockern, indem wir die einklemmenden Endplatten jeder Säulenhälfte allmählich auseinander rücken lassen. Hierbei erleidet aber die neue Oberhaut doppelte Abkühlung: es verschwindet w_i wegen Jocherweiterung und w_e wegen Wandregression. Gleichzeitig wird durch Auseinanderdrängen der Endplatten positive Arbeit geleistet, welche wir mit a_e bezeichnen wollen. Die Spaltung bei Auflockerung liefert also zwei Arbeiten:

1. Die normale Spaltung erfordert den Aufwand der Arbeiten $2\varrho^2 a_i$.
2. Beide Säulentheile liefern zusammen die positive Arbeit $2a_e$.

Um zwei freie Flächeneinheiten zu bilden, müssen wir also die Arbeit $2\varrho^2 a_i - 2a_e$ leisten. Auf die Einheit freier Oberfläche fällt also die Arbeit $\varrho^2 a_i - a_e$. Wir können also sagen: Die Flächenarbeit (die Arbeit, die zur Bildung der Einheit freier Oberfläche erforderlich ist) ist bei Auflockerung der Grenzhaut gleich der normalen halben Spaltungsarbeit, weniger der Auflockerungsarbeit der Einheit freier Oberhaut. Die Flächenarbeit wird also durch die Grenzauflockerung vermindert. Da aber die Oberflächenspannung gleich ist der Flächenarbeit (dividirt durch Eins), so können wir sagen: die Oberflächenspannung einer freien Flüssigkeit wird durch die Auflocke-

rung der Oberflächenhaut vermindert, und zwar um die Auflockerungsarbeit (dividirt durch Eins). Gleichzeitig tritt in der neu gebildeten Haut doppelte Abkühlung ein, indem pro Einheit einer Oberfläche die Wärmemengen w_i und w_e verschwinden, erstere wegen Jocherweiterung, letztere wegen Wandregression.

Es lässt sich fragen, ob wir bei Oberflächenbildung durch Randverschiebung auch das Verschwinden von w_e annehmen müssen. Wir müssen es wohl thun, nachdem die Auflockerung offenbar nicht explosionsartig erfolgt, und folglich nothwendig eine äussere Arbeit geleistet worden sein muss, welche sich darin offenbart, dass die Oberflächenspannung verkleinert wird, also zur Flächenbildung weniger Arbeit verwendet werden muss.

Wir wollen nun die Contactspannung betrachten, d. h. die Spannung, welche in der Contactdoppelschicht zweier einander berührenden Flüssigkeiten A und B stattfindet. Wenn die Flüssigkeiten A und B gar keine Adhäsion besitzen, dann werden beide Flüssigkeiten sich so verhalten, als wenn ihre einander berührenden Grenzhäute freie Oberflächenhäute wären, da jede Flüssigkeit für die andere gar nicht existirt. Es findet dann in beiden Contacthäuten Auflockerung statt. Wenn umgekehrt die Flüssigkeiten keine Cohäsion hätten, und ausschliesslich Adhäsion, dann würde jede Flüssigkeit in der Contacthaut der anderen Condensation verursachen, weil beispielsweise jedes Molekül der A-Flüssigkeit, dessen Entfernung von der Contactfläche kleiner ist, als die äusserste Wirkungsweite der Adhäsionskraft r, normal zur Contactfläche gezogen wird, und jede A-Schicht in der Entfernung $k < r$ von der Contactfläche den Druck aller zwischen h und r liegenden Schichten zu tragen hätte. Von dieser Verdichtung lässt sich abermals zeigen, dass sie bis in unendliche Entfernung verdichtend zurückwirkt, sobald wir auch Cohäsion annehmen, deren Wirkungsweite i sei. Ein Molekül in der Entfernung zwischen r und $r + r'$ wird nämlich ebenfalls gegen die Contactfläche gezogen, weil ein Theil seiner Wirkungssphäre in die verdichtete Contacthaut fällt, d. h. die erste Haut von der Dicke r wirkt schwächer verdichtend auf die zweite Haut von der Dicke r etc. — Wenn endlich beide Flüssigkeiten sowohl Adhäsion als Cohäsion besitzen, dann wird in jeder Flüssigkeit entweder die Auflockerung oder die Verdichtung überwiegen. Wenn wir behufs approximativer Orientirung der Einfachheit wegen für alle Molecularkräfte dasselbe Gesetz $k_r = ef(r)$ zwischen Intensität und Entfernung gelten lassen und nur den Proportionalitätsfactor e bei jeder Kraft einen anderen Werth besitzen lassen, so dass $k = eI$ ist, wobei I eine allen Molecularkräften gemeinsame Constante ist, dann können wir sagen, wenn wir unter e_a, e_b und

e_c die Intensitätsgrössen der Cohäsionen von A und B und ihre Adhäsionsgrösse verstehen: die Grenzhaut von A wird verdichtet, wenn $e_c > e_a$ ist; im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn die Cohäsionsgrösse von A grösser ist als seine Adhäsionsgrösse, wird die Grenzregion verdünnt. Dasselbe gilt für B. Hieraus folgt: Beide Contacthäute werden verdichtet, wenn die Adhäsionsgrösse grösser ist als beide Cohäsionsgrössen; beide Häute werden umgekehrt aufgelockert, wenn die Adhäsionsgrösse kleiner ist als beide Cohäsionsgrössen; die eine Haut wird verdichtet, die andere aufgelockert, wenn die Adhäsionsgrösse zwischen beiden Cohäsionsgrössen steht. Wenn jedoch $f(r)$ für jede Molecularkraft anders lautet, dann kann man nur von Ueberwiegen der Condensation und Ueberwiegen der Auflockerung sprechen, da im allgemeinen in jeder Flüssigkeit in der Grenzregion verdichtete und aufgelockerte Schichten abwechseln werden.

Nun gehen wir an die Bestimmung der Arbeiten, welche bei der Bildung der Einheit der Contactfläche angewendet werden müssen. Wir wählen folgenden Bildungsprocess:

1. Wir bilden durch normale Spaltung eine Einheit freier Oberfläche ohne Auflockerung von A. Hierzu ist die Arbeit $\varrho_1^2 a_4$ erforderlich.

2. Wir verdichten oder verdünnen die freie Grenzregion w, wie sie als fertige Contactregion verdichtet oder aufgelockert erscheint. Wir wollen bei Verdichtung bleiben. Es ist hierzu die Arbeit $+ e_1$ erforderlich. Hierdurch werden zwei Wärmemengen gebildet: w_1 durch die äussere Arbeit und u_1 durch Jochverengung.

3. Dasselbe machen wir mit B; wir bilden also freie B-Fläche ohne Auflockerung unter Aufwand der Arbeit $\varrho_2^2 b_4$.

4. Wir verdichten die Contactregion so, wie sie definitiv verdichtet erscheinen muss. Die erforderliche Arbeit ist $+ e_2$ und die gebildeten Wärmemengen sind w_2 und u_2.

5. Wir bedecken die fertig gebildeten Flächeneinheiten mit je einer mathematischen Ebene und lassen die Flächen nun sich einander nähern bis zum Contacte. Da hierbei die Adhäsion in Wirksamkeit tritt, so wird hierdurch positive Arbeit gewonnen, welche wir nun bestimmen wollen. Die Grenzhaut des A von der Dicke r gleich der Wirkungsweite der Adhäsion fassen wir als zwei in demselben Raume befindliche Häute auf. Die erste Haut m_1 hat die Dichte ϱ_1 der unveränderten A-Flüssigkeit; die zweite Haut n_1 wird durch den Verdichtungsüberschuss gebildet. Analog fassen wir die Contacthaut von B als die Summe zweier Häute m_2 und n_2 auf, von denen die erstere dem unveränderten B, die zweite dem Ueberschusse entspricht, den die Condensation er-

zeugt hat. Indem wir die beiden Doppelhäute einander nähern, gewinnen wir vier Arbeiten.

1. Die Annäherung von m_1 und m_2 liefert dieselbe Arbeit, welche wir bei unveränderlicher Flüssigkeitsdichte berechnet haben als $2\varrho_1\varrho_2 c_4$.

2. Die Annäherung von m_2 und n_1 liefert eine Arbeit, welche wir nicht berechnen können, weil wir das Gesetz der Condensation nicht kennen. Wir können nur soviel sagen, dass sie der Dichte ϱ_2 von m_2 proportional ist. Wir können sie also mit $2\varrho_2 z_1$ bezeichnen.

3. Die Annäherung von m_1 und n_1 schafft ganz analog eine Arbeit, die der Dichte ϱ_1 von m_1 proportional ist. Sie sei $2\varrho_1 z_2$.

4. Die Annäherung von n_1 und n_2 schafft endlich eine Arbeit, von der wir gar nichts sagen können, als dass sie um so grösser ist, je mehr beide Grenzhäute condensirt sind. Wir bezeichnen sie mit $2z_1' z_2'$.

Die Vereinigung der freien Flächen zu einer Contactfläche liefert also die positive Arbeit

$$2(\varrho_1\varrho_2 c_4 + \varrho_1 z_2 + \varrho_2 z_1 + z'_1 z'_2).$$

Wir können uns ein annäherungsweises Bild von dieser Arbeit machen, wenn wir annehmen, dass beide Contacthäute innerhalb der Dicke r constante Dichte haben; dass also in der Contacthaut in A durch die Verdichtung einfach aus ϱ_1 nunmehr $\varrho_1 + \varrho_1'$ geworden ist, während in B in der Contacthaut lediglich ϱ_2 zu $\varrho_2 + \varrho_2'$ geworden ist. Dann erhalten wir als Vereinigungsarbeit einfach

$$2(\varrho_1 + \varrho_1')(\varrho_2 + \varrho_2')c_4.$$

Hierbei ist ϱ_1' und ϱ_2' positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die betreffende Flüssigkeit verdichtet oder verdünnt erscheint. (Analog ist in obiger strenger Formel z_1 und z_1' positiv zu nehmen, wenn in A Verdichtung stattgefunden hat, während sie negativ sind im Falle von Auflockerung. Dasselbe gilt für z_2 und z_2'.)

Durch die Vereinigung von A und B wird offenbar keine Wärme gebildet.

Die Gesammtarbeit, welche bei Bildung der Einheit von Contactfläche verbraucht wird, ist also

$$\varrho_1^2 a_4 + \varrho_2^2 b_4 - 2\varrho_1\varrho_2 c_4 - 2\varrho_1 z_2 - 2\varrho_2 z_1 - 2z_1' z_2'.$$

Die ersten drei Glieder sind nichts anderes, als die Bildungsarbeit der Contactflächeneinheit bei unveränderlicher Dichte; wir bezeichnen sie mit p_c, während der volle Ausdruck p_v sein soll. Dann gilt

$$p_v = p_c - 2(\varrho_1 z_2 + \varrho_2 z_1 + z_1' z_2').$$

Um die Formel richtig discutiren zu können, müssen wir Folgendes vor Augen halten. Wenn p_v positiv ist, bedeutet es contractive Spannung, also wenn es negativ ist, expansive Spannung. Wenn die Adhäsions-

constante c_i kleiner ist als beide Cohäsionsconstanten a_i und b_i, dann sind beide Häute aufgelockert, die Grössen ε also negativ; ist aber $a_i < c_i > b_i$, dann sind beide Häute verdichtet, die ε also positiv. Wenn $a_i > c_i > b_i$, also die Adhäsion zwischen den Cohäsionen liegt, dann ist A verdünnt, B verdichtet, also ε_1 und ε_1' negativ, ε_2 und ε_2' positiv. Bei geringen Dichtigkeitsänderungen können wir $\varepsilon_1' \varepsilon_2' = 0$ annehmen. Endlich ist $p_v : 1$ gleich der Contactspannung. Wir können also sagen:

Die Variabilität der Flüssigkeitsdichte verursacht bei relativ kleiner Adhäsion eine Verstärkung der contractiven Contactspannung. Sie verursacht bei relativ grosser Adhäsion eine Verstärkung der expansiven Contactspannung. Sie verursacht bei relativ mittlerer Adhäsion eine Differentialänderung der Spannung. Im allgemeinen gilt also: Die Variabilität der Flüssigkeitsdichte verstärkt die Contactspannung, mag sie positiv oder negativ sein.

Betrachten wir nun die Wärmeentwicklung bei Bildung der Einheit von Contactfläche. Wie wir gefunden haben, bildet sich im Falle von Verdichtung in A die Wärmemenge $w_1 + u_1$, welche wir mit $+ w_a$ bezeichnen wollen; bei Verdünnung sind die Wärmemengen negativ, d. h. es wird Wärme $- w_1 - u_1 = - w_a$ verschwinden, d. h. Abkühlung stattfinden. Dasselbe gilt für B. Es bildet sich in der neuen B-Haut Wärme $+ w_b$ oder $- w_b$, je nachdem Verdichtung oder Verdünnung stattfindet. Wir können also sagen: Bei relativ kleiner Adhäsion zeigt die neue Contactfläche Abkühlung; bei relativ grosser Adhäsion zeigt sie Erwärmung, bei relativ mittlerer Adhäsion zeigt sie Differentialwärmeschwankung.

3.

Wenn eine feste Wandfläche von einer adhäsirenden Flüssigkeit benetzt wird, dann entwickelt sich Wärme. Die Hauptquelle der Wärme ist bald gefunden. Wenn freie Flüssigkeitsoberfläche sich unter der Einwirkung der Adhäsionskraft der freien Wand nähert, dann ist zwischen beiden keine mathematische Fläche, die der Vereinigung widerstrebt, und an welcher die von den Molecularkräften gelieferte Arbeit geleistet werden konnte. Die Adhäsionskräfte wirken also beschleunigend auf die sich nähernden Flüssigkeitsmoleküle, und die geleistete Arbeit tritt als entwickelte Wärme auf.

Ein genaueres Resultat finden wir durch folgende Betrachtung. Wenn die Contactfläche zweier Flüssigkeiten in einem Rahmen ausgespannt ist und neue Contactfläche wird dadurch gebildet, dass der Rahmen sich erweitert, dann wird die Flächenbildungsarbeit durch den Rahmen geleistet, falls die Spanung contractiv ist. Falls sie aber ex-

pansiv ist und die obige Form nicht verlassen kann, wird am Rahmen durch die Flüssigkeiten positive Arbeit geleistet, wenn die Contacthäute den Rahmen auseinanderdrängen, erweitern (praktisch ist dies natürlich nicht ausführbar).

Nun wird an unseren Rechnungen nichts geändert, wenn wir die eine Flüssigkeit B einen festen Körper sein lassen, und wir betrachten den Fall, dass Sand oder Pulver des festen Körpers B in eine Flüssigkeit A geworfen wird, wo jedes einzelne Korn von A benetzt wird. Welche Arbeit wird hierbei geleistet?

1. Freie B-Fläche braucht nicht gebildet zu werden, da die Oberfläche der Sandkörner von Anfang an fertig vorliegt. Eine Arbeit $\varrho_2^2 b_4$ wird also nicht geleistet.

2. Wohl aber wird infolge starker Adhäsion die Oberhaut von B dichter gemacht, als sie ohne Benetzung wäre. Die Verdichtungsarbeit (pro Flächeneinheit) sei β. Sie besteht aus zwei Arbeiten. Erstens wird die ursprünglich aufgelockerte Haut von B soweit verdichtet, dass sie mit der inneren Substanz gleich dicht ist. Die erforderliche Arbeit ist β_1. Zweitens wird die Oberhaut weiter verdichtet und hierbei die Arbeit β_2 geleistet. (β_2 ist negativ zu nehmen, wenn nach der Benetzung immer noch eine Auflockerung der Oberhaut des B übrig bleibt, was der Fall sein kann, wenn B überaus cohärent ist.)

3. Es wird freie A-Oberfläche ohne Auflockerung unter Aufwand der Arbeit $\varrho_1^2 a_4$ (pro Flächeneinheit) gebildet.

4. Die freie A-Haut wird in Berührung mit B verdichtet und hierbei die Arbeit α_2 verbraucht.

5. Die freie A-Fläche wird mit der freien B-Fläche in Contact gebracht. Diese Arbeit besteht aus vier Theilen, wenn wir wieder die Grenzhaut sowohl in A als auch in B in die normale Haut m_1 und m_2 und in die Condensationshaut n_1 und n_2 zerlegen. Es liefert m_1 mit m_2 die Arbeit $2\varrho_1\varrho_2 c_4$; m_1 mit n_2 die Arbeit $2\varrho_1 z_2$; m_2 mit n_1 die Arbeit $2\varrho_2 z_1$; n_1 mit n_2 die Arbeit $z_1' z_2'$. Die Summe ist

$$2\varrho_1\varrho_2 c_4 + 2\varrho_1 z_2 + 2\varrho_2 z_1 + z_1' z_2'.$$

Alle Arbeiten zusammengenommen, welche also bei der Bildung der Einheit von Contactfläche durch Benetzung von Sandkörnern durch eine umhüllende Flüssigkeit geleistet werden, sind also:

$$-\beta_1 - \beta_2 - \varrho_1^2 a_4 - \alpha_2 + 2\varrho_1\varrho_2 c_4 + 2\varrho_1 z_2 + 2\varrho_2 z_1 + z_1' z_2'.$$

Unabhängig von der Dichtigkeitsänderung sind hierbei nur

$$-\varrho_1^2 a_4 \text{ und } +2\varrho_1\varrho_2 c_4.$$

Sie bilden wahrscheinlich den grössten Theil der Arbeit; wir wollen daher noch besonders

$$2\varrho_1\varrho_2 c_4 - \varrho_1^2 a_4 = e_0$$

setzen, wobei der Index c angibt, dass dies eine constante, normale Grösse sei. Obige complicirte Arbeit würde nun bei einer in Rahmen gefassten A-Oberfläche theilweise als Wärmeproduction in der neuen Contacthaut, theils als Arbeit am Rahmen (Verschiebung desselben) geleistet werden, wie wir dies im vorhergehenden Abschnitte behandelt haben. Nun ist aber offenbar bei unserem Experimente mit dem Sande nichts da, was etwa dem Rahmen entspräche, und woran die Arbeit geleistet werden konnte. Hieraus folgt, dass die gesammte Flächenbildungsarbeit als gebildete Wärme auftreten wird. Wenn W das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ist, dann wird also bei Einstreuen von Sand durch die Bildung jeder Einheit von Benetzungsfläche die Wärme gebildet:

$$U = W\varrho_1(2\varrho_2 c_4 - \varrho_1 a_4) + W(2\varrho_1 z_2 + 2\varrho_2 z_1 + z_1' z_2' - \beta_1 - \beta_2 - \alpha_2).$$

Hieraus lässt sich Folgendes lesen: Wenn die Dichtigkeitsänderungen sehr gering sind, dann können wir das zweite Glied vernachlässigen. Die Contactfläche liefert dann Erwärmung, falls die Adhäsionsconstante $\varrho_1\varrho_2 c_4$ grösser ist als die halbe Cohäsionsconstante $\varrho_1^2 a_4$ der Flüssigkeit. Im entgegengesetzten Falle wird an der Contactfläche Abkühlung auftreten. Wenn jedoch die Condensation der Flüssigkeit an der Wand eine sehr bedeutende ist (voraussichtlich ist dies praktisch nicht möglich), dann kann man das erste Glied vernachlässigen.

Man kann die Glieder auch folgendermaassen analysiren:

Unbedingt wärmebildend ist die Annäherung der beiden freien Flächen; die gebildete Wärme ist

$$+ W(2\varrho_1\varrho_2 c_4 + 2\varrho_1 z_2 + 2\varrho_2 z_1 + z_1' z_2').$$

Unbedingt wärmeverzehrend wirkt die Bildung freier normaler Flüssigkeitsoberfläche; die verzehrte Wärmemenge ist

$$- W\varrho_1^2 a_4.$$

Bedingungsweise wärmebildend ist die Dichtigkeitsänderung der Contacthäute; die gebildete Wärme ist

$$+ W(\beta_1 \pm \beta_2 \pm \alpha_2).$$

Hier ist β_2 positiv, wenn bei fertigem Contact die Oberfläche der Körner verdichtet erscheint, während im entgegengesetzten Falle β_2 negativ ist. Dasselbe gilt für α_2. Bei relativ grosser Adhäsion sind sowohl β_2 als α_2 positiv; im entgegengesetzten Falle sind beide negativ. Bei relativ mittlerer Adhäsion haben sie entgegengesetzte Vorzeichen. Natürlich ist $\beta_1 \pm \beta_2$ unbedingt positiv, da die Kornoberfläche durch

den Contact nur dichter, nicht lockerer werden kann, als sie als freie Oberfläche war.

4.

Dass die Auflockerung der Oberflächenregion die Oberflächenspannung vermindert, lässt sich auch direct berechnen.

Denken wir uns eine Flüssigkeit mit ebenem horizontalen Spiegel, deren Oberflächenregion aufgelockert ist. Der Spiegel habe die Länge l und die Breite $= 1$, und wir wollen die freie Oberfläche dadurch vergrössern, dass wir die eine Schmalseite des Gefässes um dl zurückrücken, wodurch freie Oberfläche gebildet wird. Der Rechnung unterziehen wir nun eine Flüssigkeitslamelle in der Tiefe s und der Dicke ds. Sie bildet natürlich ein Band von der Länge l und der Breite 1. Durch die Verlängerung um dl wird jede Längeneinheit um den Betrag $\frac{dl}{l}$ verlängert. Die Lamelle muss sich dann verdünnen und aus ds wird

$$\left(1 - \frac{dl}{l}\right) ds.$$

Wenn wir von der Lamelle ausgehen, dann ändert sich die Dichte der Flüssigkeit nach oben und unten nach einem Gesetze $\varrho_h = f(h)$, wenn wir mit h die Tiefe einer Schicht unter unserer Lamelle verstehen. Wir können auch schreiben

$$\varrho_h = \varrho_0 + h\varrho_0' + \frac{1}{2} h^2 \varrho_0'' + \ldots,$$

wobei ϱ_0 die Dichte in unserer Lamelle bedeutet. Durch die Wandverschiebung erleidet die Curve der Dichtigkeit keine Veränderung der Gestalt; sie contrahirt sich nur, indem aus h nunmehr

$$h\left(1 - \frac{dl}{l}\right)$$

wird, [was wir kürzer $h(1 - \lambda)$ nennen können]. Nach der Streckung ist also die Curve der Dichte dergestalt geändert, dass in der Tiefe h nunmehr diejenige Dichte herrscht, welche früher erst bei $h(1 + \lambda)$ vorhanden war. Ihre Gleichung ist dann

$$\varrho_h = \varrho_0 + h(1 + \lambda)\varrho_0' + \frac{1}{2} h^2 (1 + 2\lambda)\varrho_0'' + \ldots$$

Dieselbe Formel finden wir aber auch, wenn wir in der ursprünglichen ϱ_0' durch $(1 + \lambda)\varrho_0'$ und ϱ_0'' durch $(1 + 2\lambda)\varrho_0''$ [kurz ϱ_0^n durch $\varrho_0^n (1 + n\lambda)$] ersetzen.

Wir wollen nun den Molekülen der Flüssigkeit nur eine Elementarkraft zuschreiben, welche von der Entfernung r bis $r + dr$ mit der

Intensität k (Masseneinheit auf Masseneinheit wirkend) anziehend wirkt. Die Wirkungsschale eines Massenelementes $\varrho_0 \, dq \, ds = m$ unserer Lamelle umschliesst dann eine Flüssigkeitsmasse, welche wir folgendermaassen finden. In der Tiefe h unter deren Centralmassenelement m befindet sich eine Schicht von der Dichte ϱ_h. Von dieser liegt eine Scheibe innerhalb der Wirkungsschale, deren Volumen ist

$$(r^2 - h^2)\,\pi \, dh,$$

die Masse derselben ist also

$$\varrho_h \,(r^2 - h^2)\,\pi \, dh.$$

Wenn wir für ϱ_h seinen obigen Werth

$$\varrho_h = \varrho_0 + h\,\varrho_0' + \frac{1}{2}\,h^2\,\varrho_0''$$

einsetzen, und von $h = -r$ bis $h = +r$ integriren, dann finden wir als eingeschlossene Masse

$$M = \frac{4}{1\cdot 3}\,\pi\, r^3\,\varrho_0 + \frac{1}{2}\,\frac{4}{3\cdot 5}\,\pi\, r^5\,\varrho_0'' + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{4}{5\cdot 7}\,\pi\, r^7\,\varrho_0'''' + \ldots$$

Als unsere Flüssigkeit sich aus unendlicher Verdünnung zusammenfügte, passirte diese Masse M die Wirkungsschale und wurde über die Strecke dr von der Elementarkraft geführt; der Zug war per Masseneinheit des M gleich mk, also die „Füllungsarbeit" der Elementarkraft gleich $m\,M\,k\,dr$. Wenn wir die Füllungsarbeit aller Elementarkräfte zusammengenommen berechnen wollen, müssen wir von $r = 0$ bis $r = \infty$ integriren, wobei $k = f(r)$ das Gesetz der Molecularattraction ist. Wir finden dann als Füllungsarbeit der Centralmasse m

$$\frac{4}{1\cdot 3}\,\pi\,\varrho_0\,\varrho_0\,dq\,dh \int_0^\infty r^3 f(r)\,dr + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3\cdot 5}\,\pi\,\varrho_0\,\varrho_0''\,dq\,dh \int_0^\infty r^5 f(r)\,dr + \ldots,$$

wir wollen die Integrale kurz durch a_3 und a_5 bezeichnen, da sie constante Grössen sind. Der Index gibt die im Integral enthaltene Potenz von r an. Wenn wir ferner nicht ein einziges Massenelement m vom Querschnitt dq nehmen, sondern deren so viele, dass sie eine Flächeneinheit unserer Lamelle bilden, dann ist dq durch Eins zu ersetzen, und die obige Arbeit ist

$$\frac{4}{1\cdot 3}\,\pi\,\varrho_0\,\varrho_0\,dh\,a_3 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{4}{3\cdot 5}\,\pi\,\varrho_0\,\varrho_0''\,dh\,a_5 + \frac{1}{4!}\,\frac{4}{5\cdot 7}\,\pi\,\varrho_0\,\varrho_0''''\,dh\,a_7 + \ldots$$

oder kürzer

$$e_1 = \left(\frac{4}{3}\,\pi\,\varrho_0^2\,a_3 + \frac{2}{15}\,\pi\,\varrho_0\,\varrho_0''\,a_5\right) dh.$$

Die Füllungsarbeit der Lamelleneinheit nach der Streckung finden wir, wenn wir ϱ_0'' durch $\varrho_0''(1+2\lambda)$ ersetzen. Sie ist dann

$$e_2 = \left(\frac{4}{3}\pi\varrho_0^2 a_3 + \frac{2}{15}\pi\varrho_0\varrho_0''[1+2\lambda]a_5\right)dh.$$

(Den Factor dh haben wir nicht zu ändern, denn unsere Lamelleneinheit ist durch die Streckung $(1+\lambda)$ mal länger, aber $(1+\lambda)$ mal dünner geworden, welche entgegengesetzten Aenderungen sich aufheben.)

Der Arbeitsgewinn durch die Streckung ist

$$e_2 - e_1 = \frac{4}{15}\pi\varrho_0\varrho_0'' a_5 \lambda\, dh.$$

Dieses Resultat ist richtig, wenn wir auf die Arbeiten der Molecularkräfte der anderen Lamellen keine Rücksicht nehmen. Wenn wir jedoch die Arbeit für jede Lamelle berechnen, dann zählen wir die Annäherung je zweier Moleküle doppelt, indem wir jedes Molekül einmal als Centralmasse, einmal als Füllungsmasse in Rechnung ziehen. Das richtige Resultat ist also nur die Hälfte des obigen, und wir erhalten als Arbeitsgewinn durch Streckung der Lamelleneinheit um λ den Werth

$$\frac{2}{15}\pi\varrho_0\varrho_0'' a_5 \lambda\, dh.$$

Wir haben anfangs die Lamelle von der Länge l und der Breite $= 1$ um dl verlängert, woraus für jede der l Flächeneinheiten der Lamelle die Streckung

$$\lambda = \frac{dl}{l}$$

resultirt. Die ganze Lamelle liefert also bei der Streckung um dl den Arbeitsgewinn

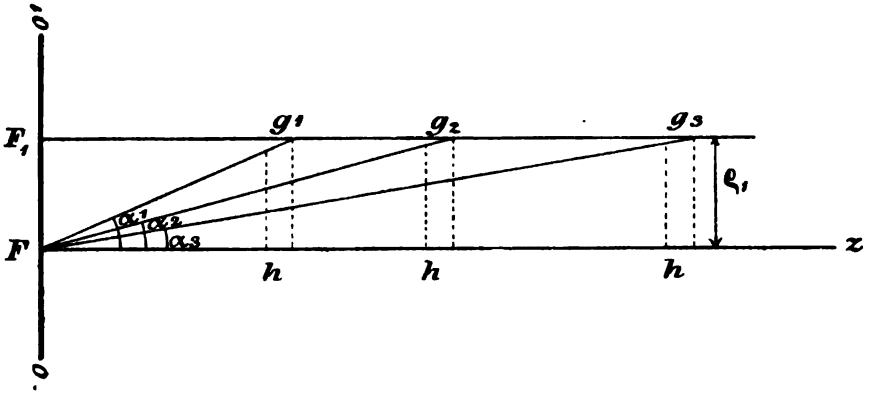
$$l \cdot \frac{2}{15}\pi\varrho_0\varrho_0'' a_5 \frac{dl}{l} dh = \frac{2}{15}\pi\varrho_0\varrho_0'' a_5\, dh\, dl = e\, dh\, dl.$$

Nun ist $1 \cdot dh$ der Querschnitt unserer Lamelle, dl ist der Weg der Wand, $e\, dh\, dl$ soll eine Arbeit sein, folglich ist e die Spannung der Lamelle per Einheit des Querschnittes. Die Spannung der Lamelle ist also per Einheit des Querschnittes

$$e = \frac{2}{35}\pi a_5 \varrho_0\varrho_0''.$$

Die Molecularkräfte leisten also positive Arbeit, d. h. die Schichtenspannung ist expansiv, wo ϱ_0'' positiv, die Dichtigkeitscurve also concav ist; die Schichtenspannung ist contractiv, wo die Dichtigkeitscurve convex ist. Wir orientiren

uns am leichtesten in folgender Weise über die Tragweite der Formel. Es sei $o\,o^1$ die Oberfläche der Flüssigkeit. Ihre Dichte in grösserer Tiefe z sei ϱ_1. An der Oberfläche ist sie Null und wächst mit der Tiefe bis ϱ_1. Die Curve der Dichte verläuft geradlinig, ohne Krümmung, hat also $\varrho_0'' = 0$, und zeigt die Flüssigkeit also in der Grenzhaut gar keine Spannung. Ausgenommen sind der Fusspunkt F an der Oberfläche, wo ϱ_0'' positiv ist, die Spannung aber wegen $\varrho_0 = 0$ verschwindet. Ausgenommen ist ferner der Gipfelpunkt g_1, wo die Curve mit convexer Krümmung in die constante Dicke ϱ_1 übergeht. Die Krümmung soll in eine Schichte von der Dicke h fallen, mag Fg_1



oder Fg_2 oder Fg_3 die Dichtigkeitscurve sein. Dann ist die Spannung der Flüssigkeit nur in dieser Krümmungsschicht gelegen. Sie ist am grössten bei der Curve Fg_1, am kleinsten bei der Curve Fg_3. Man kann nämlich für die dünne Schicht h ohne merklichen Fehler ϱ_0 constant gleich ϱ_1 annehmen. Nun zeigt eine einfache Rechnung, dass die Totalspannung in der Schicht von der Dicke h proportional ist der Tangente des Neigungswinkels α der Curve. Sie ist also umso kleiner, je kleiner α ist, je tiefer also die Auflockerung der Flüssigkeit im Innern der Flüssigkeit reicht. Wir erhalten somit das Resultat: Die Oberflächenspannung ist umso kleiner, je tiefer die Auflockerung der Grenzregion reicht. Das war aber nachzuweisen.

Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Bewegungsgeschwindigkeit von Flüssigkeitswellen.

Von

A. Ahrendt.

Sir William Thomson gibt in einer Abhandlung [1]) aus dem Jahre 1871 eine aus hydrodynamischen Principien hergeleitete Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge von Wellen auf Flüssigkeiten an. Die Formel lautet

$$v^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} T\right),$$

wo T die specifische Cohäsion der Flüssigkeit, g die Constante der Schwerkraft bedeutet. Man ersieht aus dieser Gleichung, dass v einen Minimalwerth hat für

$$-\frac{2\pi g T}{\lambda^2} + \frac{g}{2\pi} = 0 \text{ oder } \lambda = 2\pi\sqrt{T}.$$

Nach Versuchen von Gay-Lussac hat T für Wasser den Werth 0,074, angegeben in Centimetergrammen: demnach lautet die Thomson'sche Formel

$$v^2 = 982\left(\frac{2\pi}{\lambda} 0{,}074 + \frac{\lambda}{2\pi}\right),$$

und aus ihr ergibt sich für

$$\lambda = 2\pi\sqrt{0{,}074} = 1{,}7$$

der Minimalwerth $v = 23$ cm.

Dieses Minimum der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen wurde auch von Thomson beobachtet; die Versuche wurden in Gegenwart von v. Helmholtz 1871 im Sound of Mull angestellt. Es wurde

1) Phil. Mag. (4) vol. XLII 1871.

eine Angelschnur, die an ihrem unteren Ende beschwert war, durch die ruhende Wasserfläche gezogen, und es zeigten sich dann zwei Wellensysteme, entsprechend den beiden Wurzelwerthen der obigen quadratischen Gleichung in λ, eins vor, eins hinter der Angelschnur. Beide Systeme hatten offenbar dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit wie die Angelschnur. Durch eine von Thomson näher angegebene Methode fand er dann aus diesen beiden Wellensystemen das Minimum $v = 23{,}2$ cm, welches also mit dem berechneten sehr nahe übereinstimmt.

Wird λ bedeutend grösser als der kritische Werth $\lambda = 1{,}7$ cm, so ist der erste Summand im Ausdruck für v^2 sehr klein gegen den zweiten, und man kann setzen:

$$v^2 = 982 \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \quad (\lambda \text{ gross}).$$

Wird dagegen λ bedeutend kleiner als 1,7, so kann man schreiben:

$$v^2 = 982 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot T \quad (\lambda \text{ klein}).$$

Man ersieht aus dieser Gleichung, dass bei Wellen von hinlänglich kleiner Breite, also z. B. bei Kräuselungen der Oberflächenhaut (crispations, ripples), die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht nur von der Wellenlänge, sondern auch von der Natur der Flüssigkeit abhängt, ein Resultat, das Matthiessen [1]) zuerst aussprach und durch Versuche bestätigte. Man kann die beiden letzten Formeln auch dahin deuten, dass man sagt: Bei Wellen von beträchtlicher Breite ist die bewegende Kraft vorwiegend die Schwere, bei Wellen von sehr kleiner Breite vorwiegend die Oberflächenspannung.

Die letzte Formel ist durch eine Reihe von Versuchen bestätigt. Faraday hatte die Wellen untersucht (Kräuselungen), die sich auf der Oberfläche von Flüssigkeiten zeigen, falls diese auf tönenden Glasplatten ruhen. In den Jahren 1868—70 nahm Matthiessen [2]) diese Untersuchungen wieder auf und stellte umfangreiche Messungen an, die die später aufgestellte Thomson'sche Formel bestätigen, nämlich zeigen, dass $v^2\lambda = \text{const.}$ ist, und da $v = n\lambda$, $n^{2/3}\lambda = \text{const.}$ ist. Auch anderweitig erzeugte Wellen befolgten dasselbe Gesetz.

Es ist klar, dass die Thomson'sche Formel dazu dienen kann, die specifische Cohäsion T von verschiedenen Flüssigkeiten zu bestimmen, falls man v und λ beobachtet, und zwar wird man die letzte Form der

1) Pogg. Ann. Bd. 134 (1868), Bd. 141 (1870).

2) Zu den bereits angeführten Arbeiten vergl. Matthiessen, Wied. Ann. Bd. 32 (1887). Rayleigh, Phil. Mag. (5) vol. XVI (1883).

Formel anwenden können, falls man hinlänglich schmale Wellen erzeugt. Zu diesem Zwecke wurden nach Anleitung von Herrn Prof. Dr. Matthiessen die weiter unten beschriebenen Versuche im physikalischen Institut zu Rostock angestellt.

In einen Ausflussstrahl von Wasser wurde eine feine Zirkelspitze von ca. 1 mm Breite so gehalten, dass dieselbe eben in die Oberfläche eintauchte und sich in einem Abstande von etwa 1 cm von der Ausflussöffnung ($2r = 0{,}7$ cm) befand; zu beiden Seiten der Spitze zeigten sich dann Wellen. Die auf der dem Ausflussgefässe zugewandten Seite befindlichen Wellen waren stehende, hatten also dieselbe Geschwindigkeit wie der horizontal ausfliessende Strahl. Dabei zeigte sich, dass die der Spitze zunächst liegende Welle etwas breiter war als die folgenden. Je grösser der Druck, je grösser also die Ausflussgeschwindigkeit, desto schmaler waren die Wellen. Um nun ihre Breite zu ermitteln, wurde die zweite Zirkelspitze so gestellt, dass sie zwischen der eintauchenden und der Ausflussöffnung sich befand, jedoch den Strahl nicht berührte. Aus der Zahl der Wellen zwischen beiden Spitzen und dem gemessenen Abstande der beiden Spitzen erhielt man durch Division die gesuchte Wellenlänge. Die Geschwindigkeit der Wellen ist ebenfalls bekannt, falls die Geschwindigkeit des ausfliessenden Strahls bekannt ist; diese ist aber

$$v = \sqrt{2 \cdot 982 \cdot h},$$

angegeben in Centimetern, falls auch die Druckhöhe h des Wassers im Gefässe in demselben Maasse angegeben ist. Nach der Thomson'schen Formel soll für mikroskopische Wellen, und mit solchen hat man es hier zu thun, das Product $(v^2\lambda)$ und somit auch $(h\lambda)$ constant sein. Für dieses Product ergab sich in der That eine hinlängliche Constanz, wie die untenstehende Tabelle angibt. Von allen Producten $(h\lambda)$ wurde dann das arithmetische Mittel genommen und mit Hilfe desselben λ und die Schwingungszahlen n berechnet. Auch die entsprechenden Werthe für

$$v = \sqrt{2gh}$$

sind in die Tabelle eingetragen.

Durch die Tabelle (S. 321) wird das Thomson'sche Gesetz für mikroskopische Wellen bestätigt. Wenn nun aus der Constanten λh die specifische Cohäsion T für Wasser bestimmt wird, so findet man dieselbe aus der Relation

$$v^2 = 982 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} T = 2 \cdot 982 \cdot h$$

$$T = \frac{\lambda h}{\pi} = \frac{0{,}52344}{\pi} = 0{,}1666.$$

h beobachtet	λ beobachtet	$h\lambda$ berechnet	λ berechnet	v berechnet	n berechnet
cm	cm		cm	cm	
1,7	0,300	0,510	0,308	57,8	188
1,9	0,280	0,532	0,275	61,1	222
2,1	0,242	0,508	0,249	64,2	258
2,3	0,233	0,536	0,228	67,2	295
2,4	0,222	0,533	0,218	68,7	315
2,5	0,200	0,500	0,209	70,1	335
2,8	0,175	0,490	0,187	74,2	397
3,1	0,167	0,518	0,169	78,0	461
3,2	0,154	0,492	0,164	79,3	484
3,3	0,152	0,502	0,159	80,5	506
3,8	0,140	0,532	0,138	86,4	626
3,9	0,133	0,519	0,134	87,5	653
4,3	0,121	0,520	0,122	91,9	753
4,8	0,108	0,518	0,109	97,1	891
5,3	0,100	0,530	0,099	102,0	1030
5,4	0,100	0,540	0,097	103,0	1062
5,8	0,093	0,539	0,090	106,7	1186
6,3	0,087	0,548	0,083	111,2	1340
6,5	0,084	0,546	0,081	113,0	1395
7,2	0,071	0,511	0,078	118,9	1629
8,0	0,067	0,536	0,065	125,3	1928
9,0	0,060	0,540	0,058	132,9	2291
11,0	0,050	0,550	0,048	147,0	3063
12,0	0,043	0,516	0,044	153,5	3489
13,0	0,040	0,520	0,040	159,8	3995

Mittel: 0,52844.

Dieselbe ist beträchtlich grösser als die Thomson-Gay Lussac'sche Constante. Da die letztere aber der Wirklichkeit sehr nahe kommt, wie auch aus Messungen Anderer hervorgeht, so würde daraus folgen, dass bei der angewandten Methode die Wellenbreiten grösser als der Theorie entsprechend gemessen wurden. Dies erklärt sich aus der Verzögerung der Flüssigkeitstheilchen in der Mantelfläche des Ausflussstrahls. Es ist somit ein Mittel gegeben, die Verzögerung der Theilchen in der Oberfläche des Strahls zu bestimmen. Denn ist v die wirkliche, v_1 die theoretische Geschwindigkeit dieser Theilchen, so ist

$$v^2 = 982 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0{,}074$$

$$v_1^2 = 982 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0{,}1666,$$

somit das Geschwindigkeitsverhältnis

$$\frac{v}{v_1} = \sqrt{\frac{0{,}074}{0{,}1666}} = 0{,}6665,$$

und die Verzögerung

$$\alpha = \frac{v_1 - v}{v_1} = 0{,}333.$$

Diese Zahlen geben ein Maass für die Geschwindigkeit der Oberflächentheilchen des ausfliessenden Wasserstrahls in der Nähe der Oeffnung; denn die Zirkelspitze war in einem Abstande von etwa 1 cm von der Oeffnung angebracht.

Es wird der Verzögerungscoefficient α abnehmen müssen, falls man die Zirkelspitze in grösserem Abstande von der Oeffnung eintaucht. Dieselbe wurde nun in Abständen von 2 cm und 3 cm von der Oeffnung eingetaucht; die nach der vorigen Methode angestellten Messungen ergaben folgende Resultate:

Abstand 2 cm			Abstand 3 cm		
h beobachtet	λ beobachtet	λh berechnet	h beobachtet	λ beobachtet	λh berechnet
cm	cm		cm	cm	
4,0	0,095	0,380	5,3	0,057	0,302
4,9	0,080	0,392	6,0	0,050	0,300
5,5	0,066	0,363	6,8	0,043	0,292
6,6	0,057	0,376	7,5	0,038	0,285
7,1	0,050	0,355	9,0	0,032	0,288
9,0	0,040	0,360			
	Mittel:	0,369		Mittel:	0,293
	$T = \frac{0{,}369}{\pi} = 0{,}1175$			$T = \frac{0{,}293}{\pi} = 0{,}0933$	

Die entsprechenden Geschwindigkeitsverhältnisse sind 0,794 und 0,891, die Verzögerungscoefficienten α bezüglich 0,206 und 0,109. Bei den letzten Versuchen war der Beobachtungsbereich jedoch bedeutend kleiner als bei den vorigen, da einerseits bei geringen Druckhöhen der Wasserstrahl sich bald hinter der Oeffnung auflöste und daher keine Messungen zuliess, andrerseits bei grossen Druckhöhen die Wellen

zu klein waren, um in der angegebenen Weise gemessen werden zu können.

Die Verzögerungscoefficienten α für die Theilchen der Oberfläche des Strahls sind nach den vorstehenden Versuchen unabhängig von der Ausflussgeschwindigkeit v; sie sind anscheinend eine lineare Function des Abstandes a von der Ausflussöffnung, nämlich

$$\alpha = 0{,}112\ (3{,}9 - a),$$

so dass in einem Abstande 3,9 cm von der Ausflussöffnung die Verzögerung der Theilchen der Oberfläche den Werth Null haben und $T = 0{,}074$ sein würde.

Replik auf die „Erwiderung“ des Herrn J. W. Häussler [1]).

Von

E. Lampe.

Auch nach der „Erwiderung“ des Herrn Häussler halte ich meine Einwände in vollem Umfange aufrecht; ich bestreite die Richtigkeit der zum Ausgangspunkt für die Rechnung dienenden Gleichung:

$$\frac{4}{5}\pi^2 m R^2 r^2 = dL + \frac{4}{5}\pi^2 (m + dm) R^2 (r + dr)^2 + \frac{1}{2} dm v^2.$$

Dieselbe soll die Constanz der Energie des Systems vor und nach der Verschiebung von dm ausdrücken.

Entweder nun ist zur Verschiebung der Masse dm keine Arbeit erforderlich, dann ist $dL = 0$.

Oder es ist Arbeit erforderlich; dieselbe mag z. B. von einem Menschen geleistet werden, welcher die Verschiebung vornimmt. Dann muss die linke Seite, welche bloss die kinetische Energie der rotirenden Masse enthält, um den Betrag der Muskelarbeit vergrössert werden, welcher verbraucht worden ist. Da diese Muskelarbeit keine kinetische Energie erzeugt, so ist sie genau gleich dL und beide Beträge fallen aus der Gleichung heraus.

Der gegen mich angeführte Satz aus der Theorie der Rotation eines starren Körpers ist falsch. („Bekanntlich denkt man sich bei einem rotirenden Körper die ganze Masse desselben in einem Punkte concentrirt,“ u. s. w.). Darnach könnte keine Rotationsaxe eine freie Axe des Körpers sein, während bekanntlich stets drei existiren. Sobald man die kinetische Energie eines Punktes des rotirenden Körpers isolirt betrachten will, darf man nicht eine Aenderung der als Factor im Trägheitsmomente auftretenden Masse des Körpers vornehmen, weil sonst nach dem in meinen „Bemerkungen“ gebrauchten Ausdrucke „die Massenverringerung auf die Masse der ganzen Kugel vertheilt wird“, aber nicht an der Stelle erfolgt, wo das Molekül sich befindet.

Ferner muss ich dabei stehen bleiben, dass auf der rechten Seite der Gleichung ein Zeichenfehler vorhanden ist. Denn rechts steht nicht mehr die Masse m, sondern $m + 2\,dm$. Herr Häussler äussert sich

1) Diese Zeitschrift Bd. 24 S. 60—62.

in seiner „Erwiderung" hierüber wie folgt: „Ich wüsste nicht, warum die Masse eines rotirenden Körpers, wenn sich dessen Volumen ändert, nicht als eine veränderliche Grösse aufgefasst werden könnte." Bisher hat man in der Mechanik eine gegebene Masse als eine constante Grösse aufgefasst; der Satz des Herrn Häussler kann seinen Platz erst in einem vollständig neuen Lehrgebäude der Mechanik finden.

Gegen die Aeusserung über das Vorzeichen eines Differentials möchte ich folgendes bemerken: Die erste Durchsicht der Abhandlung des Herrn Häussler hatte mir gezeigt, dass die obige Gleichung durch eine mechanische Verwandlung von m in $m + dm$, r in $r + dr$ entstanden war. Da es sich aber bei einem Problem der Mechanik nicht um eine äusserliche Anwendung eines Rechnungsschemas handelt, sondern um klare Erkenntnis von der Bedeutung jedes einzelnen Gliedes eines Ausdruckes, so gab ich die Gegenrechnung und vermied absichtlich die Bezeichnungsweise der Differentialrechnung, indem ich μ statt dm setzte.

In meinen „Bemerkungen" [1]) habe ich darauf verzichtet, die von Herrn Häussler erlangten Ergebnisse durch Vergleich mit bekannten Thatsachen anzufechten; denn es genügte, die gleich am Anfange der Rechnung gemachten elementaren Versehen aufzudecken. Da nun aber die von mir angestellte Gegenrechnung auf Grund von behaupteten Phänomenen für unrichtig erklärt wird, so soll meine Formel auch gegen diese Einwände vertheidigt werden.

Die erste Abhandlung des Herrn Häussler [2]), welcher nach dem Erscheinen meiner „Bemerkungen" eine zweite [3]) die Ergebnisse der ersten weiter verwerthende Arbeit gefolgt ist, beginnt mit der richtigen Bemerkung, „dass die Umdrehungsgeschwindigkeit rotirender Massen wächst, wenn Theile derselben der Axe genähert werden." Am Schlusse desselben Aufsatzes wird dagegen die Behauptung ausgesprochen, dass die Rotationsgeschwindigkeit der Erde um einen ebenda angegebenen Betrag vermindert wird, wenn ein Kilogramm auf die Höhe von einem Meter gehoben wird, und dieser Betrag soll unabhängig von der geographischen Breite sein. Verschiebt man nun am Pol ein Kilogramm in der Richtung der Erdaxe, so findet keine Aenderung des Abstandes Null der Kilogramm-Masse von der Rotationsaxe statt. Wie stimmt also der Schluss der Abhandlung zum Anfange?

Am Ende der Erwiderung wird dem Leser zugemuthet, die neuen Anschauungen zu acceptiren, weil die alten mit den Gleichungen des Herrn Häussler nicht in Uebereinstimmung stehen; ich denke, dass

1) Diese Zeitschrift Bd. 23 S. 571—574.
2) Ebenda Bd. 22 S. 501—510.
3) Ebenda Bd. 23 S. 719—730.

dieses Argument für mich wohl keine bindende Kraft haben kann. Der Curiosität wegen sei hier erwähnt, dass in der zweiten Abhandlung eine Stelle zeigt, wie nahe der Wahrheit der Verfasser gewesen ist, ohne das Vertrauen zu seiner Rechnung zu verlieren. Man liest (S. 726): „Man könnte durch die Gl. 9 zu der Ansicht kommen, es sei vielleicht gar kein Potential vorhanden, weil die Aenderung desselben Null ist. Dieser Schluss kann nicht gezogen werden. Denn ich habe in meiner mehrfach erwähnten Abhandlung gezeigt, dass jeder rotirende Körper ein Potential besitzt." Der Schluss ist im Gegentheil richtig und der vermeintliche Beweis falsch.

Gerade dasjenige Beispiel also, welches die Unrichtigkeit der vom Verfasser gemachten Schlussfolgerungen jedem Unbefangenen darthut, wird mir von demselben entgegengehalten, damit ich erkenne, dass meine Formel unrichtig sei, weil sie am Pole die (a priori evidente) Geschwindigkeitsänderung Null ergibt.

Herr Häussler schreibt: „Die Aufgabe, welche ich gestellt habe, kann mit der Annahme, dass die Schwere eine Eigenschaft der Materie sei, überhaupt nicht gelöst werden." Abgesehen davon, dass nirgends bei mir davon geredet ist, die Schwere sei eine Eigenschaft der Materie, glaube ich allerdings die Lösung gegeben zu haben. Die bei dem Heben eines Kilogramms von der Schwere geleistete negative Arbeit ist in der gewöhnlichen Sprache der Wissenschaft als potentielle Energie vorhanden; damit ist nichts über die Art ihrer Entstehung ausgesagt, sondern die Erscheinung einfach beschrieben.

Gegen die Resultate der beiden Arbeiten des Herrn Häussler ist von Seiten der Erfahrung überhaupt der Einwand zu machen, dass die Mechanik von ihren Fundamenten aus neu construirt werden müsste, bevor die gefundenen Sätze Geltung erlangen könnten. Wenn die rotirende Erde wegen ihrer Rotation einen Körper an ihrer Oberfläche anzieht, so muss nach dem Newton'schen Bewegungsgesetze von der Gleichheit der Action und Reaction auch der an der Oberfläche rotirende Körper die Erde anziehen, und nach den von Herrn Häussler aufgestellten Sätzen müsste diese Anziehung dem Quadrate der Umdrehungsgeschwindigkeit proportional sein. Wird also ein Kreisel in rasche Umdrehung versetzt, so müsste die Anziehung zwischen ihm und der Erde im Verhältnisse von $\omega_2^2 : \omega_1^2$ wachsen, wenn ω_2 die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels, ω_1 die der Erde ist. Da jedoch von dieser ungeheuren Zunahme der Anziehung nichts zu spüren ist, so müsste vor allem das Princip von der Gleichheit der Action und Reaction durch ein anderes ersetzt werden.

Wenn ferner die Anziehung eines Himmelskörpers dem Quadrate seiner Winkelgeschwindigkeit proportional sein und Null werden soll,

wenn keine solche Geschwindigkeit vorhanden ist, so sind die Massenbestimmungen der Himmelskörper, welche ja ohne Rücksicht auf diesen variablen Factor gemacht sind, hinfällig geworden und damit auch alle darauf basirenden Rechnungen der theoretischen Astronomie etc. etc.

Nach der „Erwiderung" erscheint der Versuch, mich Herrn Häussler verständlich zu machen, aussichtslos zu sein. In beiden Abhandlungen finden sich Sätze, die sich direct widersprechen; daher kann leicht der eine von ihnen dazu benutzt werden, um zu zeigen, ich hätte dem Verfasser Ansichten untergeschoben, von denen das Gegentheil in den Aufsätzen stände. So verhält es sich mit der Behauptung der „Erwiderung", ich ginge nicht von den Voraussetzungen des Verfassers, sondern von meinen eigenen, anderen aus. Ich erkläre daher schon im voraus, dass dieses mein letztes Wort in der Angelegenheit ist.

Berlin, den 4. März 1888.

Ueber die Rückwirkung der Flutbewegung auf den Mond.

Von

K. Fuchs.

Aus dem Princip der Erhaltung der Flächen lässt sich die Consequenz ableiten, dass infolge der Flutbewegung der Mond sich von der Erde entfernen und seine Revolutionszeit verlängern muss, und diese Consequenz entspricht der Beobachtung, dass der Mond sich thatsächlich in jedem Jahrhundert um etliche Secunden verspätet, ohne dass es bisher gelungen wäre, diese Abweichung aus der Wechselwirkung der Himmelskörper nach dem Newton'schen Gesetze zu erklären.

Ein Bild wird den Gedanken am besten klarstellen. Auf einer lotrechten Spitze befinde sich ein horizontal leicht drehbarer horizontaler Stab, dessen längerer Arm eine kleine Kugel trägt, welche den Mond vorstellt, und dessen kürzerer Arm eine verticale Axe trägt, an die eine grosse, dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt schnell rotirende Kugel gesteckt ist, welche die Erde vorstellt. Der Schwerpunkt des Systemes liege in der Axe der Spitze, und der Stab rotire ebenfalls dem Sinne des Uhrzeigers entgegen langsam, wodurch die Revolution des Mondes und der Erde um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt dargestellt werden soll. Offenbar wird infolge der Reibung der Erdkugel an der Axe die Erdkugel unter Wärmeentwicklung durch Reibung immer langsamer rotiren, während umgekehrt der Stab immer schneller rotiren wird. Das heisst also, dass der Tag (die Umdrehungszeit der Erde) immer länger, der Monat (die Revolutionszeit des Erde-Mond-Systemes) immer kürzer wird. So liegen die Sachen, wenn die Entfernung von Mond und Erde unveränderlich ist. Wenn aber beide sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, dann wird die Vergrösserung der Winkelgeschwindigkeit des Mond-Erde-Systems eine Vergrösserung der Fliehkraft von Mond und Erde zur Folge haben, und sie werden infolge dessen unter Wahrung des alten Schwerpunktes sich voneinander entfernen. Das bringt aber nach dem dritten Kepler'schen Gesetze wieder eine Verlängerung der Revolutionszeit mit sich.

Abgesehen von diesem Bilde können wir sagen, dass in dem Systeme Erde-Mond unmöglich Ein Theil, die Erde, ihre Umdrehungsgeschwindig-

keit infolge der Flutbewegung vermindern kann, ohne dass eine andere Rotation eine entsprechende Beschleunigung erführe, da lediglich innere Kräfte thätig sind. Die Hemmung der Erde geschieht durch ein Drehungsmoment, welches aus der Reibung der Flutwelle an der unter ihr hingleitenden Erde resultirt, indem die Flutwelle wie ein Hemmschuh, ein Zaum wirkt. In einem freien Systeme, auf welches keine äusseren Kräfte wirken, kann aber kein Drehungsmoment auftreten, ohne dass gleichzeitig ein gleiches, aber entgegengesetztes Drehungsmoment aufträte. Wenn aber ein Moment vorhanden ist, welches die Erdrotation hemmt, wo konnte dann das complementäre Drehungsmoment angreifen, wenn nicht, indem es die Revolution zu beschleunigen strebt? Die Wärme, welche durch die Reibung von Flutwelle und Erde entsteht, involvirt ja keine Drehung; sie ist nur das Wärmeäquivalent des Verlustes an lebendiger Kraft, die das System Erde-Mond erleidet. Das einzig denkbare Complement der Erdhemmung ist die Mondbeschleunigung, welche dann in der Folge eine Zunahme der Entfernung von Mond und Erde verursacht. Die Arbeit, welche hierbei geleistet wird, wird durch den Verlust an Geschwindigkeit gedeckt, die der Mond erleidet.

Ueberhaupt gehört es zu den paradoxesten Erscheinungen der Mechanik, dass ein Kräftepaar, welches auf Erde und Mond angreifend ihre Revolutionszeit verkürzen, ihre progressive Geschwindigkeit vermehren will, gerade das Gegentheil verursacht: Verringerung der progressiven Geschwindigkeiten und Verlängerung der Revolutionszeit. Die Arbeit, welche das Kräftepaar leistet, wird nicht nur vollständig durch das Auseinanderrücken von Mond und Erde verbraucht, sondern es wird zu diesem Zwecke auch noch ein Theil der vorhanden gewesenen progressiven Geschwindigkeiten verwendet. Es besteht eben zwischen Flächengeschwindigkeit F und progressiver Geschwindigkeit v im Falle kreisförmiger Bewegung und Geltung des Newton'schen Gesetzes der Zusammenhang

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{aM}{v} = F.$$

Wenn man unser Theorem acceptirt, dann kann man annehmen, dass Erde und Mond ursprünglich sehr nahe zueinander gelegen sind, dass aber die Flutbewegung sie so weit auseinander geschraubt hat, wie sie heute sich befinden. Man kann sogar annehmen, dass die Planeten ursprünglich sehr nahe zur Sonne gelegen waren, und durch Flutreaction so weit vom Centrum weg geschraubt worden sind. Dann braucht man nicht anzunehmen, dass der Urnebel bis über Uranus und Neptun gereicht hat.

Ein einfacher Kohlenhalter zum Löthen und Schweissen der Metalle mittels des elektrischen Lichtbogens.

Von

Dr. B. Nebel.

Bei der Betrachtung der Fig. 5 (Löthen eines Dampfkessels) in Rühlmann's Vortrag über das Bernardos'sche Löth- und Schweissverfahren[1]) fiel mir auf, wie schwer es für den betreffenden Arbeiter sein muss, bei dieser Anordnung den Lichtbogen in der richtigen Grösse zu erhalten. Beide Hände sind beschäftigt, die rechte hält frei den Kohlenhalter, die linke ein dunkles Glas, damit das Auge gegen das grelle Licht geschützt ist. Diese Stellung ermüdet sehr schnell, weshalb die rechte Hand nicht mehr im Stande sein kann, die gleiche Lichtbogenlänge dauernd zu erhalten, was namentlich beim Löthen von grösseren Platten störend wirkt. Die Pausen des Ausruhens häufen sich mehr und mehr, je länger gearbeitet werden muss. Abgesehen davon, dass der linke Arm in der gebeugten Stellung wesentlich zur Ermüdung beiträgt, ist es ein grosser Nachtheil, dass die linke Hand nicht frei ist. Während des Löthens bemerkt der betreffende Arbeiter, dass die Strom- oder Spannungsverhältnisse nicht ganz die richtigen sind, dass noch etwas Coakspulver aufzustreuen ist, oder dass Metallstückchen in die Naht einzulegen wären und dergleichen mehr, entweder muss er das Löthen unterbrechen oder seine Wünsche einer zweiten Person mittheilen. Wie misslich dies ist, weiss jeder, der schon unter ähnlichen Verhältnissen zu arbeiten hatte.

Während ich den im Nachstehenden beschriebenen Kohlenhalter anfertigen liess, verschaffte ich mir die in obigem Aufsatz citirte Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure[2]), um zu erfahren, ob daselbst geeignetere Kohlenhalter angegeben wären. In der That fand sich daselbst in der Fig. 6 S. 283 ein schlittenartiges Geräth, um auf ebenen Blechen rasch längere Löthungen auszuführen. Offenbar hat sich hier-

1) Rühlmann, Elektrotechn. Zeitschrift Bd. 8 S. 467 (1887).

2) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Bd. 31 S. 283 und 863 (1887).

bei dem Erfinder der Gedanke aufgedrängt, dass die Arbeit durch Unterstützung des Kohlenhalters leichter und sicherer auszuführen wäre. Indessen besitzt dieser Apparat zur Herstellung des Lichtbogens Hebel, Federn und Gelenke, was mir entbehrlich zu sein scheint.

Fig. 1 stellt den Kohlenhalter in ein Viertel der natürlichen Grösse dar. Aus einem 2 cm dicken Brett wurde die halbe Ellipse *aa bb* mit mit den Halbaxen 11,6 und 8,4 cm herausgesägt und aus dieser wieder das Stück *c*. Der obere Theil *aa* erhält von oben her eine Nuth zur

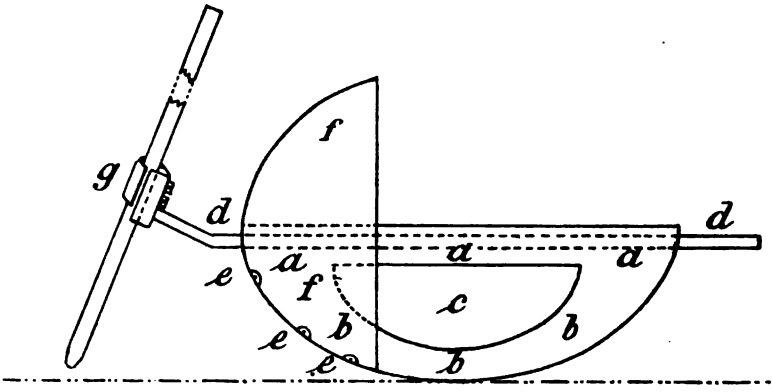


Fig. 1. 1/4 der natürl. Grösse.

Aufnahme des nackten Kupferdrahtes *dd* von 6,5 mm Durchmesser. Die Nuth wird durch ein Holzstäbchen zugeleimt, wie dies bei der Bleistiftfabrication üblich ist. Hierauf wird *aa*, der Hand entsprechend, gut abgerundet, während der untere Theil *bb* nur eine leichte Rundung der Kanten zeigt, wodurch die Stütze breiter wird, damit der Halter nicht zur Seite wackelt. Zum Schutz gegen die hohe Temperatur und die umhersprühenden Funken dient der aus dünnem Blech hergestellte Schirm *ff*, welcher bei *ee* aufgeschraubt ist und die Form eines Ellipsoidenstückes besitzt.

Was die Fassung der positiven Kohle betrifft, so halte ich sowohl die Kupferhülse mit Schraube, als auch die in neuerer Zeit verwendete Scheere, deren Backen durch Reibung oder einen kleinen Keil zusammengehalten werden, nicht gerade für das Beste. Die Schraube verliert infolge der hohen Temperaturen, denen sie ausgesetzt ist, viel von ihrer Beweglichkeit, weshalb sie wohl durch die Scheere ersetzt worden ist. Aber auch diese muss sehr gut construirt sein, wenn sie nicht dem gleichen Schicksal verfallen soll, sodann gestattet sie nur, wie es a. a. O. heisst, „Kohlen von etwas verschiedenem Durchmesser zu verwenden"; denn sonst würde die Kohle wackelig, weil ihre Berührung nur an zwei

Stellen stattfindet, was sich indessen durch Dickermachen der Scheerenbacken wesentlich vermindern liesse.

Viel geeigneter hierfür ist die Federklemme *g*, welche in Fig. 2 im Querschnitt in halber natürlicher Grösse angegeben ist. *h* ist ein 2,5 cm langes Messingstück, an welches bei *ii* die 1,5 cm breite, starke Feder *k* angeschraubt ist. Hier findet eine Berührung an drei Stellen statt und zwar jedesmal auf einer längeren Strecke, auch lassen sich dabei Kohlen von wesentlich verschiedenem Durchmesser verwenden. Das Ende des Kupferstabes *dd* ist entweder mit dem Zuleitungskabel verlöthet oder durch eine Klemme damit verschraubt.

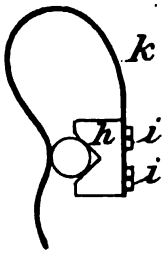


Fig. 2.
½ der natürl. Grösse.

Die Bildung des Lichtbogens und die Regulirung seiner Länge lässt sich sehr bequem und sicher durch diesen wiegenmesserähnlichen Handgriff ausführen, ohne den Arm zu ermüden. Man löthet gegen sich, so dass *bb* (Fig. 1) längs der zu bildenden Löthnaht bewegt wird. Hinderlich wird aber diese Art, wenn zwei Platten theilweise übereinander behufs Verlöthung gelegt sind, oder, wenn man entdeckt, dass einzelne Stellen eines Nachlöthens bedürfen. In diesem Falle lässt sich der Kupferstab *dd* mit etwas grosser Reibung in seiner Nuth drehen, so dass der Theil *bb* neben der Löthnaht, also auf glatter Oberfläche hingleitet. Ist man indessen gezwungen, frei zu löthen, so stört diese Form keineswegs; sie ähnelt mehr einem Schlägerkorb, während der Bernados'sche Griff mehr mit einer Glocke übereinstimmt.

Um das Auge gegen das blendende Licht zu schützen, muss bei Bernardos der Arbeiter in der linken Hand ein dunkles Glas halten. Abgesehen davon, dass die Hand frei sein sollte, wie oben schon erwähnt worden ist, so ist der Schutz kein genügender. Wohl ist das Auge gegen den Lichtbogen direct geschützt, indessen beleuchtet er seine Umgebung so intensiv, dass das davon zurückgestrahlte Licht, welches seitlich in das Auge eintritt, dieses noch zu sehr blendet, was ich wiederholt empfunden habe, namentlich bei meiner Arbeit über die Spannungsverhältnisse des elektrischen Lichtbogens [1]). Das beste Mittel in dieser Hinsicht ist eine gut construirte Brille. Die Gläser, aus dunklem Rauchglas gefertigt, müssen die Augenhöhle fast ganz umschliessen, so dass in das Auge kein seitliches Licht gelangen kann. Dies lässt sich am sichersten durch gewölbte Gläser erreichen. Die Brillenstangen dürfen nicht aus Federn bestehen, die sich um das Ohr legen, sondern

1) Nebel, Diese Zeitschrift Bd. 22 S. 527 (1886); Centralblatt für Elektrotechnik Bd. 8 S. 619 (1886).

sie müssen aus zwei ungleich langen Stangen zusammengesetzt sein, welche gerade über dem Ohr ein sehr bewegliches Gelenk haben. Eine derartige Brille wird durch Anziehen der Gesichtsmuskeln oder durch eine passende Bewegung des Kopfes leicht auf der Nasenwurzel verschoben, um geschickt darüber hinwegsehen zu können. Die linke Hand bringt sie wieder in die richtige Lage, sobald der Blick nach dem Lichtbogen gerichtet werden muss.

Stuttgart, Techn. Hochschule, März 1888.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 7. Februar 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Dr. R. Gärtner bespricht und demonstrirt mehrere von ihm construirte Apparate.

Herr J. C. Pürthner hält den angekündigten Vortrag „über die Gleichrichtung von Wechselströmen", wozu Herr Prof. Dr. Lewandowsky einige Bemerkungen macht.

Schliesslich demonstrirt der Secretär eine Collection neuer photographischer Aufnahmen für wissenschaftliche Zwecke.

Als neue Mitglieder werden aufgenommen die Herren: Landes-Schulinspector Adam, A. Haschek und K. Tuma.

Wien, 21. Februar 1888.

Der Secretär.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 21. Februar 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Der Präsident theilt der Versammlung das erfolgte Ableben des gewesenen Mitgliedes Dr. Josef Schreder mit, worauf sich dieselbe zum Zeichen des Beileides erhebt.

Herr Hofrath Prof. Dr. J. Stefan hält den angekündigten Vortrag „über die Herstellung intensiver magnetischer Felder".

Hierauf spricht Herr Dr. H. Molisch über „die Herkunft des Salpeters in der Pflanze".

Schliesslich demonstrirt Herr Prof. Dr. S. Exner einen neuen Beleuchtungsapparat (Patent Leiter).

Wien, 6. März 1888.

Der Secretär.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 6. März 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr C. Hazura hält den angezeigten Vortrag: „Ueber trocknende Oele".

Herr Prof. Dr. R. Lewandowsky bespricht und demonstrirt „eine neuartige Inductionsmaschine (Patent Gläser)."

Herr Prof. Dr. Hugo R. v. Perger wird als neues Mitglied aufgenommen.

Wien, 20. März 1888.

Der Secretär.

Kosten der elektr. Beleuchtung. — Elektr. Beleuchtung des Stadttheaters in Nürnberg. — Allseitige Anerkennung der elektrischen Theaterbeleuchtung. — Elektr. Beleuchtung in Bremen und Wien. — Verschiedenes. Brand des Hôtel Gütsch. — Isolirender Kitt. — Woodwards neue Batterie. — Die E. M. K. der Elemente mit Chrom- und Salzsäure. — **Finanzielle und industrielle Nachrichten.** Gründung der Actiengesellschaft »Westfälisches Nickelwalzwerk«. — Eintritt von Industriellen in die Firma Deutsche Elektricitätswerke zu Aachen. — Submission auf die elektrische Beleuchtung der amerikanischen Stadt Urbana. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, *Verlagsbuchhandlung.*

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig**

ist erschienen:

der fünfte Jahrgang 1888

des

Kalender für Elektrotechniker.

Herausgegeben von

F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant geb. Preis 4 M., dazu Beilage brosch. 60 Pf.

Der neue Jahrgang hat abermals viele Erweiterungen erfahren, sowohl in der Physik (Magnetismus, Photometrie), als in der Elektrotechnik (Messmethode). Mehrere Tabellen sind neu berechnet und an passenden Orten Zusätze gemacht worden. In Anbetracht des stets wachsenden Materials erschien es nothwendig, diesmal einen Theil desselben abzucheiden und in einer Beilage unterzubringen.

Nachstehende Inhaltsübersicht wird die jetzige Vertheilung des umfangreichen Materials auf Taschenbuch und Beilage veranschaulichen.

Über 500 Illustrationstafeln und Kartenbeilagen.

Soeben erscheint in gänzlich neuer Bearbeitung

MEYERS

KONVERSATIONS-LEXIKON

VIERTE AUFLAGE.

Bibliographisches Institut in Leipzig.

Achtzig Aquarelltafeln. 3000 Abbildungen im Text.

256 Hefte à 50 Pfennig. — 16 Halbfranzbände à 10 Mark.

(6.5)

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(13a/5)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a/5)

Verlag von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig.**

Taschenbuch für Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von Ingenieur **S. Freiherr v. Gaisberg.**

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

klein 8. VIII und 128 Seiten. Preis gebunden 2 M. 40 Pf.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdrießen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden."

NOV 13 1888

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 6. Heftes.

Ueber Disjunctionsströme. Von Dr. C. A. Mebius. S. 337.
Ueber den Einfluss der Flut auf die Bewegungen des Flutträgers und des Fluterzeugers. Von K. Fuchs. S. 348.
Ueber die Brechungsexponenten der Metalle. Von A. Kundt. S. 357.
Ueber den Glimmer als Dielektricum. Von Dr. Ignaz Klemencic. S. 375.
Zur genaueren Bestimmung des specifischen Gewichtes. Von A. Kurz. S. 396.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 20. März 1888. S. 399.
Eingesendete Bücher. S. 400.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,

Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 5).

Jahrgang 1888 Nr. 14 enthält:

Rundschau. — **Correspondenz.** — **Ueber Wattmesser.** Von M. K. — **Eine neue Methode zur Untersuchung arbeitender Batterien.** (Fortsetzung.) Von Ludwig von Orth, Assistent für Elektrotechnik an der kgl. technischen Hochschule zu Berlin. — **Neue Spiegelgalvanometer von G. L. Addenbrooke.** — **Literatur.** Dr. Robert Weber, Aufgaben aus der Elektricitätslehre. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Elektrische Beleuchtung. Elektrische Beleuchtung in Schwabing bei München. — Elektr. Beleuchtung des Theaters in Magdeburg. — Elektr. Beleuchtung von zwei neuen Dampfbooten der Düsseldorfer Dampfschiffahrtsgesellschaft. — Geschäftsbericht der Deutschen Continental-Gasgesellschaft zu Dessau. — Elektr. Beleuchtung in Altenessen, Wien, Terni, Mailand und Brüssel. — Verschiedenes. Magdeburg (Blitzableiter). — Zur Berechnung von Blitzableitungen. — Auxanoskop. — 1000 kerzige Glühlampen. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 15 enthält:

Rundschau. — **Eine neue Methode zur Untersuchung arbeitender Batterien.** (Fortsetzung.) Von Ludwig von Orth, Assistent für Elektrotechnik an der kgl. technischen Hochschule zu Berlin. — **Ein einfacher Kohlenhalter zum Löthen und Schweissen der Metalle mittels des elektrischen Lichtbogens.** Von Dr. B. Nebel. — **Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens.** Das Kleingefüge des Eisens und dessen elektrisches Leitungsvermögen. — Kupferdrähte mit Eisen- oder Stahlseele. — Telephonische Apparate von Mix-Genest. — **Literatur.** Prof. Dr. H. Krebs und Postrath C. Grawinkel, Jahrbuch für Elektrotechnik für das Jahr 1887. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachrichten. Geh. Reg.-Rath Dr. Werner Siemens in den Adelstand erhoben. — Dr. K. Strecker zum Reichstelegraphening enieur ernannt. — Elektrische Kraftübertragung. Elektrische Fahrbahn zwischen Vevey und Chillon. — Telegraphie. Telegraphie in China. — Elektrische Beleuchtung. Bericht des Wiener Stadtbauamtes über die Kosten der elektrischen Beleuchtung im neuen Rathhause. — Elektrische Schiffsbeleuchtung. — Elektrische Beleuchtung in Löwen. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinen-Ausstellung, München 1888. — Neue Elektroden. — Schmelzen von Draht. — Elektrische Stempelmaschine. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, Verlagsbuchhandlung.

JUL 13 1888

Ueber Disjunctionsströme.

Von

Dr. C. A. Mebius.

Die Existenz der elektromotorischen Kraft des elektrischen Funkens ist neulich von Herrn Lecher zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht worden [1]). Da er in seiner Arbeit zu folgenden Resultaten kommt:

1. „dass diese elektromotorische Kraft des Funkens physikalisch sehr unwahrscheinlich ist", und
2. „dass sämmtliche Beweise Edlund's für diese Kraft unrichtig sind",

da ich aber selbst in zwei Abhandlungen [2]) zu entgegengesetzter Ueberzeugung gekommen bin, so erlaube ich mir im folgenden einige Bemerkungen gegen die Beweise des Herrn Lecher zu machen. Ich werde im folgenden zeigen, dass man auf Grund der von Herrn Lecher angestellten Beobachtungen nicht berechtigt ist, die von ihm gemachten Schlüsse zu ziehen, und ich werde auch einige neue Experimente mittheilen, die unzweideutig die Existenz der elektromotorischen Kraft des Funkens beweisen.

Die Hauptanmerkungen gegen die Schrift des Herrn Lecher sind folgende:

a) Herr Lecher „fasst seine Aufgabe nicht dahin auf, Edlund auf seinen oft complicirten experimentellen Pfaden allüberallhin zu folgen". Hätte er dies aber gethan, und zugleich auch von anderen Arbeiten über Disjunctionsströme Notiz genommen, so hätte er Material genug gefunden, das mit seiner Theorie unvereinbar ist.

b) Die von der „spuckhaften" elektromotorischen Gegenkraft erzeugten Ströme folgen, nach Herrn Lecher, nicht dem Ohm'schen Gesetz (Versuche 3, 4); man kann doch ohne weiteres annehmen, dass ihre Stärke bei Vergrösserung des Widerstandes abnimmt.

1) Lecher, Diese Zeitschrift Bd. 23, S. 575, (1887). Wiener Akad. Bd. 95, S. 628, (1887).

2) Mebius, Öfvers. af kgl. Sv. Vet. Akad. Förh. Nr. 6, S. 15, (1883) und Öfvers. af kgl. Sv. Vet. Akad. Förh. Nr. 6, S. 133, (1885). Ref. in den Beiblättern Bd. 8, S. 318, (1884) und Bd. 10, S. 783, (1886).

Ich gebe in Fig. 1 die bekannte Versuchsanordnung Edlund's wieder, die sowohl Herr Lecher jetzt als auch ich selbst bei meinen früheren Versuchen mit kleinen Modificationen angewandt haben. AB sind die Saugkämme einer Influenzmaschine, ab die Elektroden. Von a führt ein isolirter Draht über c nach i; der Strom der Maschine theilt sich hier zwischen dem Galvanometer G und einem Zweigdraht ihk, geht von k, wo eine Ableitung zur Erde angebracht ist, durch einen Widerstand m über e nach d. Wird die Maschine in Thätigkeit gesetzt, so springen bei bd Funken über und das Galvanometer zeigt einen Ausschlag. Wird zwischen c und e eine unterbrochene Leitung eingeschaltet, und die Elektroden einander so genähert, dass ein Theil des Entladungsstromes bei fg in Funken übergeht, so nimmt der Ausschlag des Galvanometers im allgemeinen zu, und kann unter Umständen um mehr als das 70-fache [1]) steigen. Herr Edlund nimmt auf Grund dieser Thatsache eine elektromotorische Gegenkraft in dem Funken an.

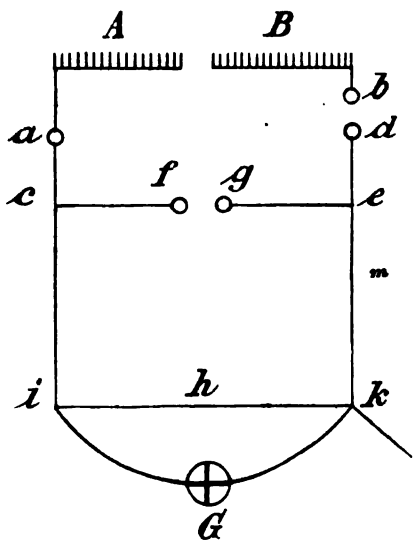


Fig. 1.

Herr Lecher will jedoch die Vergrösserung des Ausschlages auf Rechnung der im Galvanometer entstehenden Extraströme setzen, und besonders soll die Anwendung der Galvanometerbrücke ihk die ganze Erscheinung hervorrufen.

Herr Lecher verweist auf die Bemerkungen des Herrn Wiedemann [2]), nach denen eine Polarisation bei fg doch nie grössere Elektricitätsmengen ergeben kann, als die sind, welche sie erzeugen. Hierzu will ich nur bemerken, dass es fraglich ist, ob man die Vorgänge im Funken mit denen der galvanischen Polarisation gleichstellen kann. Noch liegen keine Beobachtungen vor, die zu einer solchen Annahme berechtigen. Ueber die Vorgänge im Funken wissen wir ja nur sehr wenig; jedenfalls scheint es mir nicht wie dem Herrn Lecher [3]) „fast überflüssig, der Sache weitere Aufmerksamkeit zu schenken".

---

1) Mebius, Öfvers. af kgl. Vet. Akad. Förh. Nr. 6, S. 25, (1883).
2) G. Wiedemann, Elektricität Bd. 4, S. 743.
3) Lecher, a. a. O. S. 576.

Ob es ferner mehr wahrscheinlich ist, dass der Entladungsstrom durch Induction eine grössere Elektricitätsmenge als die entladene in Bewegung setzt, als dass dies durch Disjunction geschieht, lasse ich dahingestellt bleiben.

Von schon bekannten Thatsachen, die mit der Hypothese des Herrn Lecher nicht in Einklang zu bringen sind, führe ich nur folgende an:

Schaltet man bei *m* statt des geradlinigen Widerstandes eine Inductionsrolle von gleichem Widerstande ein, so erhält man einen viel kleineren Galvanometerausschlag. Von den beiden in der Rolle erzeugten Extraströmen geht also der inverse in grösserer Quantität durch den Funken. Es ist einleuchtend, dass dies auch der Fall sein muss, wenn die Extraströme im Galvanometer erzeugt werden, und also muss der inverse Extrastrom stärker als der directe Extrastrom auf die Nadel wirken. Die Extraströme müssen also den Galvanometerausschlag verkleinern, was in directem Widerspruch zu der Hypothese des Herrn Lecher steht. Wenn die bei *m* eingeschaltete Rolle mit einer passenden Brücke versehen ist, so ändert sich der Galvanometerausschlag nicht, aber doch nicht, wie Herr Lecher glaubt, weil der von der zweiten Rolle durch den Funken gehende Theil des Extrastromes sich zwischen Galvanometer und Brücke theilt, sondern weil dieser Theil überhaupt unmerklich ist. Die Widerstände des Galvanometers und der Brücke waren nämlich sowohl bei Herrn Edlund's als auch bei meinen Versuchen ungefähr gleich und nicht, wie bei denen des Herrn Lecher, im Verhältnisse von etwa 100 : 1.

Weit entscheidender jedoch reden folgende von mir gemachte Beobachtungen, die ich noch einmal in extenso wiedergebe [1]). „Dabei wurde eine kleine Holtz'sche Maschine angewandt, und eine Inductionsrolle entweder mit oder ohne Brücke in der Galvanometerleitung *e G c* (Fig. 1) nebst einem Widerstande von 9 Ohm (ein Bleistift, Faber Nr. 1, zwischen Quecksilbernäpfchen) eingeschaltet. Ein 2 mm langer Funke entstand bei *f g* in der Luft. Die Schlagweite bei *b d* war 10 mm. Vor dem Galvanometer war keine Brücke.

Dabei bekam ich folgende Ausschläge in Scalentheilen:

Ohne Rolle und Brücke:	Mit Rolle ohne Brücke:	Mit Rolle und Brücke:
15,0	1	15,0
14,5	1	14,5

. . . Wenn sich kein Funke bei *f g* bildete bekam ich einen Ausschlag von 9 Scalentheilen. Der Ausschlag vergrössert sich also, obgleich der Entladungsstrom sich theilt, wenn nur Funken bei *f g* übergehen, und

1) Mebius, Öfvers. af kgl. Vet. Akad. Förh. Nr. 6, S. 136, (1885).

dies ist bekanntlich Prof. Edlund's erster experimenteller Beweis für die Existenz einer elektromotorischen Kraft in dem Funken".

Wie kann nun Herr Lecher behaupten, dass die Ursache der vergrösserten Galvanometerausschläge eine Folge der Galvanometerbrücke sei, da eine solche gar nicht vorhanden war?

Obschon das oben Gesagte genügen konnte, um die Unhaltbarkeit der Hypothese des Herrn Lecher nachzuweisen, will ich jedoch folgendes anführen, theils wegen der Wichtigkeit der Sache, theils auch weil Herr Lecher Experimente in derselben Richtung gemacht hat (Versuch 5). Schon in der ersten Publication [1]) des Herrn Edlund über die elektromotorische Kraft des Funkens hat er auch Versuche beschrieben, bei denen das Galvanometer G und die Brücke ihk durch eine Polarisationszelle ersetzt waren. Nachdem die Maschine eine bestimmte Zeit hindurch gewirkt hatte, wurde das Galvanometer durch einen Commutator mit der Zelle in Verbindung gesetzt. Wenn keine Funken bei fg übersprangen, so betrug der erste Ausschlag des Galvanometers 4 Scalentheile; wenn sich aber Funken bei fg bildeten, war der erste Ausschlag 26,5. Die Ausschläge sind daher nicht, wie Herr Lecher angibt, immer kleiner mit Funken bei fg als ohne Funken. Dies scheint auch Herr Lecher zu wissen, was aus seiner Note (S. 584) hervorgeht: „Es ist vielleicht die Ausserachtlassung dieser Umstände" (hinlängliche Grösse und Entfernung der Elektroden in der Polarisationszelle) „die Ursache, warum Edlund bei Polarisationsversuchen andere Resultate erhielt". Die Resultate des Herrn Lecher, die weder durch Angabe von Funkenlänge, Widerstand der Polarisationszelle noch Beobachtungszahlen gestützt sind, beweisen also nur, dass man solche Anordnungen treffen kann, bei denen die Disjunctionsströme eine schwächere Polarisation hervorrufen als der Entladungsstrom. Dies ist ja doch ganz selbstverständlich, da es bekannt ist, dass die elektromotorische Kraft des Funkens mit der Funkenlänge abnimmt; man kann also durch Verkleinerung der elektromotorischen Kraft und durch Vergrösserung des Widerstandes der Strombahn die Disjunctionsströme beliebig schwächer machen. Aber dadurch verlieren die bei günstigen Anordnungen erhaltenen Resultate des Herrn Edlund nichts von ihrer Beweiskraft.

Ich wende mich jetzt gegen die Versuche des Herrn Lecher, die „direct die Unhaltbarkeit der Edlund'schen Idee" zeigen sollen.

In Versuch 4 schaltet Herr Lecher einen Widerstand von 10^4 Ohm bei m ein. Wenn Funken bei fg überspringen, ist absolut kein Ausschlag wahrzunehmen. Ohne Funken bei fg bekommt man einen Aus-

1) Edlund Öfvers. af kgl. Vet. Akad. Förh. Nr. 5, S. 336, (1868). Pogg. Ann. Bd. 134, S. 347, (1868).

schlag von etwa 13, einerlei ob der Widerstand ein- oder ausgeschaltet ist. „Es ist nun schwer erklärlich“ [1]), sagt Herr Lecher, „warum der Widerstand *m*, dessen Einschalten den Strom der Maschine nicht beeinflusst, den in gleicher Richtung und doch jedenfalls auch mit Stössen von *g* über *G* nach *f* fliessenden Disjunctionsstrom ganz aufheben soll“. Wenn man sich des enormen inneren Widerstandes der Maschine erinnert, welcher nach Rosetti [2]) 570 Millionen Siemens bei acht Umdrehungen der Scheibe in der Secunde beträgt, so ist 10^4 Ohm im Vergleich dazu verschwindend, und man bekommt daher denselben Ausschlag, dieser mag eingeschaltet sein oder nicht. Im Vergleich zu dem übrigen Widerstande der Strombahn des Disjunctionsstromes ist 10^4 Ohm sehr bedeutend, und durch die Einfügung desselben wird daher der Disjunctionsstrom verschwindend. Dies geht deutlich aus der Angabe des Herrn Lecher hervor, dass nämlich, wenn der Widerstand *m* nicht eingeschaltet war, das Galvanometer einen Ausschlag 48 ergab. Der Widerstand in der Strombahn konnte höchstens 60 Ohm betragen haben (der Widerstand der Galvanometerbrücke ist leider nicht angegeben); bei Einfügung von 10^4 Ohm hat man dann unter Voraussetzung, dass der Ausschlag 48 nur von dem Disjunctionsstrom herrührt, einen Ausschlag von 0,03 zu erwarten, was mit der Beobachtung des Herrn Lecher stimmt.

Im Versuche 3 ändert Herr Lecher den Widerstand der Galvanometerbrücke von etwa 8 bis gegen 40 Ohm, merkt aber nicht, dass dabei auch der Widerstand der Strombahn des Disjunctionsstromes vergrössert wird, und dass also die Disjunctionsströme schwächer werden müssen. Seine Schlussfolgerung, „dass bei einer viermal so empfindlichen Schaltung des Galvanometers auch der Ausschlag der hier nicht geänderten elektromotorischen Gegenkraft viermal so gross sein müsse“, ist daher ganz illusorisch.

Folgende approximative Berechnung „zeigt wohl ziemlich deutlich, wie es „mit der Beweisführung des Herrn Lecher“ bestellt ist“.

Die Beobachtungen des Herrn Lecher werden hier wiedergegeben:

Tabelle I.

Brücke-Widerstand	Nur Funke bei *bd*	Funke bei *bd* und bei *fg*
Nr. 1	35	49
Nr. 2	55	55
Nr. 3	100	72
Nr. 4	144	90

1) A. a. O. S. 583.

2) Il nuovo Cimento ser. II t. XII 89, 177.

Ich nehme an, dass die Widerstände Nr. 1 bis Nr. 4 dieselben wie im Versuche 2 waren, also 8,1, 16,7, 27,5, 41,2 Ohm. Dies geht nicht deutlich aus der Abhandlung des Herrn Lecher hervor, er sagt vielmehr, dass sie in einem ganz willkürlichen Verhältnisse stehen; es scheint jedoch auf Grund folgender Berechnung, dass die Annahme nicht ganz unberechtigt ist. Wenn I und i die Stromstärken des ungetheilten Entladungsstromes, n und m die Widerstände der Brücke und des Galvanometers ($m = 930$ Ohm) sind, so ist

$$I = \frac{m+n}{n} i. \qquad (1$$

Aus der zweiten Columne der Tabelle berechnet, ist $I = 4053, 3118, 3482, 3394$, Mittel: 3512. Die Uebereinstimmung ist wohl nicht vollkommen, aber doch hinreichend. (Jedenfalls nicht schlimmer als das, was dieselbe Rechnung aus dem Versuche 2 des Herrn Lecher ergibt; für I erhält man dort nämlich 6949, 6973, 6267, 5540.) Dieser Strom wird sich nun, wenn die Kugeln fg einander hinlänglich genähert sind, zweimal theilen. Entsteht im Funken eine elektromotorische Kraft e und ist μ der Widerstand des Zweiges $egfc$, so wird nach den Kirchhoff'schen Gesetzen der Galvanometerausschlag

$$i = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{I\mu + e}{r+\mu}; \qquad (2$$

r bedeutet den Widerstand des Zweiges $ei\left\{\begin{matrix}h\\G\end{matrix}\right\}ke$, also

$$r = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} + \nu \qquad (3$$

wo ν der Widerstand von ci und ke ist. Aus der Formel ist nun zu ersehen, dass der Ausschlag nicht im Verhältnis zu dem Empfindlichkeitsfactor $\frac{n}{n+m}$ des Galvanometers wächst, wie Herr Lecher glaubt; denn dann müsste r constant sein, was nicht der Fall ist, da r mit n wächst. Führt man den Werth von r in Gl. 2 ein, so wird

$$i = \frac{I\mu + e}{m + \frac{m+n}{n}(\mu+\nu)}.$$

Der Widerstand des Funkens kann gleich Null gesetzt werden, da nach den Untersuchungen von Hittorf, Warren de la Rue und Hugo Müller und Anderen die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden von der Stromstärke unabhängig ist. Setzt man daher wie im Versuche 2 des Herrn Lecher $\mu + \nu = 2{,}5$ Ohm, so kann man $I\mu + e$

berechnen. Die erste Beobachtung liefert den Werth $I\mu + e = 59767$, und hieraus findet man die Galvanometerausschläge in den drei übrigen Beobachtungen 55,8, 58,8, 60,4. Die Beobachtungen ergaben 55, 72, 90 und die Berechnung fällt also nicht, wie Herr Lecher sagt, zu Ungunsten Edlund's aus, denn Herr Lecher bemerkt selbst ganz richtig, dass durch die Aenderung des Widerstandes ihk die über fg fliessende Elektricitätsmenge vergrössert wird, und somit auch die elektromotorische Gegenkraft bedeutend stärker als in Nr. 1 sein muss.

Im Versuche 6 beschreibt Herr Lecher eine neue Versuchsanordnung, aber kann damit keine Spur einer elektromotorischen Gegenkraft nachweisen. Ich habe darum diese Experimente des Herrn Lecher nachgemacht. Ehe ich aber diese Beobachtungen mittheile, will ich eine andere Versuchsanordnung [1]) angeben, wodurch unzweideutig die Existenz der elektromotorischen Gegenkraft bewiesen wird. A und B (Fig. 2) sind die mit den beiden Saugkämmen verbundenen Conductoren einer Holtz'schen Maschine mit zwei rotirenden Scheiben.

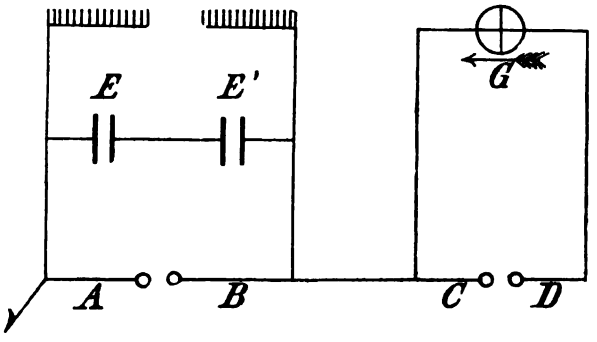


Fig. 2.

A ist zur Erde abgeleitet und B mit der einen Kugel C eines Funkenmikrometers CD verbunden. E und E' sind die Condensatoren der Maschine. Von den beiden Kugeln CD führen Leitungsdrähte zum Galvanometer G. Sämmtliche Leitungsdrähte, auch die Galvanometerwindungen sind Kupferdrähte 1,5 mm in Diameter und mit einer dicken Schicht von Guttapercha isolirt, so dass der äussere Diameter 5 mm beträgt. Das ganze System CGD wird mit positiver Elektricität geladen. Wenn Funken bei AB überspringen, so ist dies auch bei CD der Fall, wenn sich nur die Kugeln einander hinreichend nahe befinden. Wird D zur Erde abgeleitet, so strömt die positive Elektricität über G zur Erde, ohne bei CD Funken zu bilden, und das Galvanometer zeigt einen Ausschlag, der von einem dem Pfeile ent-

1) Vergl. Hertz, Wied. Ann. Bd. 31 S. 421 (1887).

gegengerichteten Strom herrührt. Ich werde im folgenden diese Stromrichtung negativ nennen, und den Ausschlag eines Stromes in der Richtung des Pfeiles als positiv rechnen.

Ist D isolirt, aber der Abstand CD so gross, dass keine Funken hier überspringen, so erhält man dennoch negative Ausschläge, wenn die Isolirung mangelhaft ist; ist aber die Isolirung gut, so zeigt das Galvanometer keinen Ausschlag, wenn ein Funkenstrom zwischen A und B hinübergeht. Die Elektricitätsmenge, die den Theil GD des Systems CGD ladet, geht bei der Entladung zwischen A und B denselben Weg durch das Galvanometer wieder zurück, so dass bei rascher Aufeinanderfolge der Funken bei AB die entgegengesetzt gerichteten Impulse einander aufheben [1]). Werden nun die Kugeln CD einander hinreichend genähert, so dass Funken überspringen, so gleicht sich ein Theil der positiven Elektricität des Systems GD durch den Funken CD aus. Wäre im Funken keine elektromotorische Kraft vorhanden, so sollte man einen (kleinen) negativen Ausschlag erwarten. Die Beobachtungen weiter unten zeigen jedoch (Tab. II, Verticalreihe 3), dass man bei hinlänglich grosser Funkenlänge positive Ausschläge bekommt. Um zugleich den Einfluss der Extraströme zu zeigen, wurde folgende Anordnung getroffen. Das Galvanometer war ein Differentialgalvanometer, dessen beide Drähte auf derselben Rolle nebeneinander gewickelt waren und in vier Klemmschrauben endigten. Die beiden Drähte waren jedoch hintereinander geschaltet, aber statt eines kurzen Verbindungsdrahtes wurde eine lange Leitung zwischen den beiden Drähten eingeschaltet, in der sich eine Inductionsrolle befand. Diese Rolle hatte 154 Windungen und war in einem Abstand von mehr als 4 m von dem Galvanometer isolirt aufgestellt und zwar so, dass, wenn sie nicht mit dem Galvanometer in leitender Verbindung war, und ein starker Strom durch sie geschickt wurde, die Galvanometernadel keine Ablenkung zeigte. Die Rolle konnte durch einen kurzen Neusilberdraht von gleichem Widerstande ersetzt werden. Man konnte also die Extraströme verstärken, ohne den Widerstand der Strombahn zu ändern. Wenn nachher eine Brücke vor dem Galvanometer angebracht wurde, diente diese zugleich als Brücke vor der Rolle, und man konnte also den Einfluss der Extraströme untersuchen, ohne das System „Rolle mit Brücke“ zu verdoppeln. Die Schlagweite bei AB war 5 mm, und der Abstand CD ist in der Tabelle unter „Funkenlänge“ angegeben. Die Maschine wurde so schnell gedreht, dass acht Funken

2) Wenn Herr Lecher (S. 585) sagt, dass nach Edlund der Galvanometerausschlag durch das Product Masse mal Geschwindigkeit bedingt wäre, so kann eine solche Behauptung nichts dazu beitragen, die vorliegende Frage zu erläutern, sondern muss wohl anders aufgefasst werden.

in der Secunde übersprangen. Die Ausschläge sind in Scalentheilen angegeben.

Tabelle II.

Ohne Brücke vor dem Galvanometer		
Funkenlänge	Mit Rolle	Die Rolle ist durch den Neusilberdraht ersetzt
0,50 mm	— 29,6	— 18,5
0,75 mm	— 19,7	+ 19,5
1,00 mm	— 7,2	+ 58,5
1,50 mm	— 1,0	+ 70,0

Aus diesen Zahlen geht folgendes deutlich hervor:

1. Die Extraströme lenken die Nadel in negativer Richtung ab. Dies fällt mit der schon längst bekannten Thatsache zusammen, dass der mit dem Entladungsstrom im Funken gleich gerichtete Extrastrom der intensivere ist, wenn der Funke in Luft von Atmosphärendruck überschlägt.

2. Wächst die Funkenlänge, so werden die negativen Ausschläge bei starken Extraströmen kleiner; bei schwächeren werden sie positiv und von zunehmender Grösse. Diese positiven Ausschläge kann man wohl schwerlich erklären, wenn man nicht eine elektromotorische Gegenkraft im Funken annimmt. Sie zeigen auch, dass, wie bekannt, diese Gegenkraft mit der Funkenlänge wächst.

Leider hörten die Funken auf, sobald der Abstand CD grösser als 1,5 mm wurde, sonst würde man ohne Zweifel auch bei den stärkeren Extraströmen positive Ausschläge erhalten haben.

Im folgenden Versuche wurde ein Neusilberdraht als Brücke vor dem Galvanometer angebracht. Die Schlagweite AB war 9 mm. Ersetzt man nun die Rolle durch den Neusilberdraht von gleichem Widerstande, so schwächt man die Extraströme, ohne etwas anderes zu ändern. Nach Herrn Lecher's Hypothese sollte man kleinere Ausschläge erhalten. Die Beobachtungen ergaben folgende Resultate:

Tabelle III.

Mit Brücke vor dem Galvanometer		
Funkenlänge	Mit Rolle	Die Rolle durch den Neusilberdraht ersetzt
0,40	53,7	54,2

Die Ausschläge mit und ohne Rolle sind gleich, und hiermit ist also ein noch directerer Beweis, als die früheren, dafür geliefert, dass durch die Galvanometerbrücke die Einwirkung der Extraströme auf die Galvanometernadel aufgehoben wird.

Die von Herrn Lecher angegebene Anordnung war folgende. Es sei in Fig. 3 HH die Influenzmaschine, ab die beiden Elektroden; während a zur Erde abgeleitet ist, ist b durch den Draht e mit der einen Platte c eines Condensators cc' verbunden. Von der zweiten

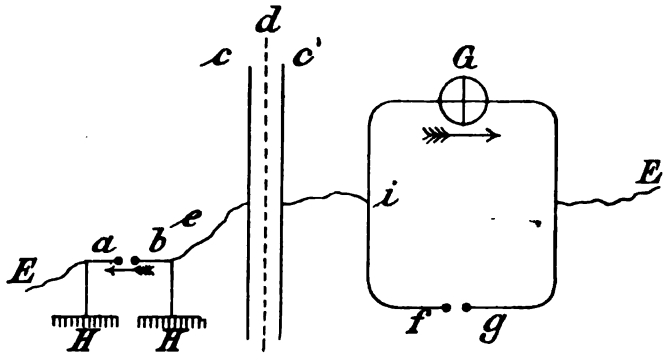


Fig. 3.

Platte c' geht eine Doppelleitung über ein Galvanometer iGE und zugleich parallel über eine Funkenstrecke $ifGE$ zur Erde. Mit dieser Anordnung habe ich nur sehr kleine Funken bei fg erhalten können. Die Disjunctionsströme sind daher schwach. Bei den grössten Funkenlängen sprangen die Funken sehr unregelmässig über; ich habe jedoch constatiren können, dass man auch mit dieser Anordnung positive Ausschläge bekommt, die aber sehr unregelmässig waren. Diese positiven Ausschläge rühren also von einem dem Pfeile entgegengesetzt gerichteten Strome her und können nur der elektromotorischen Kraft des Funkens zugeschrieben werden. Da aber keine Messungen möglich waren, musste ich kleinere Funken wählen und bekam dann wie Herr Lecher negative Ausschläge, wenn keine Brücke vor dem Galvanometer vorhanden war. War aber das Galvanometer mit einer Brücke versehen, so bekam ich auch bei kleinen Funken positive Ausschläge. Dass hierbei nicht die Extraströme die Ursache der positiven Ausschläge waren, könnte ich ebenso wie im vorigen Versuche beweisen. Die Hilfsrolle oder ein Neusilberdraht von demselben Widerstande wurden abwechselnd zwischen den beiden Galvanometerdrähten eingeschaltet. Die Schlagweite ab war 10,5 mm; als Condensatoren dienten drei grosse Leydenerflaschen, jede mit einer äusseren Belegung von im Mittel 770 cm^2. Der Widerstand des Galvanometers war 0,43 Ohm

und der Widerstand der Brücke 0,31 Ohm. Die Beobachtungen ergaben folgende Galvanometerausschläge:

Tabelle IV.

Mit Brücke vor dem Galvanometer		
Funkenlänge	Mit Rolle	Ohne Rolle
0,17 mm	+ 9,5	10,2
0,25 mm	42,4	47,0

Aus den angeführten Beobachtungen folgt, dass bei verstärkten Extraströmen der Ausschlag sich nicht ändert, oder, wenn man einen Einfluss der Extraströme annehmen will, dass der Ausschlag durch dieselben verkleinert wird. Die negativen Ausschläge ohne Brücke sind also grösstentheils den Extraströmen zuzuschreiben, da aus den Versuchen mit der Brücke folgt, dass, wenn die Extraströme neutralisirt sind, die Disjunctionsströme einen grösseren Einfluss auf die Galvanometernadel haben als der Entladungsstrom. Bei den Versuchen des Herrn Lecher kommt noch ein Umstand hinzu. Der Widerstand seines Galvanometers war 930 Ohm, also ungefähr 2000 mal so gross, als der des meinigen. Während dieser grosse Widerstand die Stärke der Disjunctionsströme in hohem Grade beeinträchtigt, hat derselbe keinen merkbaren Einfluss auf die Stärke des Entladungsstromes, der sich also hier mehr geltend macht als bei meinen Versuchen.

Manches könnte noch hinzugefügt werden; aus dem Gesagten folgt jedoch hinreichend deutlich,

1. dass im Funken eine elektromotorische Gegenkraft existirt, und
2. dass sämmtliche Beweise des Herrn Lecher gegen die Existenz dieser Kraft unrichtig sind.

Upsala, März 1888.

Ueber den Einfluss der Flut auf die Bewegungen des Flutträgers und des Fluterzeugers.

Von

K. Fuchs.

Die Theorie der Flut zeigt, dass, wenn der Flutträger und der Fluterzeuger ihre relative Lage nicht ändern, die beiden Flutpole in den Vector (die Verbindungslinie des Mittelpunktes c_1 des Flutträgers A und des Mittelpunktes c_2 des Fluterzeugers B) und dessen Verlängerung sich einstellen. Die Oberfläche, welche die Flüssigkeit des Flutträgers dann zeigt, wollen wir die geometrische Flutfläche nennen. Die Axe der geometrischen Flutfläche liegt also im Vector.

In Wirklichkeit führen der Flutträger und der Fluterzeuger Rotationen und Revolutionen aus, und hieraus resultirt eine fortwährende Aenderung der relativen Lage der beiden Körper A und B. Es soll gezeigt werden, dass diese stetige Aenderung der relativen Lage zur Folge hat, dass nie die Axe der physischen Flut mit der Axe der geometrischen Flutfläche zusammenfällt, dass vielmehr erstere stets mit letzterer einen Winkel α bildet, den wir die Declination der Flut nennen wollen.

Denken wir uns erstens, dass der Flutträger A nicht rotirt, wohl aber der Fluterzeuger B um A läuft. Dann verschiebt sich die geometrische Flutfläche fortwährend in der Ebene der Revolution, und es entsteht die Frage, ob die physische Flut dieser Bewegung so vollkommen folgen kann, dass ihre Axe (die Verbindungslinie ihrer beiden Pole oder Gipfelpunkte) stets mit dem Vector zusammenfällt. Wir müssen verneinen; denn im günstigsten Falle ist die physische Welle eine laufende Welle, deren Umlaufszeit zufällig genau mit der Revolutionszeit zusammenfällt. Selbst dann aber verliert sie im Laufe der Zeit infolge der inneren Reibungen fortwährend an lebendiger Kraft. Der Verlust kann nur so stetig gedeckt werden, dass der vordere Abhang der Flutwelle (d. i. derjenige, welcher dem voreilenden Vector zugewendet ist) etwas unterhalb die geometrische Flutfläche, der hintere Abhang aber etwas ober die geometrische Flutfläche zu liegen kommt. Das heisst aber nichts anderes, als dass die Flutaxe gegen den Vector

in der Ebene der Revolution, entgegen der Revolution declinirt ist. Wir finden also: die Revolution verursacht nothwendig eine negative Declination der Flutaxe in der Ebene der Revolution. Wir nennen sie die Revolutionsdeclination.

Denken wir uns zweitens, dass eine Revolution von B nicht stattfindet, dass aber A Rotation besitzt. Dann wird die Flutwelle infolge der Rotation fortwährend in der Richtung der Rotation aus der geometrischen Flutfläche heraustreten; oder wenn es besser gefällt, sie wird durch die Rotation immer wieder herausgerissen. Im besten Falle können wir sie als rückläufige laufende Welle ansehen, welche stets gegen den Vector zurückläuft. Dann wiederholt sich aber der vorige Schluss, dass infolge des Verlustes an lebendiger Kraft durch innere Reibung widerum der dem Vector zugekehrte Flutabhang unter die geometrische Flutlinie, der entgegengesetzte Abhang ober dieselbe zu liegen kommen muss, und wir erhalten den Satz: Die Rotation des Flutträgers erzeugt eine positive Declination der Flut in der Ebene der Rotation. Wir nennen sie die Rotationsdeclination.

Wir können im allgemeinen sagen: Wenn der Flutträger und der Fluterzeuger in irgend welchen Bewegungen begriffen sind, dann wird der Vector seine Lage zum Flutträger stetig ändern. Wenn diese relative Drehung des Vectors in einer Ebene erfolgt, dann resultirt hieraus eine Declination der Flut in der Ebene der relativen Drehung des Vectors, aber in entgegengesetztem Sinne.

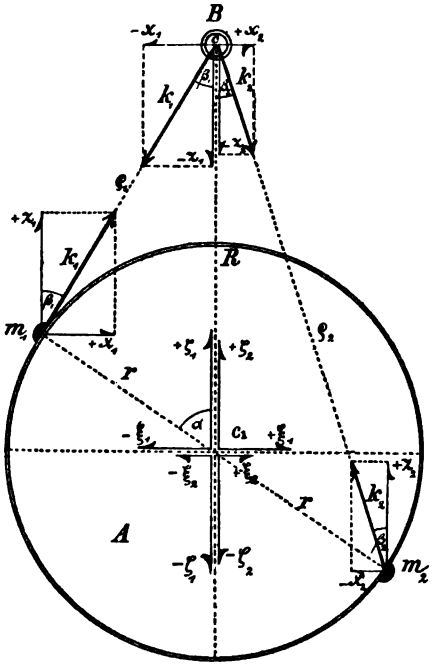


Fig. 1.

Berechnen wir nun die Kräfte, welche durch die declinirte Flut erzeugt werden.

Die Fig. 1 stellt die Verhältnisse klar dar. A, der Flutträger, ist als grosse, B, der Fluterzeuger, als kleine Kugel gezeichnet. Die Massen der Flutwellen sind der Einfachheit wegen als $m_1 = m_2 = m$ in den Polen der Flutwellen concentrirt gedacht. (Wenn man genauer rechnen will, hat man m_1 und m_2 als correspondirende Elemente der Flutwelle auf-

zufassen und die gefundenen Kräfte über die ganze Welle zu integriren.) B und m_1 ziehen sich längs der Verbindungslinie ϱ_1 an mit der Kraft

$$k_1 = \frac{m M_2}{\varrho_1^2}$$

wobei M_2 die Masse von B ist. Entsprechend ist die Anziehung von m_2 und M_2 gleich

$$k_2 = \frac{m M_2}{\varrho_2^2}.$$

Diese Kräfte wirken sowohl an m_1 und m_2, als auch im Centrum von B. Die Winkel, welche ϱ_1 und ϱ_2 mit dem Vector machen, geben die Werthe

$$\sin \beta_1 = \frac{r \sin \alpha}{\varrho_1} \qquad \sin \beta_2 = \frac{r \sin \alpha}{\varrho_2}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{R - r \cos \alpha}{\varrho_1} \qquad \cos \beta_2 = \frac{R + r \cos \alpha}{\varrho_2}$$

wobei R der Vector (die Entfernung der Mittelpunkte von A und B), r der Radius von A und α die Declination der Flut ist. Wir erhalten nun als Radialcomponenten und Transversalcomponenten von k_1 und k_2:

$$z_1 = k_1 \cos \beta_1 = \frac{m M_2 (R - r \cos \alpha)}{\varrho_1^3}$$

$$x_1 = k_1 \sin \beta_1 = \frac{m M_2 r \sin \alpha}{\varrho_1^3}$$

$$z_2 = k_2 \cos \beta_2 = \frac{m M_2 (R + r \cos \alpha)}{\varrho_2^3}$$

$$x_2 = k_2 \sin \beta_2 = \frac{m M_2 r \sin \alpha}{\varrho_2^3}.$$

Alle vier Componenten sind im Sinne einer Poisson'schen Fiction im Schwerpunkt von A sowohl in positiver als negativer Richtung wiederholt, so dass sie sich gegenseitig aufheben. Sie sind dort aber mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Hierdurch erhalten wir aber vier Kräftepaare in A, welche ebensoviel Drehungsmomente liefern. Wenn wir eine Drehung positiv nennen, wenn sie von $+x$ nach $+z$ oder von rechts nach oben, also der Uhr entgegen dreht, dann sind die vier Drehungsmomente:

1. aus $+z_1$ und $-\zeta_1$ mit dem Arm $r \sin \alpha$

$$- \frac{m M_2 (R - r \cos \alpha) r \sin \alpha}{\varrho_1^3}$$

2. aus $+x_2$ und $-\zeta_2$ mit dem Arm $r \sin \alpha$

$$+\frac{m M_2 (R + r \cos \alpha) r \sin \alpha}{\varrho_2^3}$$

3. aus $-x_1$ und $-\xi_1$ mit dem Arm $r \cos \alpha$

$$-\frac{m M_2 r \sin \alpha r \cos \alpha}{\varrho_1^3}$$

4. aus $-x_2$ und $+\xi_2$ mit dem Arm $r \cos \alpha$

$$-\frac{m M_2 r \sin \alpha r \cos \alpha}{\varrho_2^3}.$$

Die Summe dieser vier Drehungsmomente ist

$$D_i = -m M_2 r R \sin \alpha \left(\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_2^3}\right).$$

Dies ist das Drehungsmoment, welches die declinirte Flut an A erzeugt; es heisse das innere Drehungsmoment. Das innere Drehungsmoment, das durch die declinirte Flut erzeugt wird, und Rotation des Flutträgers schafft, ist also dem Sinus der Declination proportional, und liegt in der Ebene der Declination, ist aber der Declination entgegen gerichtet.

Im Schwerpunkt von A befinden sich dann noch zwei Radialkräfte $-\zeta_1$ und $+\zeta_2$, und zwei Transversalkräfte $+\xi_1$ und $-\xi_2$. Ihre Resultanten Z_1 und X_1 sind

$$Z_1 = +m M_2 \left[R\left(\frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{1}{\varrho_2^3}\right) - r \cos \alpha \left(\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_2^3}\right)\right]$$

$$X_1 = +m M_2 r \sin \alpha \left(\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_2^3}\right).$$

Dieselben Componenten finden sich in entgegengesetzter Richtung im Schwerpunkt von B und geben die Resultanten Z_2 und X_2. Es gilt also

$$Z_2 = -Z_1 \qquad X_2 = -X_1.$$

Für uns von Interesse sind nur die Transversalkräfte X_1 und X_2. Sie bilden zusammen ein Kräftepaar und liefern ein Drehungsmoment vom Arme R, das wir äusseres Drehungsmoment D_e nennen wollen. Es ist

$$D_e = +m M_2 r R \sin \alpha \left(\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_2^3}\right).$$

Das äussere Drehungsmoment, das Revolution schafft, ist also gleich und entgegengesetzt dem inneren Drehungsmomente. Es wirkt im Sinne und in der Ebene der Declination und ist dem Sinus der letzteren proportional.

Approximativ lässt sich dieses Drehungsmoment auch folgendermaassen wiedergeben. Die Masse m der Flutwelle berechnet sich nach der Theorie der Flut für eine Erde von Wasser auf

$$m = \frac{1}{8} M_2 \frac{r^5}{R^3}$$

für ϱ_1 können wir bei kleiner Declination auch $(R - r)$, für ϱ_2 aber $(R + r)$ schreiben. Bei Vernachlässigung kleiner Glieder erhalten wir dann

$$D_e = \frac{3}{4} M_2^2 \left(\frac{r^5}{R^6}\right) \sin \alpha.$$

Es nimmt daher mit der Entfernung R der Körper A und B sehr rasch, nämlich nach der sechsten Potenz ab.

Betrachten wir nun den Fall, dass die Rotation und die Revolution in derselben Ebene und in gleicher Richtung, der Uhr entgegen, die wir positiv nennen wollen, erfolgt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit $+ w_e$ der Revolution stets gleich ist der Winkelgeschwindigkeit $+ w_i$ der Rotation (was natürlich voraussetzt, dass w_e constant ist, die Revolution also in Kreisbahnen erfolgt), dann ändert B seine relative Lage zu A nicht, der Vector geht stets durch dieselben Punkte der A-Oberfläche, und es findet keine Declination statt, und es treten keine Drehungsmomente auf.

Wenn die Revolution der Rotation voreilt, d. h. wenn $+ w_e$ beständig grösser ist als $+ w_i$, oder w_i geradezu negativ ist, dann erhalten wir eine negative Declination, und D_i ist positiv, d. h. es wirkt auf die Rotation positiv beschleunigend. (Ist also die Rotation positiv, dann wird sie beschleunigt; ist sie negativ, so wird sie verlangsamt.) Umgekehrt ist D_e negativ, d. h. X_1 und X_2 wirken auf A und B der Revolutionsbewegung entgegen und verkleinern stetig die Flächengeschwindigkeit. Die Folgen sind bekanntlich eine stetige Verkürzung des Vectors, d. h. eine Annäherung von A und B; eine stetige Verkleinerung der Revolutionsdauer; eine stetige Vergrösserung der progressiven Geschwindigkeit von A und B in ihren Bahnen; eine stete Vergrösserung der Winkelgeschwindigkeit w_e, also auch eine stetige Vergrösserung der Declination und Verstärkung der Flutreaction. Das Ende der steten Annäherung von A und B ist ein Zusammenstoss von A und B. Wenn also die Voreilung des Vectors $w_e - w_i$ positiv ist, dann bewirkt die Flutreaction eine stetige Verminderung der Entfernung von A und B und einen Zusammensturz des Systemes $A - B$. Durch die Vereinigung von A und B wird aber die Revolution zur Rotation, und es resultirt ein neuer Körper mit rascher Rotation im Sinne und in der Ebene der ursprünglichen Revolution.

Lassen wir nun w_e ständig kleiner sein, als w_i, die Voreilung des Vectors $w_e - w_i$ also negativ sein. Dann ist die Declination positiv, indem die Flutwelle dem Vector stets voreilt, und X_1 und X_2 wirken auf A und B flächenbeschleunigend. Die Folgen sind stetiges Wachsen des Vectors; Wachsen der Revolutionsdauer; Abnahme der progressiven Geschwindigkeit von A und B in der Bahn; Abnahme der Winkelgeschwindigkeit w_e (und insofern Vergrösserung der Declination). Indem dergestalt A und B immer weiter vom gemeinsamen Schwerpunkt als Revolutionsmittelpunkt zurückweichen, löst sich allmählich das System A-B. Die Rotationsgeschwindigkeit wird gleichzeitig immer kleiner, da D_i negativ ist. Wenn also die Rotation schneller ist als die Revolution, dann bewirkt die Flutreaction ein stetiges Auseinanderrücken von A und B.

Im ersten Falle bei voreilender Revolution ist also positive Rotation auf Kosten der Flächengeschwindigkeit geschaffen worden, während im zweiten Falle bei voreilender Rotation Flächengeschwindigkeit auf Kosten der Rotation geschaffen wird.

Variiren wir nun die Erscheinung derart, dass A und B nicht wie Erde und Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt, sondern wie zwei Planeten um einen Centralpunkt in derselben Revolutionsebene in positivem Sinne kreisen, und dass A um eine zur Revolutionsebene normale Axe in positivem Sinne rotirt. Der Vector r_1 von A sei kleiner als der Vector r_2 von B. Da die Flutreaction mit der Entfernung sehr rasch an Intensität abnimmt, so können wir annehmen, dass sie nur in den Conjunctionszeiten wirksam ist. Wenn dann die Rotation von A nicht allzu klein ist, dann wirkt X_1 auf den inneren Körper A verzögernd, X_2 aber auf den äusseren Körper B beschleunigend. Die Flächengeschwindigkeit des A wird also durch jede Conjunction verkleinert, die des B aber vergrössert. Dadurch wird r_1 stets verkleinert, r_2 vergrössert, d. h. aber: Wenn A und B um einen Centralpunkt kreisen und A rotirt im Sinne der Revolutionen, dann rücken infolge der wiederholten Conjunctionen die Bahnen von A und B auseinander, als würden sie sich abstossen. Mit der Zunahme des Intervalles nimmt diese Scheinabstossung sehr rasch an Intensität ab.

Genau das Gegentheil finden wir, wenn A in negativem Sinne rotirt, die Declination also in der Conjunction negativ ist. Die Flächengeschwindigkeit des äusseren B wird dann durch X_2 verlangsamt, die des inneren A aber beschleunigt, die Radien r_1 und r_2 also immer gleicher und wir setzen: Wenn A entgegen den Revolutionen rotirt, dann nähern sich die Bahnen von A und B einander

als würden sie sich anziehen. Mit der Abnahme des Intervalles der Bahnen nimmt diese Scheinanziehung sehr rasch an Intensität zu und führt zu einem Zusammenstoss von A und B.

Die Resultate bleiben ganz dieselben, wenn A der äussere, B der innere Körper (Planet) ist.

Betrachten wir den Fall, dass A und B wie Erde und Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, dass aber die Rotationsaxe mit der Revolutionsaxe einen Winkel γ bildet. Wie bei Erde und Mond seien sowohl Revolution als auch die bedeutend schnellere Rotation positiv. Die Flutdeclination infolge der Revolution wird dann so klein sein, dass wir sie vernachlässigen können; die Rotationsdeclination der Flut aber liegt dann natürlich stets in dem Parallelkreise auf A, wo die Oberfläche von A durch den Vector und seine Verlängerung getroffen wird. Die Fig. 2 zeigt in der Revolutionsebene 16 Vectorspuren als kleine Kreise eingezeichnet, während der entsprechende declinirte Flut-

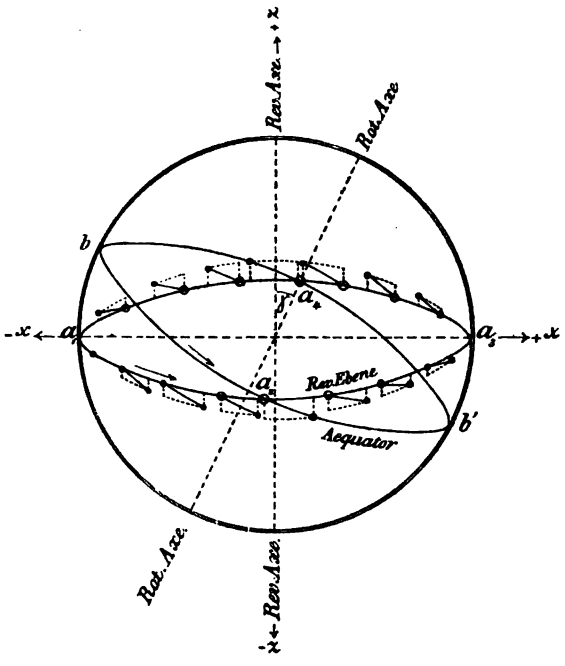


Fig. 2.

pol als schwarzer Punkt notirt ist. Parallel dem verbindenden Declinationsbogen wirkt dann X_2 auf B. Wie die punktirten Rechtecke erkennen lassen, hat dann X_2 zwei Componenten. Die erste Componente wirkt in der Revolutionsebene flächenbeschleunigend und bewirkt

die oben besprochene allmähliche Abschleuderung von B. Die zweite Componente wirkt normal auf die Revolutionsbahn und ändert nur die Bewegungsrichtung von B. Von a_1 bis a_3 wirkt sie nach unten, von a_3 bis a_1 nach oben, bewirkt also in beiden Fällen eine Drehung der Revolutionsebene um die Drehungsaxe von γ, d. h. um die Knotenlinie der Revolutions- und Rotationsebene dergestalt, dass die Revolutionsebene der Rotationsebene genähert wird. Analog wirkt X_1 auf A_1 und wir können sagen:

Die Flutreaction zwischen Erde und Mond bewirkt, dass die Entfernung von Erde und Mond stetig wächst, der Monat immer länger wird, und der Winkel der Mondbahn mit der Aequatorebene immer kleiner wird.

Die Reaction der Flut auf die Erde ist recht sonderbar. Zunächst wird allerdings die Rotation verlangsamt. Da aber die Axe des Drehungsmomentes D_t senkrecht zum Vector in der Meridianebene der declinirten Flut liegt, fällt sie während jeder Revolution nur zweimal mit der Erdaxe zusammen. Wir erhalten hierdurch eine Drehungscomponente, welche den Winkel γ stetig vergrössert, die Erdaxe also in demselben Sinne neigt, wie die Revolutionsebene gedreht wird (nur viel langsamer), und eine weitere Drehungscomponente, welche ein geringes Oscilliren der Rotationsaxe um die Revolutionsaxe verursacht, und zwar zwei Oscillationen während jeder Revolution des Mondes.

Den Fall von Erde und Mond wollen wir nun so variiren, dass wir die Rotation der Erde im Vergleich zur Revolution sehr klein sein lassen, so dass wir die Rotationsdeclination vernachlässigen und nur die Revolutionsdeclination betrachten können. Die Flutwelle wird dann stets in der Revolutionsebene zurückbleiben und die Declinationsaxe fällt mit der Revolutionsaxe zusammen. X_2 wirkt dann verzögernd in der Revolutionsebene auf B, und X_1 analog auf B, und wie wir früher gesehen haben, werden sich dann A und B einander nähern, wobei die Winkelgeschwindigkeit der Revolution rapid zunimmt. Gleichzeitig verursacht D_t eine positive Drehung von A normal zur Revolutionsebene (parallel zur Revolutionsaxe), und indem sich diese Drehung mit der schon vorhandenen positiven Rotation combinirt, ergibt sich eine allmähliche Abnahme von γ, d. h. die Rotationsaxe stellt sich immer senkrechter auf die Revolutionsebene. Wenn schliesslich der Vector so klein geworden ist, dass A und B einander berühren und zu Einem Körper sich vereinen, dann geht die Revolution mit ihrer grossen Winkelgeschwindigkeit in Rotation über. Wir finden also: Wenn die Rotationsaxe mit der Revolutionsaxe einen Winkel bildet, aber die Rotation im Vergleich

zur Revolution langsam ist, dann ergibt sich stetige Abnahme der Entfernung von A und B und nach dem Zusammensturz von A und B Ein Körper mit sehr rascher Rotation um eine Axe normal zur früheren Revolutionsebene.

Wenn wir die gefundenen Resultate auf unser Sonnensystem anwenden, dann kommen wir zu folgenden Consequenzen:

1. Wenn die Planeten einmal auch weit näher zur Sonne gestanden sind, dann können sie durch die Fluten, die sie auf der Sonne erregt haben, oder durch die Fluten, welche die Sonne auf ihnen erregt hat (wenn im letzteren Falle ihre Rotationsaxen mit der Rotationsaxe der Sonne ziemlich parallel waren) in ihre gegenwärtigen grossen Abstände herausgerückt worden sein.

2. Wenn die Planetenbahnen einmal auch sehr von der Ebene der Sonnenrotation abweichende Revolutionsebenen besessen haben, so können die Bahnebenen durch die Fluten, welche sie auf der Sonne erzeugt haben, dem Sonnenäquator genähert worden sein.

3. Wenn die Intervalle der Planetenbahnen einmal auch keine regelmässige Zunahme von Merkur bis Neptun gezeigt haben, dann kann die gegenwärtige Gesetzmässigkeit durch die Scheinabstossung der Bahnen, welche aus den Reactionen der Fluten resultirt, welche sie aufeinander geschaffen haben, herbeigeführt worden sein.

4. Wenn es Planeten mit verkehrter Rotationsrichtung gegeben hat, dann können dieselben infolge der Scheinanziehung, welche ihre Bahnen durch die Bahnen benachbarter, positiv rotirender Planeten erlitten haben, von jenen absorbirt worden sein.

Ueber die Brechungsexponenten der Metalle[1]).

Von

A. Kundt.

Die einfachste und zugleich zuverlässigste Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten, d. h. der relativen Lichtgeschwindigkeiten der durchsichtigen Körper, ist diejenige der prismatischen Ablenkung. Selbst für stark absorbirende, intensiv färbende Stoffe, welche erhebliche anomale Dispersion in einzelnen Theilen des Spectrums zeigen, hat sich dieselbe bei geeigneter Form der Prismen noch brauchbar erwiesen. Ein Versuch, die prismatische Ablenkung des Lichtes in den Metallen zu untersuchen, ist bisher wohl nicht gemacht worden, da die Metalle schon in verhältnismässig sehr dünnen Schichten völlig undurchsichtig sind. Man hat sich daher bemüht, auf anderem Wege Aufschluss über die Geschwindigkeit des Lichtes in denselben zu erhalten. Speciell für Silber hat Herr Quincke aus verschiedenen Interferenzerscheinungen, und Herr Wernicke aus Messungen über die Absorption des Lichtes den Brechungsexponenten berechnet. Die von Herrn Quincke nach verschiedenen Methoden gefundenen Exponenten sind theils kleiner als Eins, theils sehr gross; Herr Wernicke findet für Silber ungefähr den Werth 3 bis 5. Herr Voigt berechnet dagegen aus den Wernicke'schen Beobachtungen den Exponenten des Silbers zu ungefähr $^1/_4$ [2]).

Sodann hat Beer [3]) nach der Cauchy'schen und Herr Voigt [2]) nach der von ihm aufgestellten Theorie aus Beobachtungen über die Reflexion an Metallen die Geschwindigkeit des Lichtes in denselben abgeleitet. Nach beiden Theorien ist zwar für die Metalle das Snellius'sche Brechungsgesetz nicht giltig, es soll mit dem Wort „Brechungsexponent" aber auch hier noch bezeichnet werden das Verhältnis der Geschwindigkeit im Vacuum zu derjenigen im Metall. Die

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Berliner Akad. Bd. 8 S. 255 (1888).

2) Vergl. bezüglich der Beobachtungen der Herren Quincke und Wernicke: Voigt, Wied. Ann. Bd. 23 S. 104—147 und Wied. Ann. Bd. 25 S. 95—114.

3) Pogg. Ann. Bd. 92 S. 402—419.

von Beer und Voigt berechneten Werthe stimmen im allgemeinen überein. Beide finden den Exponenten für Silber und Gold kleiner als Eins, für Kupfer ungefähr gleich Eins und für die anderen Metalle Werthe grösser als Eins.

Eine längere Beschäftigung mit dem optischen Verhalten sehr dünner Metallschichten veranlasste mich, zu versuchen, ob es nicht möglich sei, sehr spitze, noch hinreichend durchsichtige Prismen von Metall anzufertigen und in ihnen die prismatische Ablenkung zu beobachten, um so vielleicht auf möglichst directem Wege zur Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit zu kommen. Es ist mir in der That gelungen, solche Metallprismen herzustellen und mit denselben für sieben Metalle nicht nur die mittleren Brechungsexponenten, sondern für sechs auch noch den Sinn und ungefähren Betrag der Dispersion zu bestimmen. Ich glaube, dass die Messungen mit besseren optischen Instrumenten, als sie mir zur Verfügung standen, und mit der nöthigen Ausdauer noch erheblich genauer ausgeführt werden könnten, als ich sie bisher machte. Wenn ich trotzdem schon jetzt meine Arbeit vorläufig abschliesse, so mag das seine Entschuldigung darin finden, dass dieselbe bereits einen Zeitraum von zwei Jahren umfasst, dass die geringe Zahl von brauchbaren Prismen, welche im Nachstehenden aufgeführt sind, aus mindestens 2000 hergestellten ausgelesen werden mussten, dass endlich nicht viel weniger als 2000 Proben gemacht wurden, bis ich es lernte, das platinirte Glas, auf welchem die Prismen elektrolytisch niedergeschlagen wurden, in einer solchen Vollkommenheit zu erhalten, als es für den vorliegenden Zweck nöthig war.

Ich gebe im Nachstehenden zunächst eine kurze Beschreibung der Anfertigung der Prismen, alsdann die Beobachtungsmethode und die Beobachtungen nebst einer kurzen Discussion derselben. Daran schliessen sich einige Bestimmungen der Brechungsexponenten von Metalloxyden. Dann folgt eine Vergleichung meiner Resultate mit den von Beer und Voigt berechneten Werthen.

Den Schluss bilden einige Betrachtungen, zu welchen meine Resultate ungezwungen auffordern. Es zeigt sich nämlich, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in den Metallen in naher Beziehung steht zu dem Leitungsvermögen derselben für Elektricität und Wärme. Die Metalle ordnen sich bezüglich der Lichtgeschwindigkeit in dieselbe Reihe, wie bezüglich ihres Leitungsvermögens für Elektricität und Wärme. Um eine zuverlässige, endgiltige Relation aufzustellen, genügt weder der Umfang noch die Genauigkeit meiner Beobachtungen. Wenn ich trotzdem wage, an jene allgemeine Beziehung weitergehende Schlüsse zu knüpfen, so ist mein Zweck hauptsächlich, den Ausblick auf fernere Untersuchungen zu eröffnen.

Herstellung der Prismen.

Der grösste Theil der Prismen wurde elektrolytisch auf platinirtem Glas niedergeschlagen. Bei Beginn meiner Untersuchung standen mir zwei Sorten von solchem Glas zur Verfügung, nämlich einige Stücke französischen Platinglases, entnommen von einem Apparat des Herrn König in Paris und einige Stücke, welche Herr Dr. Lohmann in Berlin für mich platinirt hatte. Nur ein kleiner Theil des Vorrathes hatte hinreichend ebene Flächen. Es ist ferner die Platinschicht auf diesen Gläsern wohl cohärent, aber, wie man mit dem Mikroskop erkennt, sehr wenig gleichmässig. Letzteres ist gleichgiltig, wenn es sich einfach darum handelt, andere Metalle in grösserer Schicht auf dem Platin niederzuschlagen, die Unhomogenität der Platinschicht war aber bei Anfertigung der Prismen sehr störend.

Da der vorhandene Vorrath bald verbraucht war, und weder aus Paris noch von Herrn Lohmann weiteres Material erhältlich war, blieb mir Nichts Anderes übrig, als das platinirte Glas selbst herzustellen. Nach langem Bemühen ist es mir gelungen, eine Zusammensetzung der Platinirungsflüssigkeit zu finden, welche ein Einbrennen bei kaum beginnender Rothgluth erlaubt, so dass die Platten völlig eben bleiben. Die Platinschicht ist überdies so vollständig gleichmässig, dass selbst bei stärkerer Vergrösserung unter dem Mikroskop keine Inhomogenitäten erkenntlich sind. Das verwendete Spiegelglas war etwa 6 mm dick. Das Einbrennen der Platinschicht erfolgte in einem kleinen Muffelofen. Auf das Verfahren im speciellen hier einzugehen ist unnöthig; ich werde dasselbe an einer anderen Stelle beschreiben. Die Metallprismen wurden auf dem Platinglas in folgender Weise hergestellt. Auf einen etwa 3 cm breiten Streifen des Glases, das horizontal liegt, stellt man vertical eine ebenso breite Elektrode aus dem niederzuschlagenden Metall, indess so, dass kein metallischer Contact vorhanden ist. In die Winkel zwischen Glas und Metall wird eine capillare Schicht der Zersetzungsflüssigkeit gebracht und durch einen Strom von passender Stärke elektrolysirt. Es schlägt sich ein Doppelkeil von Metall nieder, dessen grösste Dicke direct an dem aufgesetzten Metall liegt. Ob die Flächen des Doppelkeils einigermaassen eben, oder ob sie stark concav oder convex sind, hängt von so vielen variablen Umständen ab, dass man fast ganz dem Zufall preisgegeben ist. Brauchbar sind nur Doppelkeile, bei denen die Flächen wenigstens so weit eben sind, dass dieselben ein feines Fadenkreuz bei Betrachtung mit einem Fernrohr, welches mit einem Gauss'schen Ocular versehen ist, noch scharf spiegeln. Oft mussten 50, nicht selten noch viel mehr Prismen niedergeschlagen werden, bis ein einigermaassen

brauchbares erhalten wurde. Im Anfang, als ich die dünnen nur 1½ bis 2 mm dicken Pariser und Berliner Gläser anwandte, wurden meist nicht Doppelprismen, sondern einfache in der Weise angefertigt, dass die Metallelektrode vertical in das elektrolytische Bad tauchte und horizontal gegen dieselbe das Platinglas gebracht war. Es schlägt sich dann aus der capillaren Flüssigkeitsschicht zwischen Metall und Glas auf letzterem ein einziger hart an der Kante des Glases liegender Keil nieder. Bei Silber wurden die Prismen nicht bloss elektrolytisch, sondern auch auf chemischem Wege durch Reduction hergestellt. Herr Quincke hat zuerst gezeigt, wie man aus einer Silberlösung keilförmige Silberschichten erhält, wenn man die zu versilbernde Glasplatte auf ein Glasrohr von geeignetem Durchmesser legt. Es hat sich dann später herausgestellt, dass die so erhaltenen Silberkeile von der Mitte aus nicht stetig an Dicke zunehmen, sondern dass die Dicke periodisch wächst. Aus sehr vielen, nach der Quincke'schen Methode hergestellten Keilen kann man aber zuweilen einzelne auslesen, bei denen wenigstens auf eine kleine Strecke die Dicke continuirlich wächst und die Grenzfläche nahezu eine Ebene ist. Solche kleine Stücke wurden durch Wegwischen des übrigen Silbers isolirt und benutzt. Als Criterium für die Ebenheit der Flächen diente wieder die Reflexion eines feinen Fadenkreuzes. Für Platin musste, da ich keine guten elektrolytischen Abscheidungen erhielt, zu einer anderen Methode gegriffen werden. Es ist bekannt, dass ein Platindraht, welcher durch einen Strom zum Glühen gebracht wird, zerstäubt. Bringt man eine Glasplatte in die Nähe, so setzt sich die zerstäubte Materie auf dieser ab. Zur Herstellung von Prismen durch Zerstäubung wurde nun ein 0,015 mm dickes, 6 mm breites und etwa 45 mm langes Platinblech mit den Seitenflächen vertical dicht über einer Glasplatte, die horizontal lag, ausgespannt. Wird das Blech durch einen Strom fast zur Weissgluth erhitzt, so zerstäubt es stark und es bildet sich auf dem Glas ein Doppelprisma, welches aus einem Gemenge von Platinoxyd und Platin besteht. Die von dem Blech fortgeschleuderten sehr heissen Platintheilchen scheinen sich wenigstens zum Theil in der Atmosphäre zu oxydiren. Andrerseits wird Platinoxyd schon bei ganz geringem Erwärmen zu Platin reducirt. Die Doppelprismen, aus dem Gemisch von Platin und Oxyd bestehend, konnten daher leicht in solche von reinem Platin durch Erwärmen übergeführt werden.

Endlich wurde noch versucht, Doppelprismen der Metalle durch Zerstäuben einer Kathode im Vacuum herzustellen. Parallel einem Metalldraht, der als Kathode im Vacuum durch einen starken Inductionsstrom zum Glühen kommt, wird eine Glasplatte möglichst nahe aufgestellt. Es bildet sich ebenso wie unter dem galvanisch

glühenden Platinblech ein Doppelkeil von dem zerstäubten Metall. Für die unten gegebenen definitiven Versuche sind aber solche Prismen nicht benutzt; ich gebe nur beiläufig einige mit denselben erhaltene Zahlen.

Beobachtungsmethode und Resultate.

Für die in der beschriebenen Weise erhaltenen Metallprismen von sehr spitzen Winkeln sind nun wie für gewöhnliche Prismen unter Annahme des Snellius'schen Brechungsgesetzes, durch Beobachtung der Winkel und der Ablenkungen, die Brechungsexponenten bestimmt. Dass die so erhaltenen Werthe wirklich den Lichtgeschwindigkeiten in den Metallen reciprok sind, wird weiter unten discutirt.

Ist der Einfallswinkel eines Lichtstrahles auf ein durchsichtiges Prisma vom Brechungsexponent n, für welches das Snellius'sche Brechungsgesetz gilt, i, der Prismenwinkel δ, und die Ablenkung, welche der Strahl nach dem Austritt aus dem Prisma gegen seine ursprüngliche Richtung erfahren hat, gleich α, so ist

$$n = \frac{\sin(\alpha + \delta - i) + \cos\delta \cdot \sin i}{\sin\delta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}}.$$

Sind α und δ, wie es bei den benutzten Metallprismen immer der Fall war, sehr klein, hält man ferner i immer so klein, dass $\cos^2 i$ gleich 1 gesetzt werden kann, so wird

$$n = \frac{\alpha + \delta}{\delta}.$$

Bei Prismen von sehr kleinem brechenden Winkel ist also die Ablenkung der Strahlen für kleine Einfallswinkel unabhängig von diesen.

Hat man, wie bei den meisten der nachfolgenden Versuche, ein Doppelprisma, dessen beide Prismen infolge der Art der Herstellung immer nahezu die gleichen sehr kleinen brechenden Winkel haben, so gilt, wie leicht ersichtlich, die obige Formel, wenn unter α und δ die Summen der Ablenkungen und der brechenden Winkel verstanden werden. Die Ablenkung ist in der obigen Formel positiv gerechnet, wenn das durch das Prisma gegangene Lichtbündel nach der dickeren Seite des Prismas zu abgelenkt ist, also negativ, wenn die Brechung der Schneide des Prismas zu erfolgt.

Nach der angegebenen Formel ist es nicht nöthig, die Winkel und Ablenkungen in genauem Bogenmaass, d. h. in Minuten und Secunden zu kennen, es genügt, dieselben in einem willkürlichen Winkelmaass zu bestimmen. Für diese Bestimmungen diente ein grosses Meyerstein'sches Spectrometer. Das Instrument ist mit Ablesemikroskopen versehen; ein Theilstrich der Trommel dieser Mikroskope

beträgt 1,946″. Da die zu messenden Winkel sehr klein sind, so ist es nicht erforderlich, Ablesungen auf dem Theilkreis selbst zu machen, es genügen die Trommelablesungen. Die Werthe für α und δ sind in den folgenden Tabellen daher auch nur in Trommeltheilen, also nahezu in Doppelsecunden angegeben. Die Glasplatte, auf welcher sich die kleinen Metallprismen befanden, war für die Beobachtungen auf dem Tischchen des Spectrometers in geeigneter Weise festgekittet. Vor derselben befand sich eine Abblendevorrichtung mit Schiebern, welche bei einfachen Prismen entweder das Prisma oder eine daneben befindliche Stelle des Glases, bei Doppelprismen nacheinander das eine und andere Prisma frei liess.

Die brechenden Winkel, bei Doppelprismen die Summe der beiden einzelnen, wurden in gewohnter Weise durch Spiegelung von Fäden mit einem Gauss'schen Ocular bestimmt; die Ablenkungen durch Einstellung eines feinen Fadenkreuzes auf das Spaltbild. Bei beiden Bestimmungen stand die Platte mit den Prismen fest und wurde der Theilkreis mit dem Beobachtungsfernrohr gedreht. Die Seitenflächen der Glasplatte müssen völlig eben sein, ob dieselben eine kleine Neigung zu einander haben, ist, wie leicht ersichtlich, gleichgiltig. Nach der obigen Formel genügt es, die Glasplatte mit den Prismen nach dem Augenmaass senkrecht zu den einfallenden Strahlen zu stellen; gewöhnlich wurde indess die senkrechte Stellung durch Spiegelung controlirt. Da die Prismenflächen sehr klein sind, — Breite derselben 2—3 mm, Höhe etwa 10 mm — so sind die in das Objectiv gelangenden Strahlenbündel sehr dünn; dadurch wird die Einstellung des Oculars des Beobachtungsfernrohres in die richtige Brennebene erschwert. Dazu kommt, dass das Spaltbild infolge des Durchganges des Lichtes durch die schmalen Prismen nie scharf ist, sondern durch Beugung verwaschene Ränder hat. Um die gefährlichen, aus ungenügender Justirung des Beobachtungsfernrohrs resultirenden Fehler zu beseitigen, wurden jedesmal besondere Controlbeobachtungen angestellt, mit Hilfe deren das Fernrohr genau eingestellt werden konnte. Auf die Einzelheiten des Verfahrens hier einzugehen, unterlasse ich.

Die Ablenkung wurde zunächst immer für weisses Licht — Lampe, Sonne oder elektrische Lampe — bestimmt. Trotzdem bei einigen der Metalle, wie sich nachstehend ergibt, die Dispersion sehr gross ist, konnte wegen der geringen Prismenwinkel eine Ablenkung für weisses Licht doch ganz gut ermittelt werden. Es entspricht der beobachtete Werth demjenigen der mittleren Strahlen des Spectrums. Dann wurde die Ablenkung für rothes und blaues Licht bestimmt. Hierbei wurde stets entweder die Sonne oder elektrisches Licht benutzt. Für die Beobachtungen im Roth gingen die Strahlen je nach der

Helligkeit der Lichtquelle und der Durchsichtigkeit der Prismen durch 1 bis 4 rothe Gläser; für die Beobachtungen im Blau durch ein blaues Glas und ein Gefäss mit mehr oder minder concentrirter Lösung von Kupferoxydammoniak. Da nicht immer die gleiche Anzahl von Gläsern und die gleiche Concentration der absorbirenden Flüssigkeit benutzt werden konnte, ist auch die mittlere Wellenlänge des benutzten rothen und blauen Lichtes nicht bei allen Versuchen die gleiche, mithin sind die Dispersionsbeobachtungen nicht bei allen Prismen genau unter sich vergleichbar. Ungefähr dürfte in den meisten Versuchen das Maximum des rothen Lichtes der Linie C und das des blauen G des Sonnenspectrums entsprechen. Die für die einzelnen Prismen in den nachfolgenden Beobachtungen gegebenen Winkel und Ablenkungswerthe sind jedesmal die Mittel aus einer grösseren Anzahl von Einstellungen. Es wurden immer zehn Einstellungen gemacht, und das Mittel aus diesen Werthen galt als eine Winkel- oder Ablenkungsbestimmung. Für die meisten der Prismen sind eine Anzahl solcher Bestimmungen gemacht; die Tabelle enthält für ein jedes nur das Gesammtmittel. Die Fehlergrenze geht aus den Abweichungen, welche die einzelnen Prismen für n zeigen, genügend hervor; es scheint nicht nöthig, hier die Genauigkeitsgrenzen weiter zu discutiren. Bemerkt mag werden, dass der Hauptfehler darin liegt, dass die Prismenflächen selten völlig eben sind. Alle Einstellungen habe ich immer selbst gemacht, die Ablesungen am Mikroskop machte und notirte ein Assistent, ohne den Werth der einzelnen Ablenkungen zu nennen.

Ich möchte nicht unterlassen, hier dankend die Herren zu erwähnen, welche mir bei den Messungen behilflich waren. Anfangs machte Herr Dr. L. Arons die Ablesungen, dann Herr Dr. C. Schmidt, schliesslich Herr Dr. O. Wiener. Letzterer hat mich auch bei Herstellung der Prismen unterstützt und einige Controlwinkelmessungen, wie weiter unten angegeben ist, ausgeführt.

Silber.

Nr.	δ	α			n			Bemerkungen
		roth	weiss	blau	roth	weiss	blau	
1	5,58	—	— 4,37	—	—	0,22	—	
2	9,68		— 7,71			0,20		Elektrolytisch niedergeschlagen aus einem Bad von Cyan-Silber-Kalium.
3	11,59		— 8,29			0,28		
4	12,68		— 8,10			0,36		
5	14,38		— 10,18			0,29		
6	11,82		— 8,41			0,26		Chemisch reducirt.
7	15,44		— 10,53			0,32		
8	21,46		— 16,77			0,22		
				Mittel	—	0,27	—	Die Dispersion im Silber ist so klein, dass sie nicht bestimmt werden konnte.

Nr.	δ	α			n			Bemerkungen
		roth	weiss	blau	roth	weiss	blau	
				Gold.				
1	9,65	— 5,60	—	— 1,34	0,42	—	0,86	Elektrolytisch niedergeschlagen.
2	13,87	— 9,88	— 5,82	+ 1,96	0,88	0,58	1,14	
				Mittel	0,88	0,58	1,00	
				Kupfer.				
1	8,55	— 4,70	— 3,05	+ 0,50	0,45	0,64	1,06	Elektrolytisch aus dem Roseleur'schen Bad v. Cyan-Kupfer-Kalium. Ein Kupferprisma aus Kupfersulfat gab ebenfalls starke normale Dispersion. Der Winkel war aber nicht genau zu bestimmen.
2	12,31	— 6,74	— 4,23	— 2,01	0,45	0,66	0,84	
3	11,75	—	— 4,10	—	—	0 65	—	
				Mittel	0,45	0,65	0,95	
				Platin.				
1	12,57	+ 9,50	+ 8,27	+ 4,06	1,76	1,66	1,32	Die Prismen sind erhalten durch Zerstäuben eines in der Luft galvanisch glühenden Platinblechs und darauffolgender Reduction durch Erwärmen.
2	14,21	+ 9,23	+ 8,50	+ 6,08	1,65	1,60	1,43	
3	14,52	+ 12,65	+ 9,61	+ 8,31	1,87	1,66	1,57	
				Mittel	1,76	1,64	1,44	
				Eisen.				
1	13,97	+ 10,21	+ 9,66	+ 6,12	1,73	1,69	1,44	Das Eisen ist elektrolytisch nach dem Verfahren von Varrentrapp niedergeschlagen.
2	25,44	+ 22,59	+ 17,83	+ 15,13	1,89	1,70	1,59	
3	6,01	—	+ 4,94	—	—	1,82	—	
4	9,93	—	+ 6,29	—	—	1,63	—	
5	13,70	—	+ 9,22	—	—	1,67	—	
6	19,92	—	+ 17,61	—	—	1,88	—	
				Mittel	1,81	1,73	1,52	
				Nickel.				
1	9,12	+ 11,90	+ 9,16	+ 8,26	2,30	2,00	1,91	Elektrolyt. aus schwefelsaurem Nickeloxydammoniak.
2	9,56	+ 9,93	+ 8,09	+ 7,41	2,04	1,85	1,78	
3	9,50	—	+ 11,18	—	—	2,18	—	
				Mittel	2,17	2,01	1,85	
				Wismuth.				
1	12,87	+ 20,19	+ 15,31	+ 14,09	2,57	2,19	2,10	Elektrolytisch aus einem weinsäurehaltigen Wismuthbad niedergeschlagen.
2	14,20	+ 21,56	+ 19,73	+ 17,96	2,52	2,39	2,26	
3	23,79	+ 41,28	+ 28,71	+ 24,48	2,74	2,21	2,03	
				Mittel	2,61	2,26	2,13	

Discussion und Controlversuche.

Ich muss hier darauf verzichten, alle möglichen Fehlerquellen der Beobachtungsmethode ausführlich zu besprechen; ich hebe nur einige Einwendungen heraus, die man machen könnte. Zunächst kann

man fragen, ob durch die Reflexionsbeobachtungen bei unseren kleinen sehr dünnen Prismen wirklich, wie bei dickeren mit grösseren Seitenflächen, die brechenden Winkel richtig bestimmt werden.

Es ist bekannt, dass, wenn die Dicke einer Metallschicht auf Glas von Null an continuirlich wächst, die Phasenänderung bei der Reflexion mit wachsender Metalldicke anfangs sich ändert und erst von einer gewissen Dicke an constant wird [1]). Wären die benutzten Prismen an der Seite der Prismenkanten so dünn, dass die Reflexion an den verschiedenen Stellen des Prismas mit verschiedener Phasenänderung erfolgen würde, so könnte dadurch die von der ganzen Prismenfläche reflectirte ebene Welle eine andere Richtung erhalten, als es dem Gesetz der gewöhnlichen Spiegelung entspricht. Dagegen ist zu bemerken, dass alle Prismen, die benutzt wurden, so dick waren, dass die Phasenänderung an allen Stellen die gleiche war. Ich habe aber noch auf zwei anderen Wegen mir die Sicherheit verschafft, dass die brechenden Winkel richtig gemessen wurden. Herr Dr. Wiener hat nämlich nach der von ihm angegebenen Methode [2]) den Winkel eines der oben benutzten Prismen bestimmt.

Das Doppelprisma von Silber Nr. 5, das leider zu denjenigen gehörte, deren Flächen wenig eben waren, ergab bei Reflexionsbeobachtungen im Mittel eine Winkelsumme von 14,38 Trommeltheilen, d. i. gleich 27,98 Bogensecunden. Herr Wiener bestimmte darauf die Summe der Prismenwinkel nach seiner Methode zu etwa 30″.

In AgJ übergeführt ergab sich der Winkel bei Reflexionsbeobachtungen zu 67,59 Trommeltheilen = 131,80″. Die Messung von Herrn Wiener nach der Interferenzmethode 128″. Die Abweichungen liegen völlig innerhalb der Fehlergrenzen. Eine Silberschicht nimmt bei Jodirung um das Vierfache an Dicke zu; es müssen also auch die Winkel des Jodsilberprismas die vierfachen sein des ursprünglichen Silberprismas. Aus dem Werth 67,59 Trommeltheile würde sich der Winkel des Silbers zu 16,89 berechnen, während 14,38 direct beobachtet ist. Die Abweichung ist zwar etwas gross, liegt aber, wenn berücksichtigt wird, dass gerade dies Prisma wenig ebene Flächen hatte, noch innerhalb der Fehlergrenzen.

Das Silberdoppelprisma Nr. 2 obiger Tabelle gab für die Summe der Prismenwinkel in drei Beobachtungen die Werthe

8,45
10,26 Mittel 9,68 Trommeltheile.
10,32.

1) Vergl. Wiener.
2) A. a. O. Wied. Ann. Bd. 31 S. 629—672.

Dasselbe in Jodsilber übergeführt ergab den Winkel

45,42
46,30 Mittel 45,86.

Dies gibt für den Winkel des Silbers 11,47.

Ebenso ergaben ein Wismuth- und ein Nickelprisma, nachdem sie in Oxyd übergeführt waren, Winkel, aus denen dann rückwärts die Winkel der Metallprismen mit hinreichender Uebereinstimmung an die direct gemessenen berechnet wurden.

Werden die brechenden Winkel mittels Reflexion richtig gemessen, so können auch die Ablenkungsbeobachtungen nicht wohl durch variable Phasenänderungen gefälscht sein. Indess könnte man meinen, dass die Beugung des Lichtes die Ablenkungsbeobachtungen beeinflusse. Die schmale Oeffnung der Prismen bedingt selbstverständlich eine recht merkliche Beugung, und man erhält das Spaltbild selbst bei den besten Prismen nicht mit völlig scharfen Rändern. Dazu kommt, dass die Absorption des Lichtes von den Prismenschneiden nach der Basis zunimmt. Ich glaube mich aber durch mannigfache Versuche überzeugt zu haben, dass die Beugung keine constanten Fehler in die Ablenkungsbeobachtungen bringt.

Schon der Umstand, dass Prismen von sehr verschiedener Oeffnungsweite, sehr verschiedenem Winkel und verschiedener Dicke, bei denen also auch der Abfall der Intensität des Lichtes von der Prismenschneide zur Basis sehr verschieden war, keine gesetzmässig veränderlichen Werthe von n lieferten, schliesst eine Fälschung der Beobachtung durch Beugung, die grösser wäre als die Fehler im allgemeinen, aus.

Es entsteht schliesslich die wichtigste Frage, welche Deutung ist den aus den Beobachtungen berechneten Werthen von n beizulegen? Man sieht aus den gegebenen Zahlen zunächst, dass n für jedes Metall und eine bestimmte Lichtgattung in den Grenzen der benutzten Prismenwinkel eine Constante ist, und nicht gesetzmässig von diesen Winkeln, die bei Eisen und Silber um das Vierfache variiren, abhängt. Es ist n mithin jedenfalls eine das optische Verhalten des Metalls charakterisirende Grösse. Soll n, entsprechend den Erscheinungen bei durchsichtigen Medien der Quotient aus der Geschwindigkeit des Lichtes in dem umgebenden Medium, bei unseren Versuchen Luft, zu derjenigen im Metall sein, so muss, wenn das Metallprisma in ein anderes Medium gebracht wird, die Ablenkung der Strahlen, entsprechend dem Brechungsexponenten dieses letzteren sich ändern. Um dies zu prüfen, wurden Versuche folgender Art angestellt. Auf die Glasplatte, welche die Metallprismen trug, wurde vor die Prismen, in kleinem Abstand von denselben, eine zweite ebene Glasplatte gekittet und der Zwischenraum zwischen dieser und den Prismen mit einer Flüssigkeit gefüllt.

Dann wurde von Neuem die Ablenkung bestimmt. Ist α' die neue Ablenkung und n' der Brechungsexponent der Flüssigkeit bezogen auf Luft, haben α und δ die Bedeutung wie oben, so ist, immer unter Berücksichtigung, dass die Winkel klein sind,

$$\alpha' = \delta(n - n') \text{ und}$$
$$\alpha - \alpha' = \delta(n' - 1).$$

Es kann also aus dem anderweitig zu bestimmenden Werth von n' die Ablenkung α' und aus der Differenz von α' und α der Werth n' berechnet werden. Die folgende kleine Tabelle enthält die Resultate dreier Versuche. Es ist weisses Licht benutzt; die Werthe von n' sind mit einem Spectrometer für Natronlicht bestimmt.

Metallprismen in Flüssigkeit.

Beobachtet				Berechnet	
δ	α	α'	n'	α'	n'
	Eisenprisma Nr. 2 in Lavendelöl				
25,44	+17,88	+7,08	1,44	+8,64	1,42
	Kupferprisma Nr. 3 in Knochenöl				
8,55	−3,05	−7,26	1,47	−7,01	1,49
	Platinprisma Nr. 3 in Wasser				
14,52	+9,51	+4,36	1,33	+4,78	1,36

Die beobachteten und berechneten Werthe stimmen sehr gut überein.

Damit scheint mir der Beweis geliefert zu sein, so weit sich ein solcher rein experimentell liefern lässt, dass die oben berechneten Werthe von n wirklich die Geschwindigkeiten des Lichtes in den Metallen geben.

Vergleichung der Resultate mit den von Beer und Herrn Voigt berechneten Brechungsexponenten.

In der nachfolgenden Tabelle stelle ich die Mittel der oben gegebenen Messungen zusammen.

Zusammenstellung der Mittel für n.

	Roth	Weiss	Blau
Silber	—	0,27	—
Gold	0,38	0,58	1,00
Kupfer . . .	0,45	0,65	0,95
Platin	1,76	1,64	1,44
Eisen	1,81	1,73	1,52
Nickel . . .	2,17	2,01	1,85
Wismuth . .	2,61	2,26	2,13

Die Geschwindigkeit des Lichtes im Silber ist nahe viermal so gross als im Vacuum; die Dispersion ist im Ag jedenfalls nicht sehr gross. Auch im Gold und Kupfer ist die Geschwindigkeit grösser als im Vacuum, die Dispersion normal; in allen anderen untersuchten Matallen ist die Dispersion stark anomal. Hiermit stimmen die berechneten Werthe von Beer und Voigt im wesentlichen, man kann sagen in überraschender Weise überein.

Beer hat nach der Cauchy'schen Theorie die Brechungsexponenten, d. h. das Verhältnis der Geschwindigkeiten im Metall und im Vacuum, aus den Beobachtungen Jamin's über die Reflection berechnet. Er findet für Silber keine sehr ausgeprägte Dispersion und einen mittleren Brechungsexponenten 0,25. Für Kupfer ergibt sich starke normale Dispersion und für die rothen Strahlen $n < 1$; für Eisen anomale Dispersion, $n_{\text{roth}} = 2{,}54$, $n_{\text{violett}} = 1{,}47$ [1]).

Herr Voigt a. a. O. hat nach seiner Theorie der optischen Eigenschaften der Metalle, aus den Reflectionsbeobachtungen von Jamin, Haughton und Quincke die Werthe von n berechnet. Es ergeben sich für ein und dasselbe Metall ziemlich verschiedene n; es dürfte dies seinen Grund darin haben, dass die verschiedenen Beobachter nicht gleich chemisch reine, physikalisch gleichartige Metalle bei ihren Versuchen verwendeten. Die berechneten Werthe sind aber ebenfalls überall für Silber und Gold und bei Kupfer für die rothen Strahlen kleiner als Eins. Ebenso findet Herr Voigt für Kupfer normale, dagegen für Eisen, Nickel, Platin und Wismuth anomale Dispersion. Eine ziemliche Differenz besteht beim Wismuth bezüglich der absoluten Werthe von n zwischen meinen und den von Herrn Voigt berechneten Werthen. Dies dürfte wohl auch seinen Grund in der Verschiedenheit des Materials haben.

Herr Voigt hat sodann noch in einer besonderen Abhandlung [2]) gezeigt, dass nach seiner Theorie für sehr stark absorbirende Medien der Brechungsexponent auf die gewöhnliche Weise durch prismatische Ablenkung richtig bestimmt wird, wenn der brechende Winkel des Prismas nur hinreichend klein ist. Es muss die Grösse $\frac{n^2 k^2}{2} \sin^2 \delta$, in welcher n den Brechungs-, k den Absorptions-Coefficienten und δ den Prismenwinkel bezeichnet, gegen Eins zu vernachlässigen sein. Dies ist bei unseren Pismen stets der Fall, und ergibt sich also auch nach Herrn Voigt die Berechtigung unserer obigen Annahme, dass die erhaltenen Werthe von n den Lichtgeschwindigkeiten reciprok seien.

---

1) Pogg. Ann. Bd. 92 S. 417 (1854).
2) Wied. Ann. Bd. 24 S. 144—156.

Auf eine Discussion der Messungen des Herrn Dessau[1]) über die in konischen Metallschichten auftretenden dunklen Ringe mit Zugrundelegung der hier gefundenen Brechungsexponenten einzugehen, ist nicht wohl möglich, da Herr Dessau die Ringe bei normaler Incidenz nicht messen konnte. Ich will nur bemerken, dass die anomale Dispersion in Pt, Fe und Ni nicht eine anomale Reihenfolge der Ringe im Roth und Blau nothwendig bedingt, da nach den obigen Werthen für n in den genannten Metallen die Wellenlängen für roth immer noch grösser bleiben als für blau.

Brechungsexponenten der Oxyde.

Gelegentlich wurden im Laufe der Untersuchung auch die Brechungsexponenten einiger Verbindungen der Metalle, insbesondere der Oxyde, bestimmt. Es geschah dies hauptsächlich, um die Beobachtungsmethode nach verschiedenen Richtungen zu prüfen. Da von mehreren der untersuchten Substanzen die Brechungsexponenten bisher nicht bekannt sind, gebe ich einige der erhaltenen Werthe. Ich schliesse daran noch einige Bestimmungen an Metallen, die durch Oxyde verunreinigt sind.

Nr.	δ	α			n			Bemerkungen
		roth	weiss	blau	roth	weiss	blau	
				Jodsilber.				
1	16,64	—	+ 21,71	—	—	2,30	—	Die Prismen sind durch Jodiren von Silberprismen erhalten.
2	45,86	—	+ 53,07	—	—	2,16	—	
3	67,59	—	+ 98,50	—	—	2,46	—	
				Eisenoxyd.				
1	12,09	+ 9,38	+ 13,41	+ 16,40	1,78	2,11	2,36	Die Oxydprismen sind durch schwaches Glühen von Eisenprismen erhalten.
2	25,71	—	+ 28,66	—	—	2,12	—	
				Nickeloxyd.				
1	24,27	+ 28,57	+ 29,88	+ 33,66	2,18	2,23	2,39	Durch ziemlich starkes Glühen eines Nickelprismas erhalten.
				Wismuthoxyd.				
1	20,82	—	+ 18,94	—	—	1,91	—	Durch ziemlich starkes Glühen eines Wismuthprismas erhalten. Die Dispersion war gering, so dass sie nicht mit Sicherheit bestimmt werden konnte.

1) Wied. Ann. Bd. 29 S. 353—376.

Nr.	δ	α			n			Bemerkungen
		roth	weiss	blau	roth	weiss	blau	
				Kupferoxyd.				
1	12,72	+ 20,75	+ 23,44	+ 27,71	2,63	2,84	3,18	Durch schwaches Glühen eines Kupferprismas erhalten.

Platin mit Platinoxyd gemischt.

Die durch Zerstäuben eines galvanisch glühenden Platinblechs hergestellten Prismen sind ein Gemisch von metallischem Platin und Oxydationsstufen des Platin, die, wie oben angegeben, erst durch Erwärmen in reines Platin übergeführt werden.

Da die Zusammensetzung bei den verschiedenen Prismen jedenfalls eine verschiedene ist, so hat es wenig Interesse, die Brechung in diesen Gemischen zu bestimmen. Ich führe nur einige Werthe an, da die Exponenten aussergewöhnlich gross sind.

Nr.	δ	α			n		
		roth	weiss	blau	roth	weiss	blau
1	40,56	+ 93,71	+ 93,02	+ 76,80	3,31	3,29	2,90
2	12,35	+ 49,26	+ 47,23	+ 42,04	4,99	4,82	4,40

Die Differenzen in den Werthen von n bei beiden Prismen übersteigen hier weit die Beobachtungsfehler; es ist jedenfalls der Procentgehalt des zweiten Prismas an Oxyd grösser als der des ersten. Bemerkenswerth ist, dass sich hier eine ziemlich starke anomale Dispersion zeigt; ob dieselbe durch das beigemengte Platin bedingt ist, oder dem Platinoxyd zukommt, lässt sich nicht entscheiden. Die Oxyde von Fe, Ni, Cu, Bi zeigen nach den obigen Beobachtungen normale Dispersion.

Gold mit Goldoxyd verunreinigt.

Es mag noch bemerkt werden, dass ich Mühe hatte, Prismen zu erhalten von reinem metallischen Gold. Diejenigen, welche durch Zerstäuben einer Goldkathode hergestellt wurden, geben fast alle etwas grössere Brechungsexponenten als die oben in der Tabelle S. 364 angegebenen; es scheint das von geringen Beimengungen von Oxydationsstufen des Goldes herzurühren. Auch die aus einer Goldcyankaliumlösung galvanoplastisch abgeschiedenen Prismen ergeben zum Theil

grössere Brechungsexponenten. Bei den erheblichen zur Verwendung kommenden Stromdichten dürften sich geringe Mengen von Goldverbindungen verschiedener Art mit dem metallischen Gold niederschlagen. Die Prismen, die abweichende Werthe gaben, waren im durchgehenden Licht nicht schön grün, wie die oben zu den Messungen benutzten, sondern mehr oder minder violett, zuweilen sogar intensiv rothviolett. Ich gebe die folgenden Beispiele:

Nr.	δ	α			n		
		roth	weiss	blau	roth	weiss	blau
1	Elektrolytisch niedergeschlagen, violettgrünlich durchsichtig.						
	9,98	+ 0,83	—	+ 2,47	1,04	—	1,25
2	Durch Zerstäuben einer Kathode im Vacuum erhalten.						
	7,70	— 0,82	— 0,07	+ 2,55	0,89	0,99	1,33
3	Durch Zerstäuben einer Kathode in Luft von geringem Druck hergestellt. Hellroth durchsichtig, wenig metallisch glänzend, enthält nur wenig metallisches Gold.						
	36,47	—	+ 37,77	—	—	2,03	—

Beziehung der Brechungsexponenten zu dem Leitungsvermögen der Metalle für Elektricität und Wärme.

Ueberblickt man die Werthe von n in der Zusammenstellung (S. 367), so springt sofort eine Beziehung der Brechungsexponenten zum Leitungsvermögen der Metalle für Elektricität und Wärme in die Augen. Diejenigen, denen der kleinste Brechungsexponent, also die grösste Lichtgeschwindigkeit zukommt, sind die besten Leiter für Elektricität und Wärme.

Das specifische galvanische Leitungsvermögen und der Wärmeleitungs-Coefficient einer Substanz sind bei einer gegebenen Temperatur ganz bestimmte Grössen; die Lichtgeschwindigkeit in einem Körper ist es bei gegebener Temperatur nicht, denn sie variirt mit der Wellenlänge. Will man also die oben angedeutete allgemeine Beziehung näher untersuchen und formuliren, so wird man festzusetzen haben, was dabei unter Lichtgeschwindigkeit verstanden werden soll. Die Dispersionsformeln für durchsichtige Körper führen bei immer mehr wachsender Wellenlänge auf einen bestimmten Grenzwerth des Brechungsexponenten. Dass auch bei den Metallen ein solcher Grenzwerth existirt, kann zwar nicht bewiesen werden, ist aber wahrscheinlich. Von unseren Bestimmungen liegen diesen Werthen diejenigen vermuthlich am nächsten, welche wir für rothes Licht erhielten.

Setzt man nun die Geschwindigkeit v des rothen Lichtes im Silber gleich 100, so erhält man nach der Tabelle S. 367 für die anderen Metalle die folgenden Zahlen:

Silber	100
Gold	71
Kupfer	60
Platin	15,3
Eisen	14,9
Nickel	12,4
Wismuth . . .	10,3.

Ein Blick auf die vorstehende Tabelle zeigt, dass bis auf eine Ausnahme, nämlich Wismuth, die Werthe von v in die Grenzen der Werthe für das galvanische Leitungsvermögen, dasjenige des Silbers gleichfalls gleich 100 gesetzt, fallen, welche von den verschiedenen Beobachtern angegeben werden[1]). Der Werth 60 für Kupfer erscheint allerdings etwas klein. Es ist indessen zu beachten, dass das elektrolytische Kupfer unserer Doppelprismen möglicherweise etwas Oxydul enthielt, wodurch der Brechungsexponent zu gross, d. h. die Lichtgeschwindigkeit zu klein gefunden wird. Das Leitungsvermögen des Wismuths wird von allen Beobachtern erheblich kleiner als 10 angegeben. Das Wismuth, an welchem das Leitungsvermögen bestimmt wurde, war aber jedenfalls immer krystallinisch; die dünne Metallschicht der Wismuthprismen wies auch unter dem Mikroskop keine Spur krystallinischer Structur auf; es könnte daher das Leitungsvermögen der benutzten dünnen unkrystallinischen Wismuthschichten ein wesentlich anderes, besseres sein, als dasjenige krystallinischer Stäbe. Das Verhältnis des Leitungsvermögens für Wärme und Elektricität beim Wismuth wird auch von verschiedenen Beobachtern sehr verschieden gefunden.

Man kann daher auf Grundlage obiger Zahlen zu der Vermuthung kommen, dass das galvanische Leitungsvermögen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Lichtwellen grosser Oscillationsdauer in den Metallen wirklich proportional sei. Um diese Vermuthung zu prüfen, wäre es nothwendig, von denselben Metallstücken, oder wenigstens von solchen, die auf die gleiche Weise elektrolytisch niedergeschlagen sind, den Brechungsexponenten sehr langer Wellen und das specifische Leitungsvermögen zu bestimmen. Ob solche Bestimmungen einigermaassen genau experimentell ausführbar sind, mag dahingestellt bleiben.

---

1) Wiedemann, Lehre von der Elektricität, 3. Aufl. Bd. 1 S. 503.

Nimmt man obige Proportionalität als wenigstens angenähert durch unsere Versuche erwiesen an, so besteht damit auch eine sehr enge Beziehung zwischen Lichtgeschwindigkeit und Wärmeleitungsvermögen der Metalle, denn so gross auch die Differenzen der verschiedenen Beobachtungen sein mögen, aus der Gesammtheit aller vorliegenden Untersuchungen geht jedenfalls hervor, dass die Leitungsvermögen für Elektricität und Wärme bei den Metallen einander angenähert proportional sind.

Es besteht mithin eine wenigstens angenäherte Proportionalität zwischen Lichtgeschwindigkeit, galvanischem Leitungsvermögen und Wärmeleitungscoefficient der Metalle. Diese merkwürdige Relation deutet auf eine Verwandtschaft hin zwischen der Bewegung des Lichtes in den Metallen, der Bewegung der Elektricität im galvanischen Strom und der Wärme in einem Wärmestrom.

Ich habe versucht, für dieselbe eine Erklärung zu finden durch die Annahme, dass die Wärmeleitung in einem Metall lediglich auf Strahlung von einer Schicht zu einer benachbarten beruhe, wobei die Strahlung mit der Geschwindigkeit des Lichtes in dem betreffenden Metall erfolgt, und dass andrerseits dasjenige, was wir Elektricität nennen, in einem von einem galvanischen Strom durchflossenen metallischen Leiter sich mit der Geschwindigkeit, die das Licht in dem Metall hat, bewege. Eine weitere Durcharbeitung dieser Anschauung, als ich sie bisher ausführen konnte, wird erst zeigen müssen, inwieweit dieselbe zulässig ist.

Schliesslich möchte ich noch bemerken, dass, wenn die in unseren Versuchen sich ergebende angenäherte Proportionalität zwischen Lichtgeschwindigkeit und galvanischem Leitungsvermögen thatsächlich vorhanden ist, sich noch einige Folgerungen ergeben, die durchs Experiment geprüft werden können. Es mögen hier nur zwei derselben, welche nahe liegen, erwähnt werden.

Das Leitungsvermögen der Metalle nimmt mit steigender Temperatur ab; es müsste mithin auch die Lichtgeschwindigkeit in denselben bei steigender Temperatur abnehmen, also der Brechungsexponent wachsen. Es hat nun allerdings Sissingh eine Aenderung der Reflexionsconstanten des Eisens mit der Temperatur nicht nachweisen können [1]); die Versuche dürften indes nicht entscheidend sein; es wären direct die Brechungsexponenten durch prismatische Ablenkung bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen. Die experimentellen Schwierigkeiten einer solchen Untersuchung halte ich nicht

1) Sissingh, Mesures de la polarisation elliptique de la lumière. Archives Néerlandaises t. XX.

für unüberwindlich. Es ist sodann bekannt, dass der galvanische Widerstand der Metalle in verschiedener Richtung sich ändert, wenn dieselben in ein magnetisches Feld gebracht werden. Es müssten sich demnach auch die Brechungsexponenten der Metalle durch Magnetisiren ändern. Sollte diese Aenderung zu gering sein, um gemessen werden zu können, so würde doch voraussichtlich unter geeigneten Bedingungen der Aeolotropismus, welchen die Metalle durch Magnetisiren in Bezug auf ihr Leitungsvermögen erfahren, auf optischem Wege durch auftretende Doppelbrechung des Lichtes nachweisbar sein.

Ueber den Glimmer als Dielektricum[1]).

Von

Dr. **Ignaz Klemencic.**

Die Versuche, welche hier mitgetheilt werden, hatten die Beantwortung folgender Fragen zum Zwecke:

1. Welchen Werth besitzt die Dielektricitätsconstante des Glimmers, und
2. Eignet sich der Glimmer zur Anfertigung von brauchbaren Condensatoren?

Die erste Frage hat bekanntlich mit Rücksicht auf Maxwell's elektromagnetische Lichttheorie eine gewisse theoretische Bedeutung; die zweite jedoch gewinnt ein vorwiegend praktisches Interesse, wenn man bedenkt, dass der Gebrauch von Condensatoren in physikalischen Laboratorien immer häufiger und das Bedürfnis nach verlässlichen und bequemen Exemplaren immer grösser wird. Für den Physiker gibt es eben viele Aufgaben, die sich mit Hilfe guter Condensatoren lösen lassen. Ich erinnere in dieser Beziehung nur an die Messung grosser Widerstände, oder umgekehrt an die Bestimmung kurzer Zeitdauern (eine Methode, welche in manchen Fällen viel bequemer ist als die bekannte Pouillet'sche), ferner an die durch Condensatorentladungen hervorgerufenen Oscillationen und an die von Sir W. Thomson und Colley angegebene Methode zur Auswerthung der Grösse „v".

Sollen nun Untersuchungen der erwähnten Art mit der nöthigen Genauigkeit ausfallen, so ist es nothwendig, dass man mit Condensatoren arbeitet, deren Capacität unter den verschiedensten Umständen immer gleich gefunden wird. Die Umstände, welche bei Capacitätsbestimmungen verändert werden können, sind folgende: Die Ladungsdauer, die Zeit, welche zwischen der Ladung und Entladung vergeht, das ladende Potential und die Dauer der Entladung. Von allen bisher untersuchten Condensatoren zeigen nur diejenigen, bei denen die Luft das Dielektricum bildet, eine unter allen Umständen gleiche Capacität. Diese sind daher auch die einzigen, welche den Namen „Normalcondensator" verdienen. Man kann sich einen solchen Condensator aus Kessel-

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 96 S. 807 (1887).

blechplatten zusammenstellen, welche man durch Kammasseplättchen voneinander trennt. Es ist jedoch absolut erforderlich, einen solchen Condensator in einem sehr trockenen Raume aufzubewahren, indem man ihn etwa unter eine Glasglocke stellt und ein Gefäss mit concentrirter Schwefelsäure dazusetzt. Misslich ist es, dass ein solcher Condensator nicht leicht von einer Stelle zur andern transportirt werden kann, und dass man damit überhaupt nur kleine Capacitäten erreicht. Deswegen verzichtet man oft auf die Vortheile, welche ein Luftcondensator besitzt, um andere zu erlangen, welche von Condensatoren mit festen Dielektricis geboten werden. In dieser Hinsicht scheint mir der Glimmer in erster Linie in Betracht zu kommen, und ich werde mir später erlauben, einen Vergleich zwischen dem hier untersuchten Glimmercondensator und den bisher geprüften sog. Normalcondensatoren anzustellen. Vorerst stelle ich hier die hauptsächlichsten Resultate dieser Untersuchung zusammen:

1. Die Dielektricitätsconstante der hier untersuchten Glimmersorte wurde gleich 6,64 gefunden.

2. Die Capacität eines Glimmercondensators erwies sich unabhängig von der Grösse des ladenden Potentials; sie änderte sich jedoch um 1,8 %, wenn man die Ladungsdauer von 0,002 auf 1200 Sec. wachsen liess und je nach 0,007 Sec. entlud.

3. Der Glimmer besitzt eine ausgezeichnete Isolationsfähigkeit; sein Widerstand ist wahrscheinlich 6×10^{21} grösser als der des Quecksilbers, was übrigens nur eine untere Grenze ist.

4. Glimmercondensatoren zeigen jedoch diese soeben erwähnten guten Eigenschaften nur, solange sie vollkommen trocken gehalten werden.

Ueber die Brauchbarkeit des Glimmers zu Condensatorzwecken habe ich in der Literatur nur wenige Andeutungen gefunden. Fleeming Jenkin[1]) beobachtete bei einem Glimmercondensator für dasselbe ladende Potential einen Ausschlag von 156 Scalentheilen bei kurzer Ladungsdauer und 166 Scalentheilen bei einer Ladungsdauer von fünf und mehr Secunden. Colley[2]) prüfte mehrere Glimmercondensatoren von Elliot. Die zwei besten darunter zeigten eine scheinbare Capacitätszunahme um etwa 10 % beim Laden bis zur Sättigung. Diese Resultate weichen von den oben angeführten beträchtlich ab. Meinen Angaben jedoch geradezu widersprechend sind

1) Diese Angabe ist einer Abhandlung von Schneebeli („Ueber Condensatoren im allgemeinen und specielle Beschreibung des Normalcondensators des eidgenössischen Polytechnikums", Züricher Vierteljahrsschrift, Bd. 26 S. 175) entnommen.

2) Wied. Ann. Bd. 28 S. 12.

jene von F. Kägi[1]), der sich mit der Untersuchung des Glimmers als Condensatormedium in ausführlicher Weise beschäftigt hat. Ich werde mir am Schlusse erlauben, über seine Beobachtungen einige Bemerkungen zu machen.

Es lässt sich nicht leugnen, dass sich ein Theil der Unterschiede in den Resultaten durch die Verschiedenheit der Glimmersorten erklären lässt; der hauptsächlichste Grund der Nichtübereinstimmung der früheren Beobachtungen mit den meinigen liegt jedoch sicherlich darin, dass die untersuchten Condensatoren nicht gründlich ausgetrocknet waren.

Der Werth der Dielektricitätsconstante und folglich die Capacität eines Condensators wird jedenfalls auch von der Temperatur beeinflusst. Untersuchungen darüber habe ich hier nicht angestellt, da solche einen grösseren Aufwand von Hilfsmitteln erfordern; ich hoffe jedoch bald in der Lage zu sein, solche Beobachtungen anzustellen und dieselben auch auf andere feste Dielektrica auszudehnen.

Bestimmung der Dielektricitätsconstante.

Die Glimmerplatten, welche zu diesen Bestimmungen dienten, wurden von Max Rafael in Breslau bezogen. Sie sollten, der Bestellung gemäss, von der gleichen Qualität sein wie die Platten, aus welchen der unten beschriebene Condensator verfertigt ist und welche von der erwähnten Firma schon im Jahre 1885 geliefert wurden. Es wurden zwei Platten untersucht. Sie hatten beide die gleiche Fläche von 20×20 qcm, waren jedoch ungleich dick. Als die dickere der Platten auf eine Quecksilberoberfläche gelegt wurde, zeigten sich an drei Stellen von ganz geringer Ausdehnung Unregelmässigkeiten, welche wie Luftblasen aussahen, die sich aber im Innern des Glimmers befanden. Sonst waren keine Fehler zu bemerken.

Die Dicke der Platten wurde mit dem Sphärometer gemessen. Zu diesem Zwecke wurde das Glimmerblatt auf eine horizontale Glasplatte und diese letztere auf den verstellbaren Tisch eines kleinen Stativs gestellt. Dieses wurde hierauf so hoch gehoben, dass die Glimmerplatte in die Höhe des Messtischchens des Sphärometers zu liegen kam. Beim Messen wurde sodann dieselbe von der Seite zwischen den Stift und das Tischchen des Sphärometers geschoben. Ein kleines am Ende der Sphärometerlibelle befestigtes Bleistück bewirkte, dass der Stift mit mässigem Druck am Glimmer auflag, wodurch Fehler vermieden werden sollten, die etwa durch die Steifheit und geringe

1) Untersuchungen über das Verhalten des Glimmers als Condensatormedium. Inaugural-Dissert. Zürich, Schiller u. Cie., (1882).

Unebenheit des Glimmers entstehen konnten; ein wirkliches Zusammendrücken des Glimmers war natürlich nicht zu befürchten. Auf diese Weise wurde die Dicke jeder Platte an acht verschiedenen Stellen gemessen, welche nahezu auf einem Kreise lagen, dessen Durchmesser 10 cm betrug und dessen Mittelpunkt mit der Mitte der Platte zusammenfiel. Ich führe in Tabelle I die bei den einzelnen Messungen erhaltenen Werthe an, um damit eine Einsicht in die Genauigkeit derselben zu gewähren. Unter n ist die der Dicke entsprechende Zahl von Trommeltheilstrichen eingetragen. Ein Trommeltheilstrich ist gleich 0,0001995 cm.

Von den acht Bestimmungen jeder Rubrik entsprechen die oberen solchen Punkten des erwähnten Kreises, welche sich auf den Diagonalen der Platten befinden und die unteren den zwischen diesen liegenden Stellen. Die Uebereinstimmung der einzelnen Zahlen ist bei der dünneren Platte grösser als bei der dickeren, was auf einen Einfluss der Steifigkeit und Unebenheit des Glimmers schliessen lässt; ein Fehler von 1 bis 2% ist daher nicht ausgeschlossen.

Tabelle I.

Platte 1			Platte 2		
n	Mittel n		n	Mittel n	
25,8			55,7		
25,4	25,5		54,7	54,6	
25,7		25,4	54,3		54,3
25,1			53,6		
25,8			53,6		
25,3	25,4		54,4	54,1	
25,3			54,4		
25,1			53,9		

Dicke der Platte 1 = 0,00508 cm
„ „ „ 2 = 0,0108 „

Diese Platten wurden nun zur Anfertigung eines Condensators verwendet, bei dem das Dielektricum lediglich aus Glimmer von bekannter Dicke bestand. Der einen Belegung diente als Grundlage eine quadratische Eisenplatte von 18 cm Seite und 1 cm Dicke. Sie war auf der einen eben gehobelten Fläche galvanisch verkupfert und amalgamirt. Dieselbe wurde nach entsprechender Reinigung und Trocknung auf einem Stativ horizontal gestellt, und zwar lag die amalgamirte

Seite nach aufwärts. Eine geringe Menge daraufgegossenen Quecksilbers breitete sich über die ganze Platte aus und bildete eine schmiegsame und dabei doch feste Unterlage, über welche die Glimmerplatte von der Seite geschoben werden konnte; diese adhärirte fest am Quecksilber und schob den an der Oberfläche befindlichen Schmutz vor sich hin, so dass sich unter der Glimmerplatte eine prächtig spiegelnde Fläche bildete. Etwaige Luftblasen, welche zwischen dem Glimmer und Quecksilber haften blieben, konnten leicht bemerkt und durch Zurück- und abermaliges Vorschieben des Glimmers entfernt werden. Die zweite Belegung bildete ich ebenfalls aus Quecksilber auf folgende Art: Eine Eisenschiene, etwa 0,5 mm dick und 1 cm hoch, wurde kreisförmig gebogen und die beiden zusammenstossenden Enden vernietet Eine Ausmessung des Kreisdurchmessers nach verschiedenen Richtungen ergab ziemlich übereinstimmende Werthe, deren Mittel 16,98 cm [1]) mit dem aus dem Umfange bestimmten Werthe 17,01 ebenfalls gut harmonirte. Auch die Nietstelle war dem Kreise gut eingefügt. Diese kreisförmig gebogene Lamelle wurde an einer Basis versteift, damit sie gegen Deformationen geschützt war und auf der gegenüberliegenden mittels einer Richtplatte eben geschliffen. Diese Vorrichtung, ich will sie kurz Hohlcylinder nennen, auf die Glimmerplatte gelegt, so dass die Mitten ungefähr coincidirten, diente als Begrenzung für die zweite Quecksilberbelegung. Zwei kleine an gegenüberliegenden Stellen des Hohlcylinders angebrachte Gewichte belasteten ihn so weit, dass er an allen Stellen dicht am Glimmer auflag. Die Eisenplatte wurde zur Erde abgeleitet, zu dem Quecksilber der zweiten Belegung aber ein Zuleitungsdraht von oben heruntergeführt.

Durch Vergleich dieses Condensators mit einem Luftcondensator von bekannter Capacität konnte die Dielektricitätsconstante des Glimmers bestimmt werden, nachdem ja die Grösse der belegten Glimmerfläche und die Dicke des Dielektricums bekannt waren. Zur Berechnung bediente ich mich der Formel

$$C = \frac{FD}{4\pi\delta}$$

wo C die Capacität, F die belegte Fläche, δ den Abstand der Belegungen und D die Dielektricitätsconstante bedeutet.

Die Messungen wurden mit einem Thomson-Galvanometer von Carpentier [2]) ausgeführt, dessen astatisches Nadelsystem eine Schwingungsdauer von 12 Secunden hatte. Zum Vergleich benutzte ich den Luft-

1) Der Durchmesser bezieht sich dabei auf den äusseren Umfang.

2) Die Benutzung dieses feinen Instruments verdanke ich der Güte meines Freundes und Collegen, Herrn Dr. Fr. Streintz.

condensator, der in einer früheren Abhandlung[1]) mit A bezeichnet wurde. Er hat eine Capacität von 14400 cm. Der Vergleich geschah in der bekannten Weise durch Beobachtung der Entladungsablenkungen. Da beim Glimmer sowie nahezu bei allen festen Dielektricis Rückstandsbildungen auftreten und die Bestimmung der Dielektricitätsconstante beeinflussen, so handelt es sich darum, eine Versuchsanordnung zu treffen, bei welcher dieser Einfluss möglichst gering ist. Dies lässt sich natürlich nur dadurch erreichen, dass man die Ladungsdauer t_1 und die Zeit zwischen dem Aufhören der Ladung und dem Beginne der Entladung t_2 möglichst kurz nimmt. Man kann das wenigstens innerhalb gewisser Grenzen mit dem von R. Hiecke[2]) verfertigten und in diesen Sitzungsberichten beschriebenen Apparate ausführen. Ich bezeichne mit O_1 und O_2 (Fig. 1) die beiden Oeffnungscontacte der erwähnten Vorrichtung. Diese Contacte sind vorher geschlossen und werden durch das fallende Gewicht geöffnet. Bei S machte ich noch einen Contact, der vorher offen, erst durch das Gewicht unmittelbar nach dem Oeffnen von O_2 geschlossen wird. t_1 ist also die Zeit, welche zwischen dem Oeffnen von O_1 und O_2 und t_2 die Zeit, welche zwischen dem Oeffnen von O_2 und dem Schliessen von S vergeht. t_1 konnte aus der Stellung der Schraube und dem bekannten Zeitwerthe einer Trommelumdrehung gerechnet werden; t_2 wurde in der üblichen Weise bestimmt. In G war das Galvanometer, in B die Batterie und in C der Condensator angebracht. W stellt einen Widerstand aus bifilar gewickeltem Neusilberdraht von 50 Ohm dar. Es sei bemerkt, dass durch das fallende Gewicht zuerst O_1 und dann O_2 geöffnet wurde. E bedeutet die Ableitung zur Erde.

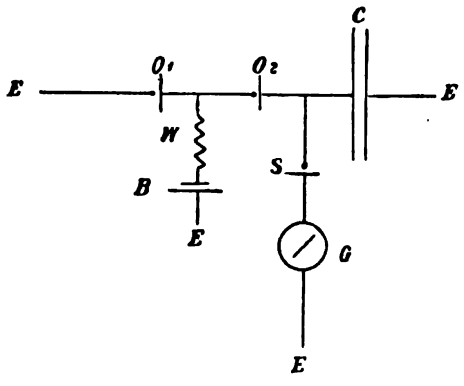


Fig. 1.

In den nachfolgenden Tabellen ist unter N die Anzahl der ladenden Daniell'schen Elemente eingetragen. Die Bezeichnung in der Rubrik „*Pol*" ist leicht zu verstehen. Es wurde immer eine längere Reihe von Beobachtungen bei ein und demselben ladenden Pol gemacht und schliesslich die Pole gewechselt, um zu sehen, ob sich nicht etwa das

1) Sitzungsber. der k. Akad. Bd. 91 und 93.
2) Sitzungsber. der k. Akad. Bd. 96.

Resultat änderte, was mit Rücksicht auf die Rückstandsbildungen gerade nicht unmöglich gewesen wäre. Es stellte sich jedoch kein Unterschied in D heraus. Ebenso ergaben die Beobachtungen für das gleiche t_1 auch bei verschiedenem ladenden Potential dasselbe D. Unter α und β sind die Ablenkungen, welche den Entladungen des Glimmer- und Luftcondensators entsprechen, eingetragen. C gibt die Capacität des Glimmercondensators an. ϑ bezeichnet die Zimmertemperatur. Die in Tabelle III und V angeführten Beobachtungen wurden gemacht, um zu sehen, welchen Einfluss die Dauer der Ladung auf den Werth von D ausübt. Dabei war $t_1 = 20$ Sec.

Glimmerplatte 1.

Tabelle II.

$t_1 = 0{,}00026$ S $t_2 = 0{,}007$ S $\vartheta = 14°$

Pol	*N*	α	β	*C*	*D*
Z	1	53,6	32,8	23580	6,62
„	2	109,8	66,2	23890	6,72
„	4	215,3	131,0	23660	6,66
„	6	321,0	194,7	23760	6,68
„	1	54,2	32,9	23710	6,67
K	1	54,1	32,9	23670	6,66

Tabelle III.

$t_1 = 20$ S $t_2 = 0{,}007$ S $\vartheta = 14°$

Pol	*N*	α	β	*C*	*D*
Z	1	55,8	32,8	24490	6,89
„	6	334,0	195,3	24620	6,94

Glimmerplatte 2.

Tabelle IV.

$t_1 = 0{,}00026$ S $t_2 = 0{,}007$ S $\vartheta = 14{,}3°$

Pol	*N*	α	β	*C*	*D*
Z	1	24,6	32,5	10900	6,54
„	2	49,1	65,6	10790	6,48
„	4	97,1	130,0	10760	6,46
„	6	145,0	194,5	10740	6,45
„	1	24,5	32,8	10760	6,46
K	1	24,4	32,7	10740	6,45

Tabelle V.

$t_1 = 20$ S $t_2 = 0{,}007$ S $\vartheta = 14{,}3°$

Pol	N	α	β	C	D
Z	1	26,7	33,0	11650	6,99
„	6	158,9	196,1	11660	7,00

Um diese Ladungsdauer herzustellen und die Entladung nach 0,007 S eintreten zu lassen, wurde O_1 offen gehalten, O_2 zu einer bestimmten Zeit geschlossen und 20 Sec. hierauf das Gewicht fallen gelassen.

Die Verlängerung der Ladungsdauer hat eine scheinbare Vergrösserung der Dielektricitätsconstante zur Folge, und zwar stieg der Werth der letzteren unter den angeführten Umständen bei der dünneren um 3,6% und bei der dickeren um 8%. Das scheinbare Anwachsen von D steht nahezu im umgekehrten Verhältnisse mit der Dicke der Glimmerplatten. Ich werde später noch auf diese Erscheinung zurückkommen. Die Grösse dieser Capacitätsvermehrung hängt jedenfalls auch mit der Dauer der Verbindung des Condensators mit dem Galvanometer zusammen. In diesem Falle war dieselbe mindestens grösser als die halbe Schwingungsdauer der Nadel. Es würde sich jedoch empfehlen, diese Verbindung nur für einen kurzen, aber in allen Fällen gleichen Moment, welcher gerade zum vollen Abflusse der disponiblen Ladung hinreicht, herzustellen.

Bei den bisher beschriebenen Versuchen war der Hohlcylinder an seinem, am Glimmer aufliegenden Theile nicht amalgamirt. Da das Quecksilber das Eisen nicht benetzt, so füllte es den Winkel im Innern des Hohlcylinders, wo Glimmer und Eisenring zusammenstiessen, nicht ganz aus, und das konnte einen kleinen Fehler zur Folge haben. Es wurde daher der Hohlcylinder galvanisch verkupfert und amalgamirt und hierauf noch eine Bestimmung von D mit der dickeren Platte ausgeführt. Zwei Messungen ergaben bei

$$N = 5\,D \cdot E \cdot t_1 = 0{,}00026,\ t_2 = 0{,}007,\ \vartheta = 16{,}1°$$
$$D = 6{,}56 \text{ und } 6{,}54.$$

Für D fällt also der Werth diesmal etwas grösser aus. Sieht man von einem Einflusse der Temperatur ab, so sind die früher angegebenen Werthe um etwa 1% zu erhöhen. Im Anschlusse an die letzten zwei Messungen machte ich auch einige Bestimmungen mit dem Stimmgabelinterruptor, mit der speciellen Absicht, zu untersuchen, ob sich D nicht ändert, wenn der Condensator längere Zeit hindurch den rasch aufeinanderfolgenden Ladungen und Entladungen ausgesetzt

bleibt. Zu den Beobachtungen wurde ein Galvanometer nach Wiedemann verwendet. Die Stimmgabel machte 64 einfache Schwingungen in der Secunde. Es war daher t_1 etwa $= 0{,}014$ und $t_2 = 0{,}002$ Sec. Als ladende Batterie wurde $2\,D \cdot E$ benutzt. Tabelle VI gibt die Resultate. T ist in Minuten angegeben und von der ersten Bestimmung an gezählt, welche gleich nach Erregung des Interruptors gemacht wurde.

Tabelle VI.

T Min.	D	$\vartheta = 15{,}9°$
0	6,54	
20	6,53	
49	6,55	Mittel = 65,4
83	6,53	
128	6,53	

Wie zu ersehen, ist D vollkommen constant geblieben. Aus allem ergibt sich daher für die

Glimmerplatte 1 $D = 6{,}74$
„ 2 $D = 6{,}54$.

Der Unterschied beträgt 3% und erklärt sich theils durch die Fehler in der Dickenbestimmung, theils durch die schon erwähnten Unregelmässigkeiten der Platte 2. Nehmen wir das Mittel aus beiden Bestimmungen, so ergibt sich

$$D = 6{,}64$$

als der Werth der Dielektricitätsconstante der untersuchten Glimmersorte. Die aus der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie folgende Relation zwischen D und dem Brechungsexponenten findet sich hier nicht bestätigt, denn dieser wurde für Glimmer [1]) ungefähr $= 1{,}6$ gefunden. Dabei darf man freilich nicht vergessen, dass wir in den Dispersionsformeln noch kein sicheres Mittel haben, um den richtigen Brechungsexponenten für unendlich lange Wellen zu berechnen. Eine Thatsache, welche bekanntlich schon oft hervorgehoben wurde.

Noch will ich kurz eines Versuches erwähnen, welcher mit Rücksicht auf den Einwand gemacht wurde, dass bei dicht anliegenden Belegungen die Elektricität auf das Dielektricum übergeht und auf diese Weise eine richtige Bestimmung vereitelt. Es war von Interesse zu constatiren, dass der hohe Werth der Dielektricitätsconstante nicht auf die erwähnte Ursache zurückzuführen ist. Zu diesem Zwecke

1) Landolt und Börnstein. Physikalisch-chemische Tab. S. 219.

wurden einige Beobachtungen mit einem Condensator nach Kohlrausch gemacht, und zwar wurde die Capacität desselben bei gleichbleibender Plattendistanz mit und ohne dazwischen gelegte Glimmerplatte bestimmt, resp. die Entladungsablenkungen am Galvanometer beobachtet. Als ladende Batterie wurden 20 Clark'sche Elemente verwendet. Es wurde natürlich der Stimmgabelinterruptor benutzt.

Bezeichnet α die Differenz der Ausschläge, welche man mit und ohne Glimmer zwischen den Platten erhält, ferner A die Galvanometerablenkung bei dazwischen gelegter Glimmerplatte von der Dicke δ und d den Abstand der Condensatorplatten, so ist

$$D = \frac{1}{1 - \frac{\alpha d}{A \delta}}.$$

In einem bestimmten Falle wurde gefunden: $\alpha = 33{,}7$, $A = 203{,}2$, $d = 0{,}0575$ cm, $\delta = 0{,}01084$. Daraus folgt $D = 8{,}4$. Eine andere Messung ergab $D = 7{,}4$. Eine genaue Bestimmung auf diese Weise ist nicht ausführbar, wie das schon aus der Formel ersichtlich ist. Ein Fehler von 1% in der Bestimmung irgend eines Gliedes im zweiten Theile des Nenners bedingt einen Fehler von 7—8% im Werthe von D. Der hauptsächlichste Fehler liegt hier in der Auswerthung von d. Soviel geht jedoch aus diesen Versuchen hervor, dass der aus den früheren Beobachtungen abgeleitete hohe Werth der Dielektricitätsconstante nicht auf die Berührung zwischen Dielektricum und Belegung zurückzuführen ist.

Versuche mit einem Glimmercondensator von 0,15 Mf.

Dieser Condensator ist aus 19 quadratischen Glimmerplatten von je 15 cm Seite gebildet. Die Stanniolbelegung reicht nahezu bis an den Rand der Glimmerplatten; das unterste Blatt der Belegung liegt auf einer Metallplatte und das oberste wird von einer solchen bedeckt. Das Ganze ist in ein Gehäuse von Kammasse eingeschlossen. Durch den Deckel desselben wird die obere Metallplatte durch Vermittlung von federnden Spiralen sanft niedergedrückt. Der Deckel selbst hat eine Führung durch vier Schraubenspindeln, die in den vier Ecken der Bodenplatte befestigt und ebenfalls mit federnden Spiralen umgeben sind, gegen welche der Deckel mittels vier Muttern gepresst werden kann.

Die Erfahrung, welche ich mit Kammasse, Glas, Seide u. s. w. machte, liess es mir räthlich erscheinen, den Condensator vor allem gründlich auszutrocknen. Er wurde daher auf einen Holztisch gestellt, ein Gefäss mit Schwefelsäure dazu gesetzt und darüber ein Glassturz gestülpt.

Der Tisch hatte eine kreisförmige Rinne, in welche die Basis des Glassturzes gerade hineinpasste. Diese Rinne wurde mit Quecksilber ausgefüllt und auf diese Weise die äussere Luft von der inneren abgesperrt. Nach einem Monat hierauf wurde erst mit den Versuchen begonnen.

Um die Brauchbarkeit des Glimmercondensators zu prüfen, habe ich bei verschiedenen t_1 und t_2 die Capacität desselben mit der eines Luftcondensators von 0,043 Mf. verglichen. Dabei bediente ich mich des schon früher benutzten Apparates von Hiecke. Die kleinste Ladungsdauer t_1 habe ich = 0,002 Sec. gewählt; sie genügt zur vollen Ladung des Condensators durch den Widerstand von 918 Ohm, bestehend aus einem bifilar gewickelten Neusilberdraht. Die Zeit $t_1 = 0{,}3$ Sec. wurde ebenfalls mittels einer Vorrichtung am Fallapparate hergestellt. t_2 bedeutet wie früher die Zeit, welche zwischen dem Aufhören der Ladung und dem Beginne der Entladung vergeht.

Tabelle VII gibt die Resultate, welche bei einer ladenden Batterie von 12 kleinen Bunsen-Elementen unter Anwendung eines Meyerstein's'schen Galvanometers (Schwingungsdauer 10,4 Sec.); Tabelle VIII jene, welche mit 1 $D \cdot E$ als ladende Batterie und dem Thomson-Galvanometer (Schwingungsdauer diesmal 10 Sec.) erhalten wurden.

Tabelle VII.

t_1 Sec.	t_2 Sec.	
	0,007	2
	V	
0,002	3,494	3,478
0,3	3,501	3,486
60	3,532	3,530
1200	3,538	3,532

Tabelle VIII.

t_1 Sec.	t_2 Sec.		
	0,007	2	60
	V		
0,002	3,572	3,543	3,461
0,3	3,600	3,577	3,495
60	3,620	3,611	3,575
1200	3,637	—	3,584

Die Zahlen V, welche das Verhältnis zwischen der Capacität des Glimmer- und der des Luftcondensators angeben, sind nur in derselben Tabelle unmittelbar miteinander vergleichbar. Sie sind in Tabelle VIII etwas grösser als in Tabelle VII, weil bei einer Gelegenheit die Capacität des Glimmercondensators durch Anziehen der Schraubenmuttern am Deckel ein wenig vergrössert wurde.

Die Werthe von V für $t_1 = 1200$, $t_2 = 0{,}007$ Sec. und $t_1 = 0{,}002$, $t_2 = 60$ Sec. liegen am weitesten auseinander. Ihr Unterschied beträgt ungefähr 6%. Eine so weite Abänderung der Versuchsbedingungen wird jedoch in der Praxis selten vorkommen. Schliessen wir also die beiden Fälle $t_1 = 0{,}002$, 0,3 und $t_2 = 60$ Sec. aus, so besteht noch

immer eine grosse Wahrscheinlichkeit, dass sich alle in der Praxis vorkommenden Capacitätsbestimmungen innerhalb der obigen Grenzen bewegen werden und der Unterschied in diesen Bestimmungen wird selbst in den extremsten Fällen 2 % nicht übersteigen. Nimmt man die für ein mittleres t_1 und t_2 gefundene Capacität als richtig an, so wird man bei Messungen im ungünstigsten Falle einen Fehler von etwas über 1 % machen. Ich glaube kaum hinzufügen zu müssen, dass für wenig verschiedene t_1 und t_2 die Capacität immer auf mehr als 0,2 % gleich gefunden wird.

Im Anschlusse an Tabelle VIII habe ich auch einen Vergleich mit Hilfe des Stimmgabelinterruptors bei $^1/_5\ D \cdot E$ als ladendes Potential gemacht. Es wurde

$$V = 3{,}590$$

bestimmt; ein Werth, der mit den Bestimmungen der Tabelle VIII sehr gut harmonirt. Bezüglich des Einflusses des ladenden Potentials auf den Werth der Capacität brauche ich wohl nur auf die bei der Bestimmung der Dielektricitätsconstante gewonnenen Resultate hinzuweisen.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, die Leistung dieses Condensators mit denen anderer zu vergleichen, über welche Messungen vorliegen. Dieser Vergleich kann freilich nicht besonders genau ausfallen, da ja t_1 und t_2 bisher nie innerhalb so weiter Grenzen geändert wurde wie im vorliegenden Falle.

Ausführliche Messungen über Condensatoren sind von H. Schneebeli (a. a. O.) ausgeführt worden. Er untersuchte Condensatoren von verschiedenem Material, aber keiner erfüllte die Bedingungen, die man an einen guten Condensator zu stellen berechtigt ist. Er griff deshalb zu Hartgummi und verfertigte sich einen Normal-Condensator aus 96 Platten mit ca. $^2/_3$ qm Belegung und einer mittleren Dicke von 0,6 mm. Er hatte eine Capacität von 0,965 Mf. Die Platten wurden vor dem Zusammenstellen längere Zeit in einem trockenen, sonnigen Raume ausgelegt und mehrmals sorgfältig abgerieben. Ueber die Abhängigkeit der Capacität dieses Condensators von der Ladungsdauer liegen zwei Beobachtungen vor. Die erste von Schneebeli ergab einen Unterschied von $^1/_2$ % für die Ladungsdauern „sehr kurz" und 60 Sec. Die zweite von Kägi (a. a. O. S. 31) zeigte eine Differenz von 1,8 % für die Ladungsdauern 0,01 und 10 Sec. Ich vermuthe, dass die Abweichung in den Angaben der beiden Beobachter darauf zurückzuführen ist, dass zur Zeit der Kägi'schen Messungen das Hartgummi etwas Feuchtigkeit angezogen hatte. Jedenfalls scheint nach diesen Erfahrungen das Hartgummi, wenn es fort in trockener

Luft gehalten wird, ein sehr gutes Condensatormedium zu sein und dürfte den Glimmer vielleicht an Güte übertreffen.

Condensatoren, welche bezüglich der Qualität mit dem Glimmercondensator verglichen werden können, liefert die Firma Berthoud Borel und Cie. in Cortaillod. Ueber dieselben liegen drei Untersuchungen vor. Schneebeli[1]) beobachtete einen Unterschied von nicht ganz 1% im Entladungsausschlag bei Ladungsdauern „momentan" und 60 Sec. Nach ihm scheint übrigens bei diesen Condensatoren auch eine Abhängigkeit der Capacität vom ladenden Potential zu bestehen. Beetz[2]) findet für die Ladung 1 und 60 Sec., eine Differenz von 1%, nahezu das gleiche Resultat wird auch von Tobler[3]) angegeben. Bei diesen Condensatoren bildet das Dielektricum ein Gemisch von Colophonium und oxydirtem Leinöl[4]). Der Isolationswiderstand ändert sich sehr stark mit der Temperatur. Im allgemeinen dürften diese Condensatoren den Glimmercondensatoren nachstehen.

Ueber die Rückstandsbildung im Glimmer.

Mit dem soeben beschriebenen Condensator machte ich auch einige Versuche über die Rückstandsbildung im Glimmer. Dabei wurde der Condensator durch 20 Clark'sche Elemente während der Zeit t_1 Sec. geladen. Nach Trennung des Condensators von der ladenden Kette wurde er sodann zu bestimmten Zeiten T während eines kurzen Momentes mit einem Luftcondensator von kleiner Capacität verbunden. Nach Trennung der beiden wurde hierauf der Luftcondensator durch das Thomson-Galvanometer entladen und dabei der Ausschlag φ beobachtet. φ ist ein Maass für das auf der isolirten Belegung des Glimmercondensators herrschende Potential. Die Capacität des Luftcondensators war der 202. Theil derjenigen des Glimmercondensators und mit Rücksicht darauf wurde φ entsprechend corrigirt. Vor jeder Beobachtungsreihe war der Glimmercondensator durch längere Zeit zur Erde abgeleitet. Tabelle IX (S. 388) gibt ein Bild des Verlaufs der Rückstandsbildung. ϑ gibt die Temperatur an. T wurde vom Ende von t an gezählt.

Die Dauer der vorhergegangenen Ableitung zur Erde übt auf den Gang der Rückstandsbildung einen grossen Einfluss aus, wenn der Condensator viel gebraucht wurde. So konnte eine kleine Verschiedenheit in den Zahlen constatirt werden, je nachdem der Condensator

1) Züricher Vierteljahrschrift Bd. 27 S. 176 (1882).
2) Bericht über die Elektricitäts-Ausstellung in München S. 151.
3) Uppenborn's Centralblatt für Elektrotechnik S. 61 (1885).
4) Bericht über die Elektricitäts-Ausstellung in München S. 82.

vier oder zwölf Stunden abgeleitet war, und ich vermuthe, dass auch die Thatsache, dass die Zahlen der Tabelle IX für $t = 0{,}002$ etwas langsamer abfallen als für $t = 2$ Sec., auf den Einfluss vorhergegangener Ladungen zurückzuführen ist, obwohl die Ableitung des Condensators in beiden Fällen eine Nacht hindurch dauerte. Vor den Beobachtungen der letzten Rubrik war er durch 22 Stunden mit der Erde verbunden. Es ist übrigens leicht einzusehen, dass die Zahlen für die beiden kleineren Ladungsdauern nicht weit differiren können.

Tabelle IX.

$\vartheta = 20{,}6°$.

T Min.	t Sec.		
	0,002	2	1200
	φ		
0	43,9	43,9	43,9
1	42,5	42,7	43,4
3	41,6	40,9	43,1
10	39,9	39,5	42,2
30	38,0	37,2	40,6
60	35,8	35,4	39,2

Ueber den Isolationswiderstand des Glimmercondensators.

Man pflegt bekanntlich diesen Widerstand durch den Ladungsverlust während einer bestimmten Zeit zu bestimmen. Nun kommt aber bei dieser Beobachtungsweise neben dem Verluste durch die Leitung immer auch die Rückstandsbildung in Betracht und gerade beim Glimmer ist der scheinbare Verlust an Ladung vielmehr auf diese als auf die Leitung des Dielektricums zu setzen.

Um nun wenigstens einen Grenzwerth für den wirklichen Isolationswiderstand dieses Condensators zu erhalten, habe ich folgende zwei Versuche angestellt:

1. Es wurde ein geschlossener Kreis gebildet von der einen Belegung durch 20 Clark'sche Elemente und durch das Thomson-Galvanometer zur anderen Belegung. Die beim Schliessen des Kreises in den Condensator stürzende Elektricitätsmenge würde am Galvanometer einen Ausschlag von 8900 Scalentheilen hervorgebracht haben. Ein Nebenschluss vor dem Galvanometer, welcher nach der Schliessung entfernt wurde, verhinderte die heftige Ablenkung der Nadel.

Nachdem der Kreis auf diese Weise geschlossen war, stellte sich bei der Galvanometernadel eine constante Ausweichung ein, welche jedoch immer kleiner und kleiner wurde. Commutirte man nun die

Pole der Batterie, so waren die constanten Ausschläge beinahe doppelt so gross wie vorher, verminderten sich jedoch auch rascher. Schaltete man die Batterie aus und schloss den Kreis ohne dieselbe, so zeigte das Galvanometer einen entgegengesetzten Strom an, der ebenfalls wie die früheren mit der Zeit abnahm. Vor dem Galvanometer war ein Commutator eingeschaltet und in Tabelle X und XI ist unter φ der Stellungsunterschied der Nadel angegeben. Die darin enthaltenen Zahlen geben besonders für die ersten Zeiten nur ein Bild des Verlaufes dieser Ablenkungen und machen auf eine Genauigkeit keinen Anspruch; eine solche war bei der schwachen Dämpfung der Galvanometernadel nicht zu erreichen.

Es muss bemerkt werden, dass die Nadel auch ohne eingeschalteten Condensator und Batterie beim Umlegen des Commutators vor dem Galvanometer einen Ausschlag von einem Strich anzeigte. Dieser Strich ist von φ in den nachstehenden Tabellen abgezogen. Nach Verlauf einer längeren Zeit war also in dem beschriebenen Kreise kein Fliessen der Elektricität mehr zu beobachten. Das Thomson-Galvanometer hatte feindrahtige Rollen mit 49840 Windungen und 13200 Ohm Widerstand bei 18°. Bei einer Scalendistanz von 2,3 m und 12 Sec. Schwingungsdauer würde ein Volt durch 14850 Megohm geschlossen, einen einseitigen Ausschlag von 1 mm hervorgebracht haben. Da in unserem Falle nach längerem Schluss bei 20 Clark'schen Elementen sicher kein Doppelausschlag von 1 mm zu beachten war, so folgt daraus, dass der Isolationswiderstand mindestens 860000 Megohm beträgt.

Tabelle X.

T Min.	φ	T (Pol comm.)
1	30	61,0
2	16	25,0
3	10,5	19,5
5	8,8	13,0
10	7,0	8,4
20	4,0	4,5
42	2,9	3,0
95	1,5	—
820	—	0,0

Tabelle XI.
Batt. ausgesch.

T	φ
1	29
2	16
3	12,7
5	10,0
10	6,0
25	4,0
60	2,0
120	1,3
300	0,6

Nun entsteht die Frage, in welcher Weise das durch die Galvanometerablenkungen angezeigte Fliessen der Elektricität und die Abnahme

desselben zu erklären wäre. Man könnte diese Erscheinung einer elektrolytischen Leitung im Condensator zuschreiben, wobei man jedoch annehmen müsste, dass durch die Polarisation allmählich eine elektromotorische Gegenkraft geweckt wird, welche nahezu an die der 20 Clark'schen Elemente heranreicht. Eine solche Annahme ist jedoch bei unserer bisherigen Kenntniss über die Leitung in Elektrolyten durch nichts gerechtfertigt. Es ist aber auch möglich, dass die Rückstandsbildung im Condensator allein schon genügt, um das Vorhandensein und Aufhören des Stromes zu erklären. Eine Vergleichung der Zahlen in den Tabellen IX und X muss uns über die Möglichkeit einer solchen Erklärung Aufschluss geben. Zu diesem Zwecke wollen wir folgende Betrachtung anstellen: Die Capacität des Glimmercondensators beträgt 0,15 Mf. Wird er mit 20 Clark'schen Elementen = 29 Volt geladen, so nimmt er im ersten Moment eine Elektricitätsmenge $= 4{,}35 \times 10^{-6}$ Coulomb auf. Bei kurzen Ladungsdauern sinkt das Potential innerhalb der ersten Minute infolge der Rückstandsbildung um 3,2 % (Tabelle IX). In diesem Verhältnisse kann in dem Schliessungskreise eine entsprechende Elektricitätsmenge von 0,14 Mikro-Coulomb nachfliessen. Nimmt man während dieser einen Minute ein gleichmässiges Fliessen an (was natürlich nicht der Fall ist), so müsste im Schliessungskreise eine Stromstärke von 0,0023 Mikro-Ampère herrschen. Das Galvanometer gibt eine Ablenkung von 1 Scth. für 0,000067 Mikro-Ampère; es hätte also während der ersten Minute einen mittleren Stellungsunterschied von 68 Scalentheilen zeigen sollen. Es konnte leider nur der Endwerth von φ beobachtet werden und dieser ist 30,0. Für das Intervall zwischen 1—3 Minuten berechnet sich ein Stellungsunterschied von 22 und beobachtet wurde ein solcher von 18,2 Strichen. Für $T = 20$ Minuten berechnet sich aus der letzten Rubrik der Tabelle IX $\varphi = 24$, während die Beobachtung nur 4 Scalentheile ergab. Dieser Unterschied rührt davon her, dass es verabsäumt wurde, den Condensator vor den in Tabelle X und XI verzeichneten Beobachtungen so lange zur Erde abzuleiten, wie dies bei der Beobachtung der Rückstandsbildung der Fall war; daher fallen für die späteren Zeiten die berechneten φ grösser aus als die beobachteten. Jedenfalls geht aus dieser Betrachtung hervor, dass das beobachtete Fliessen der Elektricität nur durch Rückstandsbildungen zu erklären ist.

2. Der Condensator wurde durch nahezu 24 Stunden zur Erde abgeleitet. Hierauf wurde die eine Belegung isolirt und 90 Minuten so belassen und nach dieser Zeit durch das Thomson-Galvanometer entladen. Es zeigte eine momentane Ablenkung von 1,7 Strich. Dies scheint darauf hinzudeuten, dass der Rückstand trotz der lang dauernden Ablenkung doch noch nicht ganz verschwunden war. In derselben

Leitung wie das Thomson-Galvanometer befand sich auch ein Meyerstein'sches. Schickte man durch die hintereinander geschalteten Galvanometer eine Condensatorentladung, so verhielten sich die Ausschläge wie 30 : 1. Die während der 90 Minuten auftretende Ladung des Condensators wäre also am Meyerstein'schen Galvanometer gar nicht zu beobachten gewesen. Bei der nachfolgenden Beobachtungsreihe, welche mit diesem gemacht wurde, waren daher Störungen von Seite früherer Rückstände in einer bemerkbaren Weise nicht zu befürchten.

Es wurde nun ein Luftcondensator von 0,043 Mf. durch 20 Clark'sche Elemente geladen und durch das Galvanometer entladen; es ergab einen Ausschlag von 79,4 Scalentheilen. Hierauf wurde der Luftcondensator abermals mit derselben Kette geladen und zu einer bestimmten Zeit 0 während eines kurzen Momentes mit dem Glimmercondensator verbunden. Nach Trennung der beiden Condensatoren zeigte das Galvanometer bei der Entladung des Luftcondensators eine Ausweichung von 17,7 Scalentheilen. Es verblieb daher im Glimmercondensator eine dem Ausschlage von 61,7 Scalentheilen entsprechende Elektricitätsmenge. Nun wurde zu gewissen Zeiten T (Tabelle XII) der Glimmercondensator durchs Galvanometer mit der Erde verbunden, sonst aber die eine Belegung immer isolirt gehalten. t bedeutet die Zeit, welche zwischen der einen und der ihr vorangegangenen Ableitung verflossen ist. α sind die bei den entsprechenden Zeiten beobachteten Galvanometerausschläge.

Tabelle XII.

T Min.	t Min.	α
60	—	51,6
70	10	3,1
89	19	1,3
130	41	1,4
180	50	0,8
300	120	0,9
424	124	0,5
549	125	0,3

Von den 61,7 Scalentheilen hat man also innerhalb des angegebenen Intervalls 59,9 wieder zurückgewonnen. Es bleibt ein Rest von 1,8 Scth., welcher theilweise noch als Rückstand im Condensator stecken geblieben,

theilweise aber auch vielleicht durch Leitung im Dielektricum verloren gegangen ist. Da es sich nur um einen Grenzwerth für den Isolationswiderstand handelt, so wollen wir annehmen, es sei das letzte der Fall, und zwar habe der Condensator die den 1,8 Scalentheilen entsprechende Elektricitätsmenge während der ersten 60 Minuten verloren. Dann folgt der Isolationswiderstand mindestens = 800000 Megohm.

Nimmt man an, dass die Stanniolbelegung überall unmittelbar am Glimmer [1]) aufliegt, und dass die Platten im Mittel eine Dicke von 0,005 cm haben, wie das an einem Stücke gefunden wurde, so würde daraus folgen, dass der Glimmer 6×10^{21} schlechter leitet als Quecksilber. Für einen Cubikmeter Glimmer ergibt sich ein Widerstand von 6×10^{15} Ohm, während für einen Cubikmeter der besten Guttaperchasorte [2]) der Widerstand = $74{,}7 \times 10^{12}$ gefunden wurde. Die zuletzt angeführten Zahlen sind aber selbstverständlich nur als eine untere Grenze anzusehen.

Die oscillatorische Entladung des Glimmercondensators.

Fig. 2 gibt die Anordnung der Apparate. Die Bezeichnung ist dieselbe wie in der ersten Figur. P war eine feindrahtige Rolle, bestehend aus 8000 Windungen. Der Coefficient der Selbstinduction

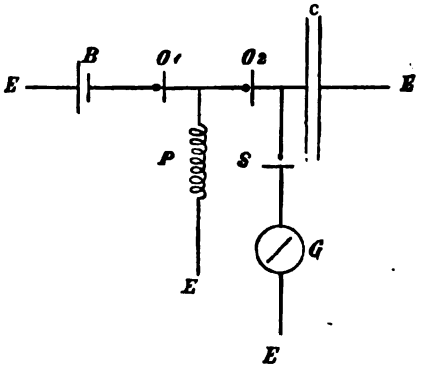


Fig. 2.

= 45300 km, der Widerstand = 3140 Ohm bei 16,4° Ladungsbatterie 1 $D \cdot E$, Ladungsdauer = 0,3 Sec., Entladung nach 0,007 Sec., Schwingungsdauer der Galvanometernadel = 10 Sec., Temperatur am Condensator = 21,6°. Tabelle XIII (S. 393) gibt unter n die Stellung der

1) Dies ist gewiss nicht der Fall. Belegung und Glimmer sind jedenfalls an mehreren Stellen durch Luftschichten getrennt. Die Berechnung des Widerstandes des Glimmers kann selbstverständlich nur als eine angenäherte betrachtet werden.

2) Siehe Maxwell, Lehrbuch der Elektricität etc. Deutsche Ausgabe 1. Bd., S. 526.

Trommel, bei welcher der Ausschlag φ (0 oder ein Maximum) beobachtet wurde. Die Trommelstellungen, bei welchen die Oscillationscurve durch Null ging, wurden durch Interpolation gefunden.

Tabelle XIII.

n	φ
7,47	0
15,80	— 295,7
28,88	0
37,80	+ 116,6
50,86	0
59,25	— 40,9
71,12	0

Der Werth einer Trommelumdrehung im Zeitmaass ist im Mittel $= 0{,}000128$ Sec. Daraus bekommt man folgende Schwingungsdauern: $\tau = 0{,}00274$, 0,00282 und 0,00259 und die brigg. log. Decremente $\lambda = 0{,}405$ und 0,455.

Nach der Theorie folgt $\tau = 0{,}00275$ und $\lambda = 0{,}422$.

Die Abweichungen unter den drei beobachteten Werthen von τ sind viel zu gross, als dass sie aus Beobachtungsfehlern erklärt werden könnten. Sie lassen sich jedoch erklären, wenn man annimmt, dass beim Abfliessen der jedesmaligen disponiblen Ladung auch noch eine kleine Rückstandsentladung erfolgte, was ja bei der ziemlich langen Schwingungsdauer des Galvanometers und bei der Ladungsdauer von 0,3 Sec. leicht möglich ist. Während nun die erste ihr Zeichen änderte und mit der Zahl der Oscillationen abnahm, blieb die letzte nahezu gleich gross und gleich gerichtet [1]). Dies muss aber eine Verschiebung der Nullpunkte und der Maxima in der hier beobachteten Weise zur Folge haben. Um also eine reine Oscillationscurve zu erhalten, wäre es nothwendig, den Condensator immer nur einen Moment mit dem Galvanometer in Verbindung zu lassen. Die richtigen Werthe für τ und λ lassen sich jedoch auch aus den angeführten Beobachtungen berechnen. Man braucht nur zu beachten, dass das log. Decr. eine

1) Bei Trommelstellungen, welche sehr nahe den Nullpunkten entsprachen, konnte man namentlich beim vierten und fünften Durchgangspunkte sehr deutlich wahrnehmen, dass die Galvanometernadel zwei Impulsen ausgesetzt war. Dies war natürlich besonders gut zu beobachten, wenn sich die beiden Impulse entgegenwirkten.

constante Grösse sein muss; dann folgt aus den Beobachtungen $\lambda = 0{,}418$ und $\tau = 0{,}00276$. Werthe, welche mit den berechneten sehr gut übereinstimmen: Ein Einfluss der elektrischen Absorption auf λ im Sinne der Ausführungen von Colley[1]) machte sich also hier nicht bemerkbar.

Schliesslich will ich noch einige Bemerkungen über die Untersuchung des Herrn F. Kägi machen, deren Ergebnisse er in folgenden Punkten zusammengestellt hat: 1. Der Glimmercondensator ist kein Präcisionsmessapparat, denn a) seine Ladung ist nicht unabhängig von der Ladungszeit, sondern nimmt mit dieser rasch zu (Ladungsdauer 0,01, Ausschlag 59,4; Ladungsdauer 120 Sec., Ausschlag 120), b) seine Ladung ist nicht proportional dem ladenden Potential, c) die Isolationsfähigkeit des Glimmers ist verhältnismässig klein und 2. Glimmer leitet ähnlich wie ein Elektrolyt. Meine Beobachtungen ergaben Resultate, welche diesen zumeist widersprechen. Eine Discussion der Kägi'schen Messungen würde mich vielleicht etwas zu weit führen; ich will daher nur bemerken, dass die Isolation von Leitungsdrähten durch Hartgummi (wie dies Kägi that) bei Condensatorversuchen sehr oft Fehler veranlasst, die man wo anders zu suchen geneigt ist. Hartgummi zieht nämlich in gewöhnlicher Luft mit der Zeit so viel Feuchtigkeit an, dass man schliesslich von einer Isolation gar nicht mehr sprechen kann. Ich isolire daher die Leitungsdrähte immer durch Siegellack. Da mich einmal die Thatsachen überzeugten, dass die an der Oberfläche von Isolatoren wie Hartgummi und Glas condensirte Feuchtigkeitsschichte nicht bloss Ladungsverluste, sondern auch Erscheinungen nach Art der elektrolytischen Polarisation zur Folge hat und hin und wieder sogar zum Auftreten von elektromotorischen Kräften (wie bei einem galvanischen Element) Veranlassung gibt, so wollte ich untersuchen, in welcher Weise der Glimmercondensator sein Verhalten in feuchter Luft ändern würde. Ich nahm daher die Schwefelsäure weg und stellte ein Gefäss mit Wasser zum Condensator. Nach zwei Tagen bestimmte ich die Capacität desselben in der Weise, wie bei den Beobachtungen in Tabelle VIII, und es ergab sich folgendes Resultat.

	$t_1 = 0{,}007$ Sec.
t_1 Sec.	V
0,002	3,78
0,3	7,75
60	9,98.

1) Wied. Ann. Bd. 26, S. 441.

Also ganz dieselben Erscheinungen wie bei den Messungen Kägi's, nur noch etwas verstärkt [1]). Durch die Einwirkung der ladenden Kette treten beim feuchten Condensator Polarisationserscheinungen auf, wie in einer elektrolytischen Zelle, wobei jedoch die Stärke der Polarisation mit der Ladungsdauer und dem ladenden Potential wächst, bis sie schliesslich für gewisse Werthe derselben ein Maximum erreicht. Auf solche Einflüsse werden auch die Unregelmässigkeiten zurückzuführen sein, welche sich bei Kägi's Beobachtungen (S. 43) mit einem Luftcondensator herausstellten. In gleicher Weise werden sich auch die anderen Erscheinungen erklären lassen, welche meinen Angaben widersprechen; am leichtesten wohl die, dass der Glimmer ähnlich wie ein Elektrolyt leitet.

1) Da ich die Vorrichtung, welche mir zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante des Glimmers diente, nicht unter einen Trockenapparat bringen konnte, so wird das scheinbare Anwachsen der Dielektricitätsconstante bei 20 Sec. Ladungsdauer jedenfalls auf die am Glimmer condensirte Feuchtigkeit zurückzuführen sein. Bei der kleineren Ladungsdauer übte sie jedoch sicherlich keinen Einfluss aus.

Zur genaueren Bestimmung des specifischen Gewichtes.

Replik.

Von

A. Kurz.

Leider bemerkte ich die Notiz dieses Titels von Handl im vorigen Bande S. 467—469 erst, als dieser Jahresband gebunden in meine Hand kam. Sonst hätte ich getrachtet, auch noch im vorigen Bande meine dankende Zustimmung zu jener Notiz auszusprechen.

Der genauere Vergleich mit meiner Ableitung S. 69—71 daselbst, vorgenommen zur künftigen Vermeidung von Umwegen, zeigt die Uebereinstimmung in den beiden ersten Gleichungen und in der durch Subtraction beider erlangten dritten Gleichung[1]). Aber dann, bei der Division der ersten und dritten Gleichung, erzielt Handl sofort und ohne Annäherung die Schlussgleichung, indem er je auf der linken Seite die Binome belässt und das Körpervolumen v einführt, das sich bei der Division forthebt, wie auch das specifische Gewicht s der Vergleichsgewichte.

Aber bezüglich des zweiten Theiles der Notiz von Handl, der nichts mehr mit meiner angezogenen Notiz zu thun hat, kann man meines Erachtens ihm nicht mehr folgen. Denn die „Rechnungsregel, welche in unrichtiger Form die richtige Operation vorschreibt", wird wohl nur verursacht, weil Verfasser seiner früheren Bezeichnung nicht getreu bleibt. So ist das Gewicht des Körpers in der Luft

$$p' - v'\lambda \text{ und nicht } p'$$

und sein Gewicht unter Wasser

$$p' - v'\lambda - p'' + v''\lambda \text{ und nicht } p' - p''.$$

Aehnliches gilt vom Absatze a) des Verfassers, der von der Verschiedenheit des specifischen Gewichtes in der Luft „bei den einzelnen (das sind zwei) Operationen" handelt. Wenn dieser Fall wirklich praktisch werden sollte, was kaum eintreten dürfte, da $d\lambda$ so zu sagen unendlich klein der zweiten Ordnung ist, so dürfte man nur in der ersten der zwei obengenannten Gleichungen λ' und in der zweiten λ''

1) Diejenige bei Handl $v' = p' : s$ gilt als nicht numerirt.

setzen und im Uebrigen verfahren wie oben, wodurch freilich die resultirende Formel complicirter wird.

Absatz b) daselbst handelt von der „Ermittlung der specifischen Gewichte zweier Flüssigkeiten, (die ich S'' und s'' nennen will, um die Bezeichnung des Verfassers im Früheren ungeändert brauchen zu können) durch Beobachtung der Gewichtsverluste P'' und p'' eines Tarierkörpers". Der eine dieser beiden, S'' oder s'', muss da bekannt sein, wie auch die von Handl gegebene Schlussformel zeigt, die ich jetzt ableiten werde:

Tarierkörper, vom Volum v und dem specifischen Gewichte s, in Luft gewogen:

$$vs - v\lambda = P - V\lambda,$$

wo also P das scheinbare Luftgewicht, V das Volum der betreffenden Gewichtstücke, λ (wie oben) das specifische Gewicht der Luft ist.

Tarierkörper in der ersten Flüssigkeit

$$vs - vS'' + P' - V'\lambda = P - V\lambda.$$

Durch Subtraction wieder die dritte Gleichung gebildet

$$v(S'' - \lambda) = P' - V'\lambda = P' - (P' : s)\lambda = P'\left(1 - \frac{\lambda}{s}\right),$$

und analog für die zweite Flüssigkeit

$$v(s'' - \lambda) = p''\left(1 - \frac{\lambda}{s}\right),$$

wenn dasselbe λ gilt, also nicht „bei was immer für Luftzuständen". Dann kommt durch Division

$$\frac{S'' - \lambda}{s'' - \lambda} = \frac{P'}{p''},$$

welche Gleichung Handl nach S'' aufgelöst hat. Es resultirt dieselbe Formel wie die zu meinem zweiten Absatze oben (dort aber nicht reproducirte) gehörige. Bedeutet s'' z. B. wieder das Wasser, dessen specifisches Gewicht σ, so wird die Uebereinstimmung noch vollständiger; nur in den scheinbaren Gewichtsgrössen (P' und P) ist ein Unterschied der Bedeutung zu constatiren, welchen hier noch mit Worten anzugeben überflüssig erscheinen darf. —

Statt dessen will ich zunächst noch auf einige geschichtliche Notizen zur vorwürfigen Frage eingehen. In der kurzen Anzeige von Handl's Aufsatz durch die Beiblätter zu Wied. Ann. (heuriger Band S. 135, meine vorausgegangene Notiz wurde daselbst im vorhergehenden Bande S. 481 angezeigt) ist R. Kohlrausch (der Vater) als Aufsteller der Formel (s. die letzte Gleichung) genannt. Dagegen beginnt G. F. Becker seinen von Berkeley in Californien, Mai 1878, datirten

Aufsatz „Ueber die Reduction der Wägungen auf den luftleeren Raum bei der chemischen Analyse“ in Liebig's Annalen vom Jahre 1879 S. 222—227 [2]) mit drei Sätzen geschichtlichen Inhalts. Hiernach wäre Turner der erste gewesen, der in seinen im Jahre 1829 ausgeführten Atomgewichtsbestimmungen den Luftauftrieb berücksichtigte. „Berzelius nahm diese Correktion anfangs an, verwarf sie aber als zu unbedeutend. Erdmann und Marchand pflegten, nicht ganz logischer Weise, das Gewicht des gewogenen Körpers, nicht aber jenes der Gewichtstücke auf den leeren Raum zu reduciren“. Aber auch Becker haftet noch etwas von diesem Mangel an Logik an, indem er alsdann schreibt

$$w_1 = w + \frac{wc}{y} - \frac{wc}{d}$$

(w scheinbares, w_1 wirkliches Gewicht des Körpers vom specifischen Gewichte y, d was oben s, c was oben λ), statt bei dem mit y behafteten Gliede w_1 zu schreiben. Die von ihm alsdann ins Feld geführte Hyperbel (mit Figurentafel) macht mir wenigstens den Eindruck einer entbehrlichen Umständlichkeit. Und endlich c ($= \lambda$ oben) $= 0{,}001225761$ (neun Decimalen!) als „Gewicht eines CC. trockener Luft, mit dem normalen Kohlensäuregehalt auf dem 45° Breitengrad, bei normaler Pressung und 15° Cels.“ gehört auch in dieses Gebiet, welches ich weiter oben mit der Angabe des Differentials von λ schon berührt habe. Ich erlaube mir deshalb noch auf mein numerisches Beispiel, bezw. von F. Kohlrausch (dem Sohne), am angeführten Orte hinzuweisen.

2) Zu diesem Aufsatze hatte ich gleich nach dem Erscheinen eine kritische Notiz an Prof. Erlenmayer, damals in München und Mitredacteur jener Annalen, eingesendet, die aber trotz meiner persönlichen Erinnerung nicht erschienen ist.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 20. März 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Dr. M. Margules hält den angekündigten Vortrag: „Ueber den inneren Druck der Flüssigkeiten".

Herr Dr. S. Zeisel spricht: „Ueber Derivate hydrirter Benzole".

Wien, 17. April 1888.

Der Secretär.

Eingesendete Bücher.

Urbanitzky A. v., Die Elektricität des Himmels und der Erde. Lief. 2—15. Wien, Hartleben's Verlag. Die vorliegenden Lieferungen behandeln und erläutern durch zahlreiche Illustrationen: Die Gewittererscheinungen im Alterthum und in der Neuzeit, die atmosphärische Elektricität, Blitz und Donner, Blitzwirkungen und Blitzschutzvorrichtungen.

Kahlbaum G., Aus der Vorgeschichte der Spectralanalyse. Ein Vortrag. Basel bei B. Schwabe 1888. 48 S. Eine sehr interessante historische Studie über die der Entdeckung der Spektralanalyse vorausgegangenen physikalischen Forschungen, nebst einer betreffenden Literaturangabe.

Budde W., Physikalische Aufgaben für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Braunschweig bei F. Vieweg & Sohn. 1888. 148 S. 2 Mk. 50. Eine sehr passend zusammengestellte Sammlung von Aufgaben aus allen Gebieten der Physik nebst einem Anhang mit den Auflösungen derselben.

Osnaghi, Prof., Rapporto Annuale dell' Osservatorio marittimo di Trieste. Für das Jahr 1885.

Jahrbuch des kgl. sächsischen meteorologischen Institutes für 1886. Abtheilung I—III.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdriefsen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden."

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a'6)

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale

Elektrische Maasssystem

im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis M. 1.—.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(13a/6)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

Verlag von R. Oldenbourg in München und Leipzig.

Taschenbuch für Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von Ingenieur S. Freiherr v. Gaisberg.

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

klein 8. VIII und 128 Seiten. Preis gebunden 2 M. 40 Pf.

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.
(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)
Soeben erschien:

Müller-Pouillet's
Lehrbuch
der Physik und Meteorologie.

Bearbeitet von
Dr. Leop. Pfaundler,
Professor der Physik an der Universität Innsbruck.

Dritter Band. **Elektrische Erscheinungen.** Neunte umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit Holzstichen. gr. 8. geh. (7 6)
Erste Abtheilung. Preis 4 Mark 50 Pf.

Verlag von R. Oldenbourg in München und Leipzig.
Die elektrischen
NATURKRAEFTE,
der Magnetismus, die Elektricität und der galvanische Strom mit ihren hauptsächlichsten Anwendungen.

Inhalt. Der Magnetismus. — Die elektrischen Fundamentalerscheinungen. — Der Blitz u. die Blitzableiter. — Der galvanische Strom. — Die Telegraphie. — Inductionsströme u. Inductionsapparate. — Das elektrische Licht. — Der Elektromagnetismus als Triebkraft. — Die Galvanoplastik. — Elektr. Zündungen.
Gemeinfasslich dargestellt von
Dr. Ph. Carl,
Professor an der kgl. Kriegsakademie in München.
Zweite Auflage. 1879. 8. 276 Seiten Text mit 113 Holzschn. Geh. 3 M., eleg. in Ganzlnwd. geb. 4 M.

Das **Leipziger Tageblatt** schreibt:

Da des öftern jetzt Anfragen an uns ergehen, welches der verschiedenen Konversations-Lexika das verbreitetste sei, so nehmen wir bei der soeben erfolgten Ausgabe des zehnten, von »Königshofen« bis »Luzon« reichenden Bandes von **Meyers Konversations-Lexikon** Gelegenheit, festzustellen, dafs dieses Werk sich der weitesten Verbreitung unter allen ähnlichen Werken erfreut. Das dankt es ohne Zweifel nicht nur seiner vortrefflichen Ausstattung und der Gediegenheit und künstlerischen Vollendung der zahlreichen Beilagen, sondern unsrer Ansicht nach vor allem auch seiner ganz vorzüglichen textlichen Bearbeitung, welche auf jeder Seite von dem richtigen Erfassen dessen, was in eine Encyklopädie gehört, dem richtigen Abwägen des Notwendigen vom Überflüssigen Zeugnis ablegt. Nirgendwo ist gewifs mehr als bei einem derartigen Werk des Plinius „multum non multa" zu beherzigen, und Meyers Konversations-Lexikon wufste sich mit rühmenswertem Geschick frei von einem verwirrenden Ballast zu halten, der für den Augenblick vielleicht bestechen kann, sich aber bald als nutzlos erweist, weil er über Zweck und Ziel einer Encyklopädie hinausgeht und schliefslich ein solches Werk zu einem Wörterbuch mit vielen Stichwörtern, aber ohne Artikel herunterdrückt, welche in ihrer erschöpfenden Behandlung allein belehren und den Fragenden befriedigen können. Der Reichtum belehrenden Inhalts und neben der gründlichen, gleichmäfsigen Behandlung und der klaren, objektiven Darstellung aller Fächer die Übersichtlichkeit des Ganzen und Einzelnen sind so hochschätzbare Vorzüge obigen Werkes, dafs der seltene Erfolg nicht ausbleiben konnte. Doch auch in andrer Hinsicht hat die Verlagshandlung das auf sie gesetzte Vertrauen gerechtfertigt. Das „Bibliographische Institut in Leipzig" hat von jeher voll geleistet, was es versprochen, und seit dem Beginn des Erscheinens ist unsers Wissens nicht eine Abweichung vom Programm des Werkes eingetreten. So sind wir hier auch sicher, dafs es nicht — es liegt gerade jetzt der Fall bei einem ähnlichen Werk vor — erlahmt und womöglich unvollendet bleibt. Alles in allem fassen wir unser Urteil dahin zusammen, dafs Meyers Konversations-Lexikon nicht nur in seinem hohen innern Wert, sondern auch in seiner grofsartigen Verbreitung unübertroffen dasteht. (6/6)

XXIV. Band. 7. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 7. Heftes.

Ueber ein merkwürdiges optisches Problem von Maxwell. Von Dr. Ludwig Matthiessen. S. 401.
Experimentaluntersuchungen über magnetische Coercitivkraft. Von L. Külp. S. 408.
Folgerungen aus den Eigenschaften der elektrischen Leitungsfähigkeit von Salzlösungen. Von Gustav Jäger. S. 416.
Ueber die optischen Eigenschaften des Tabaschir. Von E. Brücke. S. 434.
Versuche und Bemerkungen über den galvanischen Lichtbogen. Von H. Luggin. S. 446.
Bestimmungen der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten. Von Theodor Wähner. S. 461.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 17. April 1888. S. 470.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Die Constante variirt nur, wenn man zu einem benachbarten Strahle übergeht, wobei sich also nur der Radius der kreisförmigen Trajectorie ändert. Da die Niveauflächen gleicher Indices sphärisch sind, so lässt sich leicht eine Beziehung zwischen p und dem variabeln Index n finden. Sind vor der Spur der Trajectorie auf irgend einer Niveaufläche n der Index, e_2 der Einfallswinkel, hinter der Spur n_1 der Index, e_1 der Brechungswinkel, p und p_1 die aufeinanderfolgenden Senkrechten vom Pole auf die Tangenten, so ist nach dem Brechungsgesetze

$$n \sin e_2 = n_1 \sin e_1$$

oder, wenn man mit y multiplicirt,

$$np = n_1 p_1.$$

Dies gilt für jede dieser Brechungen; also wenn der Lichtstrahl durch ein continuirlich veränderliches Medium geht, welches concentrisch um einen Punkt C geschichtet ist, so ist die Gleichung der Trajectorie

$$np = \text{const.}$$

Vereinigen wir diese Gleichung mit der vorigen, so erhalten wir das erforderliche Brechungsgesetz

$$n = \frac{b}{c^2 + y^2}.$$

Das hypothetische Medium würde also in seinen optischen Eigenschaften einer Fischlinse gleichen, wenn Messungen dasselbe Gesetz der Indexzunahme von der Peripherie bis zum Centrum ergeben. Maxwell scheint es entgangen zu sein, dass seine Formel in Anbetracht der optisch-physikalischen Beschaffenheit der Krystalllinse in der That sich auf die bekannte Formel [1])

$$n = N_1 \left(1 + \zeta \frac{r^2 - y^2}{r^2}\right)$$

zurückführen lässt, wenn man erwägt, dass die Constante ζ stets eine gegen die Einheit sehr kleine Grösse ist und bei den Krystalllinsen der Fische kaum den Werth 0,1 übersteigt. Es ist dann nämlich

$$\text{für } y = 0, \quad n = \frac{b}{c^2} = N_1 (1 + \zeta) = N_m.$$

$$\text{für } y = r, \quad n = \frac{b}{c^2 + r^2} = N_1.$$

Daraus folgt

$$c^2 = \frac{r^2}{\zeta}, \quad b = N_1 \frac{1 + \zeta}{\zeta} r^2,$$

1) Man vergl. diese Zeitschrift Bd. 22 S. 333 (1886) und Mönnich, Untersuchungen über das Brechungsvermögen der Krystalllinse der Vertebraten. Pflüger's Arch. für Physiol. Bd. 40 (1887).

und

$$n = \frac{N_1(1+\zeta)}{\left(1+\zeta\frac{y^2}{r^2}\right)} = N_1(1+\zeta)\left(1-\zeta\frac{y^2}{r^2}\right) = N_1\left(1+\zeta\frac{r^2-y^2}{r^2}\right)$$

bei Vernachlässigung sehr kleiner Grössen zweiter Ordnung.

Legt man einen Kreis mit dem Radius d durch das Bogenelement PQ (Fig. 1) und bezeichnet mit k den Abstand seines Centrums vom

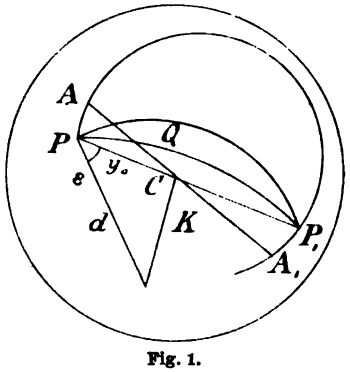


Fig. 1.

Centrum C der Linse, mit ε den Winkel, welchen y mit d bildet, so ist

$$k^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos\varepsilon = d^2 + y^2 - 2dp,$$

mithin

$$c^2 = d^2 - k^2 = (d+k)(d-k).$$

Zieht man also vom Punkte P durch C eine Sehne PP_1 an die kreisförmige Trajectorie, so ist $PC \cdot CP_1 = c^2$. Dies Resultat ist unabhängig von dem gewählten Strahle, welcher von P ausgeht; sämmtliche Strahlen gehen durch P_1 d. h. P_1 ist das stigmatische Bild von P, und PP_1 sind conjugirte Punkte (zweites Theorem von Maxwell). Hiernach ist die Construction der Bilder von Objecten innerhalb eines solchen Mediums sehr einfach. Ist PA das Object, so liegt der Bildpunkt A_1 von A in dem durch die Punkte PAP_1 gelegten Kreise; P_1A_1 ist das Bild von PA. Es muss jedoch bemerkt werden, dass, wenn das zweite Theorem möglich sein soll, $r^2 \geqq c^2$ sein muss, oder, was dasselbe ist, $N_m : N_1 \geqq 2$. Bei den Fischlinsen ist aber nur $N_m : N_1$ selten höher als 1,1. Wie nahe übrigens die Indices der einzelnen Schichten des Maxwell'schen Mediums mit denen der Fischlinse übereinstimmen zeigt folgende Zusammenstellung. Die Constanten der Linse vom Dorsche sind

$$N_1 = 1{,}3830,\ N_m = 1{,}4950,\ \zeta = 0{,}0810$$

und n bedeutet die relativen Indices.

$\frac{y}{r}$	n Maxwell	n mihi	Differenz
0,0	1,0810	1,0810	0,0000
0,1	1,0801	1,0802	0,0001
0,2	1,0775	1,0778	0,0003
0,3	1,0732	1,0737	0,0005
0,4	1,0671	1,0680	0,0009
0,5	1,0596	1,0608	0,0012
0,6	1,0503	1,0518	0,0015
0,7	1,0397	1,0413	0,0016
0,8	1,0278	1,0292	0,0014
0,9	1,0145	1,0154	0,0009
0,95	1,0074	1,0079	0,0005
1,0	1,0000	1,0000	0,0000

Wir wollen nun noch das Maxwell'sche Gesetz prüfen, ob die Bilder sehr weit entfernter Objecte im Wasser auch auf die Retina des Fischauges fallen würden. Viele Messungen haben ergeben, dass der brechende Apparat in diesem Auge fast ausschliesslich die kugel-

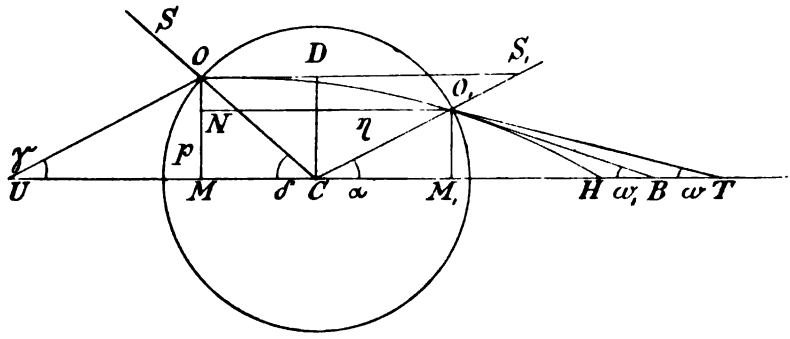


Fig. 2.

förmige Krystalllinse ist, vorne und hinten begrenzt von sehr nahe gleich stark brechenden flüssigen Medien, und dass bei den Fischen die Entfernung der Retina vom Linsencentrum, also die hintere Brennweite das 2,52fache des Linsenradius beträgt.

Ist $C\Phi$ die zweite Hauptbrennweite des Auges und B das Bild eines Objectes U (Fig. 2), so wird für paraxiale Strahlen sein

$$\frac{1}{UC}+\frac{1}{CB}=\frac{1}{C\Phi}=\frac{1}{\varphi}.$$

Wir wählen U so, dass paraxiale Strahlen in die Vorderfläche der Linse parallel zur optischen Axe werden oder mit anderen Worten, dass U der vordere Brennpunkt der Vorderfläche der Linse ist, und wir bestimmen dann den Ort von B. Die kreisförmige Trajectorie sei $O\,O_1\,H$ und $O_1\,T$ die Tangente in O_1. Die optischen Constanten sind für das mittlere Fischauge [1])

$$N_0 = 1{,}3350,\ N_1 = 1{,}3830,\ N_1 : N_0 = 1{,}0360,\ \zeta = 0{,}0909 = \frac{1}{11}.$$

Es sei nun

$$OM = CD = p,\ MH = l,\ ON = \xi,\ NO_1 = \eta,\ M_1 T = t,\ M_1 B = u;$$

dann ist

$$2dp = c^2 + r^2$$

$$l^2 = p(2d - p) = c^2 + r^2 - p^2 = \frac{1+\zeta}{\zeta} r^2 - p^2.$$

Bei Einführung der Gauss'schen Beschränkungen für paraxiale Strahlen wird p sehr klein gegen r sein, also

$$l = r\sqrt{\frac{1+\zeta}{\zeta}}.$$

Ferner ist

$$\eta^2 = 2d\xi - \xi^2,\ \eta\,\partial\eta = d\,\partial\xi - \xi\,\partial\xi,$$

also

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{d-\xi}{\eta},$$

worin ξ gegen d verschwindend klein ist, so dass man setzen kann

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{d}{\eta} = \frac{(1+\zeta)r^2}{2p\eta\zeta} = \frac{\eta}{2\xi}$$

und

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{t}{p-\xi} = \frac{(1+\zeta)r^2}{2p\eta\zeta}.$$

Da nun

$$\xi = \frac{\eta^2}{2d} = 4p\zeta$$

ist, so wird

$$\frac{t}{p(1-4\zeta)} = \frac{(1+\zeta)r^2}{4pr\zeta}$$

und endlich

$$t = \frac{r(1-3\zeta)}{4\zeta}.$$

---

1) Matthiessen, Beiträge zur Dioptrik der Krystalllinse. Berlin-Eversbusch's Zeitschr. für vergl. Augenheilkunde Bd. 5 S. 98 (1887).

Es ist nun

$$\zeta = 0{,}0909 = \frac{1}{11}, \text{ also } t = M_1 T = 2r.$$

Um $M_1 B$ zu erhalten, beachten wir, dass

$$\frac{\sin e_2}{\sin e_1} = \frac{\sin B O_1 S_1}{\sin T O_1 S_1} = \frac{\sin(\alpha + \omega_1)}{\sin(\alpha + \omega)}$$

ist und wegen der Kleinheit der Winkel

$$\frac{\sin(\alpha + \omega_1)}{\sin(\alpha + \omega)} = \frac{\alpha + \omega_1}{\alpha + \omega} = \frac{\frac{p-x}{r} + \frac{p-x}{u}}{\frac{p-x}{r} + \frac{p-x}{t}};$$

folglich

$$\frac{\sin e_2}{\sin e_1} = \frac{1 + \frac{r}{u}}{1 + \frac{r}{t}} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{u}\right) = \frac{N_1}{N_0} = 1{,}0360.$$

Daraus ergibt sich $u = 1{,}8\,r$ und $CB = 2{,}8\,r$.

Um UC zu finden, hat man für die Vorderfläche in Anbetracht verschwindend kleiner Grössen

$$\frac{\sin e_2}{\sin e_1} = \frac{\sin U O S}{\sin M C O} = \frac{\sin(\delta + \gamma)}{\sin \delta} = 1 + \frac{\gamma}{\delta},$$

mithin

$$1 + \frac{r}{UM} = \frac{\sin e_2}{\sin e_1} = 1{,}0360.$$

Daraus ergibt sich $UM = 27{,}78\,r$ und $UC = 28{,}78\,r$. Es ist demnach

$$\frac{1}{28{,}78\,r} + \frac{1}{2{,}8\,r} = \frac{1}{\varphi}, \quad \varphi = 2{,}55\,r,$$

in guter Uebereinstimmung mit den Messungen an acht Fischaugen, welche im Mittel den Werth $\varphi = 2{,}52\,r$ ergeben haben (a. a. O. S. 90). Zu einem nahezu gleichen Mittelwerthe gelangte Sömmering[1]) bei seinen ophthalmometrischen Untersuchungen. Wenn wir das oben erwähnte durch Messungen der einzelnen Linsenschichten mit dem Abbe'schen Refractometer gefundene Gesetz

$$n = N_1\left(1 + \zeta\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right)$$

1) Sömmering, De oculorum hominis animaliumque sectione horizontali. Göttingen 1818. Man vergl. auch: Matthiessen, Untersuchungen über den Aplanatismus und die Periskopie der Krystalllinse des Fischauges. Pflüger's Arch. für Physiol. Bd. 25 S. 195 (1881).

zu Grunde legen, so findet man mit Hilfe der Differentialgleichungen der Brennweite den Totalindex der Krystalllinse in den flüssigen Augenmedien ($N_0 = 1{,}3350$)

$$n_1 = \frac{N_1}{N_0}(1 + 2\zeta + {}^4/_3\,\zeta^2).$$

Nun ist die Hauptbrennweite einer Kugel

$$\varphi = \frac{n_1 r}{2\,(n_1 - 1)}.$$

Durch Einsetzung der oben erwähnten optischen Constanten für das mittlere Fischauge findet man hieraus den wenig von dem vorhergehenden abweichenden Werth $\varphi = 2{,}61\,r$.

Ein bemerkenswerthes Gegenstück zu dem Maxwell'schen Problem ist das folgende:

„Eine durchsichtige Kugellinse ist gegeben und ein leuchtender Punkt in derselben. Es soll der Brechungsindex n als Function von y bestimmt werden unter der Voraussetzung, dass für alle von dem Punkte ausgehenden Strahlen ihre Trajectorien Ellipsen von der grossen Axe $2a$ werden, welche mit der Kugel confocal sind."

Es lässt sich zeigen, dass für das Linsencentrum $N_m = \infty$ und für jede Kugelschicht im Abstande y

$$n = N_1 \frac{r\sqrt{2ay - y^2}}{y\sqrt{2ar - r^2}}$$

sein muss. Dieser Ausdruck ist von der kürzeren Axe $2b$ unabhängig und b für jede andere Trajectorie verschieden. Sämmtliche Ellipsen haben eine äussere Umhüllungscurve; dies ist die kaustische Curve und der Ort der ersten Brennlinien; die zweiten Brennlinien liegen auf der Centralen des leuchtenden Punktes. Ist e_1 der Einfallswinkel eines Strahles im leuchtenden Punkte und sind R und η die Polarcoordinaten, so ist die Gleichung der kaustischen Curve

$$R^2 - 2aR + y_0\left(a + \frac{1}{2}\sin 2e_1\,(2a - y_0)\operatorname{cotg}\eta\right) = 0.$$

Da $pn = \text{const.} = g$, also $p = g\frac{v}{v_0}$ ist, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des Lichts in der Bahn direct wie die Senkrechten aus dem Brennpunkte auf die Tangente. Bei der Planetenbewegung ist $pv = \text{const.}$ Die Umlaufszeiten sind für die Lichtstrahlen

$$T = 2\pi g\frac{a}{b} = \frac{2a\pi}{v_1}.$$

Die Umlaufszeiten sind also für alle Bahnen constant, da v_1 constant ist.

Experimentaluntersuchungen über magnetische Coercitivkraft.

Sechste Abhandlung.

Von

L. Külp.

Die Magnetisirungscurve und die Grössenverhältnisse des nach der negativen Seite inducirten Magnetismus.

35. Im Anschluss an meine früheren Abhandlungen (Bd. 23 S. 562 und Bd. 24 S. 1) gehe ich zur Aufhellung des nach der negativen Seite inducirten Magnetismus über. Ich habe zunächst daran zu erinnern, dass es sich hier um jenen Magnetismus handelt, der sich bei der Anwendung aufsteigender magnetisirender Kräfte in einem Eisenstabe zeigt, wenn diese magnetisirenden Kräfte nach vorausgegangener positiver Magnetisirung in entgegengesetztem Sinne angewandt werden. (Siehe vierte Abhandlung. Nr. 25.)

In Punkt 27, b) wurde bereits ausgesprochen, dass dieser negative inducirte Magnetismus in einer ähnlichen Curve wachse, wie dies von dem positiven inducirten Magnetismus schon Jahrzehnte allgemein bekannt ist. Die Magnetisirungscurve für den negativen Magnetismus wächst anfangs in einem etwas grösseren Verhältnis als die angewandte magnetisirende Kraft, sie hat dann einen Wendepunkt und erreicht sehr bald ein Maximum. Diese baldige Erreichung des Maximums ist ein charakteristischer Unterschied von dem positiven Magnetismus, und er ist zugleich bestimmend für die Aufstellung einer Gleichung für den negativen Magnetismus. In meiner vorigen Abhandlung, wo ich für den remanenten Magnetismus eine Gleichung aufstellte, war ich in einem ganz analogen Falle. Auch dort bei dem remanenten Magnetismus lag mir ein bald erreichtes Maximum vor, und ich habe in Nr. 31 darauf hingewiesen, dass eine Gleichung, welche einer solchen Magnetisirungscurve genügen soll, über das Maximum hinaus keine Giltigkeit zu haben braucht. Ich verweise hier einfach auf meine damaligen Erörterungen und gehe über, jene Gleichung mitzutheilen, die ich nach längeren Bemühungen über den negativen Magnetismus

auffand. Bezeichnet y diesen negativen Magnetismus, x die jeweilige magnetisirende Kraft, so hat die Gleichung ganz allgemein die Form:

$$y = \psi f(x),$$

welche Function innerhalb der Werthe $x = o$ und jenes Werthes von x, wo y sein Maximum erreicht, stetig verlaufen muss, über diesen letztgenannten Werth hinaus aber — wie oben erwähnt — keine Anwendung mehr zu finden braucht. Ich habe für die Gleichung

$$y = \psi f(x)$$

wiederum zuerst algebraische Ausdrücke versucht, musste aber schliesslich, ebenso wie bei dem remanenten Magnetismus, bei Kreisfunctionen stehen bleiben.

36. Die von mir für den negativen Magnetismus aufgefundene Gleichung hat die Form:

$$y = c\,(1 - \cos\gamma),$$

wo c eine Constante ist und γ aus den weiteren Gleichungen hervorgeht:

$$\operatorname{tg}\gamma = c_1 z$$

und

$$z = \frac{x}{x_\varrho - x},$$

x sind die jeweiligen magnetisirenden Kräfte, x_ϱ ist jene magnetisirende Kraft, bei welcher y zuerst sein Maximum erreicht, und c_1 ist eine weitere Constante.

Um die Function auf eine Versuchsreihe anzuwenden, sind die beiden Constanten c und c_1 zu berechnen. c ist weiter nichts als das Maximum des negativen Magnetismus, es ist sonach direct aus der Versuchsreihe zu entnehmen. Um aber c_1 zu bestimmen, habe ich eine graphische Methode zu Hilfe genommen. Ich habe nämlich graphisch jenen Punkt der empirischen Curve aufgesucht, wo y die Hälfte des Maximalwerthes ist. Das zugehörige x habe ich gleichfalls graphisch ermittelt. In diesem Falle war dann

$$\gamma = 60^0$$

und

$$c_1 = \frac{\operatorname{tg} 60}{z},$$

wo z aus dem graphisch bestimmten Werth von x nach der obigen Gleichung hervorgeht.

37. Nach den in 36 gegebenen Gleichungen habe ich meine Versuchsreihen behandelt, und ich gebe im folgenden eine Reihe von Tabellen, in welchen ich die beobachteten und die berechneten Werthe

nebeneinanderstelle. In der ersten Verticalspalte jeder Tabelle sind die magnetisirenden Kräfte x in Tangentenwerthen der an der Tangentenbussole beobachteten Ablenkungswinkel aufgeführt. Die y sind mit Hilfe der an der Spiegelbussole beobachteten Scalenausschläge ausgedrückt.

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,052	9,8	11,5
0,128	33	30
0,208	47	45
0,368	59	56
0,461	63	62
0,561	65	66
0,674	67,5	67,5

Eisendraht.

Länge = 90 mm und Dicke = 1,5 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,065	10	14
0,128	31	32
0,203	53	56
0,324	78	78
0,393	87	90
0,482	94,4	99
0,560	100,4	103
0,661	105,2	106
0,739	108	108

Eisendraht.

Länge = 160 mm und Dicke = 1 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,043	16,5	19
0,113	60,3	60
0,203	92	97
0,305	108,1	113
0,368	113,6	118
0,450	117,4	122
0,560	123	123

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,045	4,6	5
0,118	22	21,5
0,172	34	38
0,258	47	50
0,359	56	59
0,472	61	64
0,577	64	66
0,802	68	68
0,809	69	69

Eisendraht.

Länge = 100 mm und Dicke = 1 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,043	14,48	15
0,096	22,8	22
0,167	26,59	26
0,244	28,43	28
0,315	29	29

Eisendraht.

Länge = 50 mm und Dicke = 1,5 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,052	3	5
0,109	9,2	12
0,167	15	17
0,253	20,7	22
0,315	23	25
0,388	24,96	26,5
0,466	26,47	28
0,612	28	29
0,739	28,69	29,5
0,788	30	30

Eisendraht.

Länge = 90 mm und Dicke = 1,5 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,052	11,4	16
0,105	27,3	31
0,167	38,3	40
0,253	45,98	46,50
0,310	48,7	48
0,383	51,2	50
0,466	52,4	51
0,600	55	55

Eisendraht.

Länge = 130 mm und Dicke = 1 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,065	22	26
0,127	47	46
0,176	60	67
0,296	77	81
0,340	81,58	85
0,434	86,8	89
0,531	89,3	92,5
0,674	93,5	94
0,760	95	95

Stahldraht.

Länge = 90 mm und Dicke = 1,5 mm.

x	y berechnet	y beobachtet
0,131	4,9	5
0,203	11,9	10
0,267	21	17
0,296	22,8	21
0,414	37,96	38
0,537	52,06	51,5
0,637	59,54	61
0,760	67,2	67
0,831	71,59	73
1,000	78	78

Wie man ersieht, gebe ich hier nicht nur die an acht Eisenstäben erhaltenen Resultate, sondern ich füge vielmehr noch in der letzten Tabelle die Resultate an einem Stahldraht hinzu, welcher die folgenden Betrachtungen noch mehr verallgemeinert.

38. Zur Betrachtung der eben mitgetheilten neun Tabellen mache ich auf folgende Punkte aufmerksam:

α) Die Gleichung $y = c\,(1 - \cos\gamma)$ entspricht in einer — wie mir scheint — vollkommen befriedigenden Weise den beobachteten Werthen. Ich habe — wie oben erwähnt — zahlreiche andere Gleichungen versucht, bin aber mit keiner anderen zu einer solchen Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe gelangt, namentlich wenn man in Rücksicht zieht, dass bei diesen abwechselnden Magnetisirungen die beobachteten Werthe immerhin eine gewisse, wenn auch geringe Unsicherheit, besonders im Anfange der Magnetisirung aufweisen und daher an eine vollständige Congruenz der beobachteten und berechneten Curven gar nicht zu denken ist. Dass die Gleichung

$$y = c\,(1 - \cos\gamma)$$

auch für den Stahldraht zutrifft, beweist nur ihre allgemeinere Giltigkeit. Dass diese Gleichung an die Geschwindigkeitsgleichung in der Pendellehre erinnert, ist wohl merklich, doch halte ich es nicht für rathsam, diese Thatsache zum Ausgangspunkte bedenklicher Speculationen über das Wesen des Magnetismus zu nehmen. Die von mir aufgestellte Formel ist merkwürdig in ihrer Einfachheit, sie trägt aber nur einen empirischen Charakter.

β) Die magnetisirenden Kräfte x_ϱ sind, wie ein Blick auf die Tabellen lehrt, trotz der verschiedenen Dimensionen der Stäbe doch nicht sehr voneinander verschieden. Es würde daraus folgen, dass der negative Magnetismus sein Maximum bei ungefähr derselben magnetisirenden Kraft erreicht. Wenigstens werden die Dimensionen hierbei keinen bedeutenden Einfluss ausüben. Dies könnte vielleicht einen Fingerzeig abgeben, wenn man das Wesen des Magnetismus weiter aufhellen will.

39. Eine Frage, die hier sehr nahe liegt, ist diejenige nach der Abhängigkeit des negativen Magnetismus von den Dimensionen der Stäbe. Diese Abhängigkeit ist nur äusserst schwer aufzuhellen, und ich habe sie auch nur für jene Werthe des negativen Magnetismus versucht, wo der letztere bereits ein Maximum ist. Dieses Maximum ist leichter festzustellen, und man kann noch am ehesten eine einfache Gesetzmässigkeit erwarten. Im folgenden gebe ich zwei Tabellen, von denen die eine Stäbe von gleicher Länge aber verschiedener Dicke, die andere aber Stäbe von gleicher Dicke und verschiedener Länge enthält. In besonderen Verticalspalten habe ich die

Quotienten angegeben, welche entstehen, wenn man die beobachteten negativen Maxima an inducirtem Magnetismus durch die variirten Dimensionen oder durch deren Quadrate dividirte. Aus diesen Quotienten kann man ersehen, wie die erwähnten negativen Magnetismen im Verhältnisse der Dimensionen zunimmt.

Tabelle.

Die Stäbe haben gleiche Länge und verschiedene Dicke.

Länge l der Stäbe in Millimeter	Durchmesser d der Stäbe in Millimeter	Maximalwerthe der magnetischen Momente J_-	Quotient $\frac{J_-}{d}$	Quotient $\frac{J_-}{d^2}$
120	1	384	384	384
„	1,5	1076	717	478
„	2	1515	757	378
„	2,5	2059	823	329
„	3	2780	926	308

Tabelle.

Die Stäbe haben gleiche Dicke und verschiedene Länge.

Durchmesser d der Stäbe in Millimeter	Länge l der Stäbe in Millimeter	Maximalwerthe der magnetischen Momente J_-	Quotient $\frac{J_-}{l}$	Quotient $\frac{J_-}{l^2}$
1,5	80	560	7	0,08
„	100	755	7,5	0,07
„	120	1153	9	0,08
„	140	1433	10	0,07
„	160	1510	9	0,05

Aus den Quotienten dieser Tabellen geht hervor:

α) Die negativen Maxima stehen bei gleicher Länge der Stäbe in einem grösseren Verhältnisse als demjenigen der Dicke, doch ist dieses Verhältnis wechselnd und auch nicht quadratisch.

β) Die negativen Maxima stehen bei gleicher Dicke in einem grösseren Verhältnis als demjenigen der Länge, doch ist auch dieses Verhältnis kein quadratisches.

40. Aus den eben gezogenen Schlüssen und mitgetheilten Tabellen erhält man, dass die Maxima des negativen Magnetismus und demnach dieser ganze negative Magnetismus überhaupt in keinem einfachen Verhältnisse zu den Dimensionen steht.

Er nimmt mit der Dicke und Länge der Stäbe zu, aber diese Zunahme ist äusserst complicirt. Um dies evident darzuthun, gebe ich zum Schlusse noch eine ganze Reihe von Eisenstäben in der folgenden Tabelle. In der ersten Verticalspalte dieser Tabelle sind die negativen Maxima der Stäbe nach aufsteigenden Werthen geordnet. In den weiteren Verticalspalten sind die Durchmesser der Stäbe überschrieben und dann die Längen der zugehörigen Stäbe in Millimeter in die Tabelle eingetragen. Man ersieht sofort aus dieser Tabelle, dass die negativen Magnetismen eine äusserst complicirte Function der Dimensionen sind. Dieses ist das einzige Resultat, welches ich über diese Frage erhalten konnte.

Tabelle.

Aufsteigende Maximalwerthe (J)	Dicke = 1 mm	Dicke = 1,5 mm	Dicke = 2 mm	Dicke = 2,5 mm	Dicke = 3 mm	Dicke = 3,5 mm
67,5	100					
69	100					
78	100					
85	120					
95	130					
95	130					
108		90				
111		90				
113	130					
123	160					
124		80				
126	160					
143	160					
148		90				
169		100				
235		120				
252		120				
255			100			
291		140				
331			120			
336		160				
410				120		
527					100	
618					120	
797				150		
912				150		
1584						149
1690						149

Folgerungen aus den Eigenschaften der elektrischen Leitungsfähigkeit von Salzlösungen[1]).

Von

Gustav Jäger.

Herr F. Kohlrausch kommt in seiner Abhandlung „Das elektrische Leitungsvermögen der wässerigen Lösungen von den Hydraten und Salzen der leichten Metalle, sowie von Kupfervitriol, Zinkvitriol und Silbersalpeter“ [2]) zu folgendem Resultat:

„Es liegt ein besonderes Interesse, sobald man nach Beziehungen zwischen den Leitungsvermögen verschiedener Körper sucht, in ihren verdünnten Lösungen. Denn nur in solchen ist das Mittel, in welchem die Bestandtheile wandern, genähert dasselbe. Während in verdünnter Lösung die Bestandtheile, sie mögen selbst aus beliebigen Elektrolyten stammen, wesentlich nur den Wassertheilchen begegnen, so finden dieselben in concentrirterer Lösung ein veränderliches Gemisch von Molekeln des Wassers, des Elektrolytes und der entgegenkommenden Bestandtheile.

Von der bekannten Thatsache ausgehend, dass von dem nicht leitenden Wasser ab durch Zusatz des Elektrolytes ein stetiges Wachsthum des Leitungsvermögens, und zwar in erster Annäherung bei verdünnter Lösung dem Gehalte proportional, stattfindet, berechnen wir das Leitungsvermögen k als Function der Molekülzahl m in dem Ausdruck:

$$k = \lambda m - \lambda' m^2.$$

Der Coefficient λ, die Grenze, welcher sich das Verhältnis des Leitungsvermögens zur Molekülzahl bei grosser Verdünnung nähert, soll das moleculare Leitungsvermögen des Körpers in wässeriger Lösung heissen.“

Auf den Vorschlag des Herrn Dr. J. Moser untersuchte ich die Schwermetallsalze auf ihre elektrische Leitungsfähigkeit. Damit verband ich einerseits die Absicht, die Theorie des Herrn F. Kohl-

1) Mit theilweiser Benutzung der Abhandlungen in den Wiener Sitzungsber. Bd. 96 S. 317, 614 und 1329 (1887).

2) Wied. Ann. Bd. 6 S. 151 u. f. (1879).

rausch zu prüfen, andrerseits hatte ich es hier grossentheils mit Salzen zu thun, deren elektrische Leitungsfähigkeit noch unbekannt war. Die Schwermetallsalze gestatten ausser anderen Vortheilen die Anwendung sog. unpolarisirbarer Elektroden, d. h. Elektroden aus dem der Lösung entsprechenden Metall. Ausserdem wandte ich die Nullmethode an, was durch ein Differentialgalvanometer erreicht wurde. Hierbei war in dem einen Zweigstrom desselben ein constanter Widerstand eingeschaltet, der grösser war als jener der Lösung, während die Lösung selbst und ein variabler Widerstand den anderen Stromzweig bildeten. Es wurde also ein constanter Strom hergestellt, da auch die elektromotorische Kraft constant war. Zur Aufnahme der Lösung diente ein graduirter Glascylinder, dessen Boden durch die eine Elektrode ersetzt wurde, während die andere beweglich im Innern des Cylinders angebracht war. Machte ich nun zwei Messungen bei verschiedener Distanz der Elektroden und bildete die Differenz der Widerstände, so erhielt ich sofort den wahren Werth des Widerstandes jenes Stückes der Lösung, welches der Verschiebung der Elektroden entsprach, weil ich dadurch die constante Polarisation eliminirte. Sämmtliche untersuchten Lösungen reducirte ich auf einen Cylinder vom Querschnitt 1 qcm und der Höhe 1 cm.

Die Lösung enthielt $^1/_{20}$, $^1/_{40}$ etc. Aequivalente des Elektrolytes in Grammen in einem Liter Wasser. Ich erhielt für die Widerstände, ausgedrückt in Ohms, folgende Tabelle.

Tabelle der Widerstände.

	$^1/_{20}$ Aequivalent	$^1/_{40}$ Aequivalent	$^1/_{80}$ Aequivalent	$^1/_{160}$ Aequivalent	$^1/_{320}$ Aequivalent	$^1/_{640}$ Aequivalent	$^1/_{1280}$ Aequivalent
$Pb(NO_3)_2$	251	478	898	1700	—	—	—
$Pb(C_2H_3O_2)_2$	—	—	1650	2700	4510	7790	13900
$AgNO_3$	—	—	354	677	1310	2435	—
Ag_2SO_4	—	—	—	853	1610	2990	5640
$AgC_2H_3O_2$	—	—	—	916	1750	3290	6200
$ZnSO_4$	344	591	1030	1790	3120	—	—
$ZnBr_2$	—	243	480	950	2000	4160	8690
ZnJ_2	—	388	761	1450	2770	—	—
$CuSO_4$	364	628	1080	1880	3310	6100	10800
$Cu(C_2H_3O_2)_2$	636	1020	1650	2800	—	—	—

Sämmtliche Widerstände wurden bei einer Temperatur von nahe 22° C. gemessen.

Bilde ich nun die reciproken Werthe der Widerstände, so erhalte ich folgende Tabelle der Leitungsfähigkeiten, wobei die angegebenen Zahlen mit 10^{-6} zu multipliciren sind.

Tabelle der Leitungsfähigkeiten.

	1/20 Aequivalent	1/40 Aequivalent	1/80 Aequivalent	1/160 Aequivalent	1/320 Aequivalent	1/640 Aequivalent	1/1280 Aequivalent
$Pb(NO_3)_2$	3980	2090	1110	588	—	—	—
$Pb(C_2H_3O_2)_2$	—	—	608	370	222	128	72
$AgNO_3$	—	—	2830	1480	763	411	—
Ag_2SO_4	—	—	—	1170	622	334	177
$AgC_2H_3O_2$	—	—	—	1090	571	304	161
$ZnSO_4$	2910	1690	976	559	321	—	—
$ZnBr_2$	—	4120	2080	1050	501	241	115
ZnJ_2	—	2580	1310	691	361	—	—
$CuSO_4$	2750	1590	923	532	302	164	92
$Cu(C_2H_3O_2)_2$	1570	981	606	358	—	—	—

Es ist nun schwer, direct aus den absoluten Grössen der Leitungsfähigkeiten die Beziehungen zwischen Salzgehalt und Leitungsfähigkeit herauszulesen. Ich berechnete daher die jeweilige äquivalente Leitungsfähigkeit, indem ich die absolute Leitungsfähigkeit durch die entsprechende Lösungszahl dividirte. Die dadurch erhaltenen Zahlen multiplicirt mit 10^{-3} zeigt folgende

Tabelle der äquivalenten Leitungsfähigkeiten.

	1/20 Aequivalent	1/40 Aequivalent	1/80 Aequivalent	1/160 Aequivalent	1/320 Aequivalent	1/640 Aequivalent	1/1280 Aequivalent
$Pb(NO_3)_2$	80	84	89	94	—	—	—
$Pb(C_2H_3O_2)_2$	—	—	49	59	71	82	92
$AgNO_3$	—	—	226	236	244	263	—
Ag_2SO_4	—	—	—	188	199	214	227
$AgC_2H_3O_2$	—	—	—	175	183	195	206
$ZnSO_4$	58	68	78	89	103	—	—
$ZnBr_2$	—	165	167	168	160	154	147
ZnJ_2	—	103	105	111	116	—	—
$CuSO_4$	55	64	74	85	97	105	118
$Cu(C_2H_3O_2)_2$	31	39	48	57	—	—	—

In sämmtlichen Tabellen wurden immer nur die drei ersten Stellen der Zahlen berücksichtigt, indem derartige Messungen eine grössere Genauigkeit nicht ermöglichen.

Ich versuchte es nun, die Leitungsfähigkeit k durch eine Formel von der Art

$$k = \lambda m - \lambda' m^2$$

darzustellen, wobei m die Aequivalente bezeichnet. Es zeigte sich jedoch, dass eine derartige Formel selbst bei stark verdünnten Lösungen den Gang der Leitungsfähigkeit nicht genügend charakterisiren kann. Ich erhielt nämlich für λ bezüglich λ' zwar annähernd, aber nicht hinlänglich übereinstimmende Werthe, wenn ich aus den Leitungsfähigkeiten verschiedener Lösungen desselben Salzes diese beiden Grössen berechnete. Daraus folgt nun, dass die aus einer derartigen Formel berechnete moleculare Leitungsfähigkeit λ nur ein angenäherter Werth sein kann. Nichtsdestoweniger zeigt aber der Verlauf der äquivalenten Leitungsfähigkeiten, die in ihren Grenzwerthen ja die molecularen Leitungsfähigkeiten darstellen, dass einem jeden Salz eine bestimmte moleculare Leitungsfähigkeit zukommt.

Herr F. Kohlrausch sagt nun in oben erwähnter Abhandlung S. 170 weiter: Stellen wir uns von einem Elektrolyt eine verdünnte Lösung von cylindrischer Gestalt vor, welche die Einheit des Querschnittes und der Länge besitzt. In dieser Volumeinheit sollen m „elektrochemische Molekülе" des Elektrolyts gelöst sein. Nach der Richtung der Cylinderachse wirke die elektromotorische Kraft Eins. Durch diese Kraft mögen die Jonen fortgeschoben werden: das Kation mit der Geschwindigkeit U, das Anion mit der Geschwindigkeit V in entgegengesetzter Richtung. Es sei ε die Menge positiver oder negativer Elektricität, welche mit jeder Theilmolekel sich fortschiebt. Der Strom, welcher in diesem Falle erzeugt wird, heisst das Leitungsvermögen des betreffenden Stoffes und wird mit k_1 bezeichnet. Dieser Strom ist gleich $\varepsilon(U+V)m$, oder, wenn $\varepsilon U = u$, $\varepsilon V = v$ gesetzt wird:

$$k_1 = (u+v)m.$$

$$u+v = \lambda$$

ist dann das specifische moleculare Leitungsvermögen.

$$\frac{v}{u+v} = n$$

ist die Hittorf'sche Wanderungszahl des Anions. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$u = (1-n)\lambda, \quad v = n\lambda.$$

Aus bekanntem λ und n hat Herr F. Kohlrausch die relative Geschwindigkeit der Jonen berechnet.

Die Erscheinungen der Elektrolyse sind verschieden erklärt worden, doch müssen wir immer annehmen, dass die Jonen in entgegengesetzter Richtung durch die Lösung wandern, und dass die elektrische Leitungsfähigkeit proportional der Summe der Geschwindigkeiten der Jonen ist, wenn die elektromotorische Kraft constant bleibt. Die Kraft, mit welcher eine Molekel des Jons fortgeschoben wird, sei K. Die Kraft, welche nothwendig ist, um eine Molekel des Lösungsmittels mit der Geschwindigkeit Eins vorwärts zu bewegen, sei K_1. Dann ist die Kraft, welche nothwendig ist, um eine Molekel des Lösungsmittels mit der Geschwindigkeit v fortzubewegen, gleich $K_1 v$, indem wir den Widerstand, den die Molekel auf ihrer Wanderung durch das Lösungsmittel erleidet, proportional ihrer Geschwindigkeit setzen. Der Einfachheit halber wollen wir die Molekeln vorläufig als Kugeln betrachten; ferner sei unsere Lösung so verdünnt, dass die Molekeln des gelösten Körpers auf einander keinen Einfluss ausüben können, so dass wir nur jene Kräfte in Betracht zu ziehen haben, welche die Molekeln des Lösungsmittels auf die wandernden Molekeln der Jonen ausüben.

Es bewege sich eine Molekel vom Radius r in der Richtung ox. Das sie umgebende Medium bestehe aus Molekeln vom Radius ϱ, und die Zahl derselben in der Volumeinheit sei a. Fassen wir nun eine Molekel ins Auge, die in unmittelbarer Berührung mit der wandernden Molekel steht, so wird dieselbe letzterer auszuweichen suchen und zwar auf dem kürzesten Wege, der ihr zur Verfügung steht. Dieser Weg ist die Verbindungsgerade der beiden Mittelpunkte der Molekeln. Ist der Winkel, den dieselbe mit ox einschliesst, gleich φ, die Geschwindigkeit der wandernden Molekel v, so wird der Molekel des Lösungsmittels die Geschwindigkeit $v \cos \varphi$ ertheilt, wobei sie einen Widerstand gleich $K_1 v \cos \varphi$ darbietet. Setzen wir

$$r + \varrho = R,$$

so bleibt das Resultat der Rechnung dasselbe, wenn wir annehmen, die wandernde Molekel habe den Radius R, während die übrigen unendlich klein werden, natürlich so, dass die Anzahl der Molekeln in der Volumeinheit und die Grösse der Molecularkräfte dieselbe bleibt. Da wir annahmen, dass in der Volumeinheit a Molekeln enthalten sind, so gehen auf die Flächeneinheit $\sqrt[3]{a^2}$. Die Anzahl der Molekeln, welche die wandernde Molekel constant vor sich herzuschieben hat, ist daher gleich

$$2\pi R^2 \sqrt[3]{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi,$$

und der Widerstand, den sie dabei zu überwinden hat, ist gleich

$$2\pi R^2 \sqrt[3]{a^2} K_1 v \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 2\pi R^2 \sqrt[3]{a^2} K_1 v \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \pi R^2 \sqrt[3]{a^2} K_1 v.$$

Es muss also die Kraft, welche der Molekel die Geschwindigkeit v ertheilen soll, gleich sein

$$K = \pi R^2 \sqrt[3]{a^2} K_1 v.$$

Daraus folgt

$$v = \frac{K}{\pi R^2 \sqrt[3]{a^2} K_1}.$$

Da wir nur sehr verdünnte Lösungen in Betracht ziehen, so können wir a für dasselbe Lösungsmittel als constant annehmen, desgleichen K_1. K bleibt ebenfalls constant, wenn die elektromotorische Kraft constant ist. Fassen wir daher unter C sämmtliche Constanten zusammen, so erhalten wir

$$v = \frac{C}{R^2} = \frac{C}{(r+\varrho)^2}. \qquad (1$$

Es wurde bereits erwähnt, dass sich das moleculare Leitungsvermögen durch die Formel

$$\lambda = u + v$$

darstellen lässt. Setzen wir für u und v die entsprechenden Werthe aus der Gl. 1 ein, so erhalten wir

$$\lambda = u + v = C\left[\frac{1}{(r+\varrho)^2} + \frac{1}{(r'+\varrho)^2}\right], \qquad (2$$

wenn wir mit r und r' die Radien der Molekeln der entsprechenden Jonen bezeichnen. Für ein zweites Salz werden wir dann finden

$$\lambda_1 = u_1 + v_1 = C\left[\frac{1}{(r_1+\varrho)^2} + \frac{1}{(r_1'+\varrho)^2}\right]. \qquad (3$$

Dividiren wir die Gl. 2 durch die Gl. 3, so ergibt sich

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{u+v}{u_1+v_1} = \frac{\frac{1}{(r+\varrho)^2} + \frac{1}{(r'+\varrho)^2}}{\frac{1}{(r_1+\varrho)^2} + \frac{1}{(r_1'+\varrho)^2}}, \qquad (4$$

oder wenn wir, wie man es gewöhnlich thut, die Radien r, r', r_1, r_1', ϱ durch die entsprechenden Durchmesser d, d', d_1, d_1', δ ersetzen,

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\frac{1}{(d+\delta)^2} + \frac{1}{(d'+\delta)^2}}{\frac{1}{(d_1+\delta)^2} + \frac{1}{(d_1'+\delta)^2}}. \qquad (5$$

Durch die Gleichungen 4 und 5 sind die relativen Eigenschaften der molecularen Leitungsfähigkeiten von Salzlösungen gekennzeichnet.

Fassen wir zuerst die Gleichung

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{u+v}{u_1+v_1}$$

ins Auge. Wählen wir zwei Salze, die ein gemeinsames Jon besitzen, z. B. das Anion, so ist $v = v_1$. Ersetzen wir nun dieses gemeinsame Jon der Reihe nach durch andere Jonen, so nähert sich der Quotient $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ umsomehr der Grenze Eins, je grösser v wird. Wir können daher sagen:

Ersetzt man in zwei Salzen, die ein gemeinsames Jon besitzen, dieses gemeinsame Jon der Reihe nach durch andere Jonen, so ist das Verhältnis der molecularen Leitungsfähigkeiten der Lösungen je zweier entsprechender Salze umsoweniger von Eins verschieden, je grösser die molecularen Leitungsfähigkeiten dieser Salze sind.

Die Gl. 5 zeigt, dass das Verhältnis der molecularen Leitungsfähigkeiten der Lösungen zweier bestimmter Salze sich nur mit der Grösse des Moleculardurchmessers δ des Lösungsmittels ändern kann. Bei demselben Lösungsmittel ist eine solche Aenderung nur infolge der Temperaturänderung möglich, indem ja im allgemeinen die Grösse der Wirkungssphäre der Molekel mit der Temperatur wächst; und zwar ist diese Grössenveränderung durch den Ausdehnungscoefficienten des Lösungsmittels bestimmt. Insofern wir nun nur geringe Temperaturunterschiede in Betracht ziehen, und der Ausdehnungscoefficient der dabei vorkommenden Flüssigkeiten sehr klein ist, können wir die Volumsveränderungen der letzteren vernachlässigen. Dann können wir δ als constant betrachten und erhalten das Resultat:

Das Verhältnis der molecularen Leitungsfähigkeiten zweier Salzlösungen ist von der Temperatur unabhängig.

Wenn wir δ dadurch variiren lassen, dass wir der Reihe nach verschiedene Lösungsmittel anwenden, so nähert sich der Quotient $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ umsomehr dem Grenzwerthe Eins, je grösser δ wird. Diese relative

Eigenschaft der molecularen Leitungsfähigkeiten können wir folgendermaassen aussprechen:

Das Verhältnis der molecularen Leitungsfähigkeiten zweier Salzlösungen nähert sich mit wachsender Molekel des Lösungsmittels der Grenze Eins, oder

Mit wachsender Molekel des Lösungsmittels nähern sich alle molecularen Leitungsfähigkeiten der Grenze Null.

Es handelt sich nun darum, nachzuweisen, inwiefern diese theoretisch abgeleiteten Sätze mit dem Experimente übereinstimmen. Zur Prüfung des ersten Satzes brachte ich die meisten der von Herrn F. Kohlrausch[1]) gefundenen molecularen Leitungsfähigkeiten in folgende Tabelle derart, dass ich die Anionen nach ihrer Leitungsfähigkeit in eine Horizontalreihe und ebenso die Kationen in eine Verticalreihe anordnete.

Tabelle der molecularen Leitungsfähigkeiten.

$10^7 \lambda$	$C_2H_3O_2$	$\frac{1}{2}CO_3$	$\frac{1}{2}SO_4$	NO_3	Cl	Br	J
$\frac{1}{2}$ Zn	—	—	—	—	68	69	70
Li	—	—	—	—	70	—	76
$\frac{1}{2}Na_2$	—	55	63	—	—	—	—
$\frac{1}{2}$ Mg	—	—	—	68	72	—	—
$\frac{1}{2}$ Ca	—	—	—	71	75	73	73
$\frac{1}{2}$ Ba	—	—	—	69	79	88	88
Na	55	—	—	76	81	81	84
$\frac{1}{2}K_2$	—	78	79	—	—	—	—
NH_4	—	—	—	93	95	103	102
K	70	—	—	92	97	104	103
H	—	—	—	334	323	311	328

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, dass das Gesetz in den meisten Fällen zutrifft, besonders wenn man Salze wählt, deren Leitungsfähigkeiten voneinander sehr verschieden sind. Greifen wir z. B. die vier Salze, essigsaures Kalium und essigsaures Natrium, sowie Chlorkalium und Chlornatrium heraus, so haben wir folgende molecularen Leitungsfähigkeiten:

$$K\,Cl = 97,\ Na\,Cl = 81,\ K\,\bar{A} = 70,\ Na\,\bar{A} = 55.$$

1) Wied. Ann. Bd. 6 S. 153—157 (1879).

Bilden wir nun die Quotienten der molecularen Leitungsfähigkeiten jener Salze mit gemeinsamem Anion, so erhalten wir

$$\frac{K\,Cl}{Na\,Cl} = \frac{97}{81} = 1{,}20, \quad \frac{K\,\bar{A}}{Na\,\bar{A}} = \frac{70}{55} = 1{,}27.$$

Vergleichen wir jene Salze, deren Kation gemeinsam, so ergibt sich

$$\frac{K\,Cl}{K\,\bar{A}} = \frac{97}{70} = 1{,}39, \quad \frac{Na\,Cl}{Na\,\bar{A}} = \frac{81}{55} = 1{,}47.$$

In beiden Fällen zeigt sich, dass der Quotient der grösseren Leitungsfähigkeiten von Eins weniger verschieden ist als jener der kleineren. Die Ausnahmen, die hier vorkommen, haben wohl nicht ihren Grund in der Unrichtigkeit des Gesetzes, sondern in der Art und Weise der Bestimmung der molecularen Leitungsfähigkeiten, wonach die Werthe derselben nur angenähert richtig sein können.

Zur Beurtheilung der Richtigkeit des Satzes, dass die molecularen Leitungsfähigkeiten zweier Salzlösungen in einem constanten, von der Temperatur unabhängigen Verhältnisse stehen, erlaube ich mir folgende Stellen aus der schon erwähnten Abhandlung des Herrn F. Kohlrausch anzuführen:

„Es liegen die Temperaturcoefficienten sehr verdünnter Lösungen (von Chlormetallen) zwischen den engen Grenzen 0,0211 und 0,0233 oder $^1/_{47}$ und $^1/_{43}$ eingeschlossen. Bei dem geringen Unterschiede der äussersten Werthe $0{,}0255 - 0{,}0211 = 0{,}0044$ oder $^1/_{230}$ unter allen Salzen, $0{,}0233 - 0{,}0211 = 0{,}0022$ oder $^1/_{460}$ unter den Salzen mit einbasischen Mineralsäuren, dürfen wir also ohne weitere Erörterung sagen, dass die Beziehungen, welche wir für die Leitungsvermögen bei 18° aufgestellt haben, überhaupt bei mittleren Temperaturen gelten. Sucht man nach einer Auslegung der gefundenen Thatsachen, so wird man also dieselbe wohl nur in der Annahme finden, dass die Widerstände der Jonen im Wasser alle durch die Temperatur um nahe gleiche Verhältnisse geändert werden. Es ist dies ein höchst beachtenswerther Satz“ [1]).

Zur Bestätigung der dritten Folgerung, dass sich nämlich das Verhältnis der molecularen Leitungsfähigkeiten zweier Salzlösungen mit wachsender Molekel des Lösungsmittels der Grenze Eins nähert, machte ich eine Reihe von Messungen, welche ich in folgendem mittheilen will.

Nachdem ich mehrere Methoden zur Bestimmung des elektrischen Widerstands von Lösungen untersucht hatte, entschied ich mich für

1) Wied. Ann. Bd. 6 S. 193 u. f. (1879).

die Methode des Herrn F. Kohlrausch, die Wechselströme eines Inductionsapparates und das Telephon zur Messung zu benutzen. Da bekanntlich das Telephon in der Wheatstone'schen Brücke nicht vollständig zum Schweigen kommt, sondern nur ein Tonminimum erreicht werden kann, so nahm ich für den Widerstand der Lösung immer das Mittel zwischen den beiden Grenzwerthen des Tonminimum. Auf diese Weise erhielt ich Werthe, die bei vorsichtigem Messen um nicht mehr als zwei Procent voneinander verschieden waren, so dass die dadurch erhaltenen Resultate höchstens um ein Procent von den wahren Werthen abweichen. Es ist dies auf diesem Gebiete der Messung wohl eine vollständig genügende Genauigkeit.

Als Elektrolyten benutzte ich Chlorkalium und Chlornatrium, als Lösungsmittel Gemische von Wasser mit Alkohol, Glycerin und Zucker. Die Elektrolyten wurden in Mengen von $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ und $^1/_{32}$ Aequivalenten in Grammen im Liter gelöst. Die Lösungsmittel wurden derart hergestellt, dass dem Wasser 20, 40 und 60 Volumprocente Alkohol etc. beigemischt wurden. Folgende Tabellen (S. 426) sind nun so angefertigt, dass die Horizontalreihe die gelösten Mengen des Elektrolyts angibt, während in die Verticalreihe die verschiedenen Lösungsmittel zu stehen kommen. Sämmtliche Leitungsfähigkeiten sind auf diejenige des Quecksilbers gleich Eins bezogen und in der Tabelle mit 10^8 multiplicirt.

Die Leitungsfähigkeit, welche das Lösungsmittel an und für sich besitzt, kann hier vollständig vernachlässigt werden, indem sie weit weniger als ein Procent von der Leitungsfähigkeit auch der verdünntesten hier angewandten Lösungen beträgt, ein Werth, der weit unter dem möglichen Beobachtungsfehler liegt.

Die Tabellen ergeben vorerst, dass der Gang der Leitungsfähigkeit mit der Menge des gelösten Salzes ganz analog demjenigen von wässerigen Lösungen ist, indem mit zunehmender Verdünnung die Leitungsfähigkeit sich einer linearen Function des Salzgehaltes nähert. Es ist uns also auch hier gestattet, auf gleiche Weise wie bei wässerigen Lösungen die moleculare Leitungsfähigkeit aus der Formel

$$k = \lambda m - \lambda' m^3$$

zu berechnen. Ich nenne nun jenen Werth von λ, der aus $m = ^1/_4$ und $m = ^1/_8$ hervorgeht, die moleculare Leitungsfähigkeit von $^1/_4$ Aequivalent u. s. w. In diesem Sinne sind die Tabellen der molecularen Leitungsfähigkeiten (S. 426) angefertigt.

Leitungsfähigkeiten des Chlorkalium.

$10^8 k$				$^1/_4$ Aequivalent	$^1/_8$ Aequivalent	$^1/_{16}$ Aequivalent	$^1/_{32}$ Aequivalent
100%	Wasser			251	131	69,4	34,7
80	„	20%	Alkohol	134	70,2	36,4	18,3
60	„	40	„	82	44	23,9	13,4
40	„	60	„	57,8	31	16,9	9,52
80	„	20%	Glycerin	140	71,1	38,6	20,4
60	„	40	„	76,6	38,8	20,6	11,3
40	„	60	„	32	16,9	9,29	—
80	„	20%	Zucker	111	60,8	31,7	17,6
60	„	40	„	30,3	17	9,9	6,08

Leitungsfähigkeiten des Chlornatrium.

$10^8 k$				$^1/_4$ Aequivalent	$^1/_8$ Aequivalent	$^1/_{16}$ Aequivalent	$^1/_{32}$ Aequivalent
100%	Wasser			197	102	53,2	28,1
80	„	20%	Alkohol	107	56,2	30	15,8
60	„	40	„	71,1	38,3	20,5	10,9
40	„	60	„	51,7	28,2	15,5	8,56
80	„	20%	Glycerin	109	61,5	33	18,2
60	„	40	„	59	31	17,3	9,7
40	„	60	„	25,5	13,9	7,6	—
80	„	20%	Zucker	82	46,1	25,4	14,6
60	„	40	„	24,2	14,7	8,2	—

Moleculare Leitungsfähigkeiten des Chlorkalium.

$10^8 \lambda$				$^1/_4$ Aequivalent	$^1/_8$ Aequivalent	$^1/_{16}$ Aequivalent
100%	Wasser			1092	1171	1110
80	„	20%	Alkohol	587	603	589
60	„	40	„	376	413	475
40	„	60	„	265	293	339
80	„	20%	Glycerin	578	666	688
60	„	40	„	314	349	394
40	„	60	„	142	162	—
80	„	20%	Zucker	529	528	619
60	„	40	„	151	181	213

Moleculare Leitungsfähigkeiten des Chlornatrium.

$10^8 \lambda$				$^1/_4$ Aequivalent	$^1/_8$ Aequivalent	$^1/_{16}$ Aequivalent
100%	Wasser			844	886	947
80	„	20%	Alkohol	471	510	531
60	„	40	„	328	350	370
40	„	60	„	244	270	300
80	„	20%	Glycerin	548	564	637
60	„	40	„	260	307	344
40	„	60	„	120	132	—
80	„	20%	Zucker	410	444	528
60	„	40	„	138	145	—

Ich bildete nun die Quotienten der Leitungsfähigkeiten, indem ich immer die moleculare Leitungsfähigkeit des Chlorkalium durch die entsprechende des Chlornatrium dividirte und die Quotienten dann in folgende Tabelle brachte.

Quotienten der molecularen Leitungsfähigkeiten des Chlorkalium und des Chlornatrium.

$\frac{\lambda}{\lambda_1}$				$^1/_4$ Aequivalent	$^1/_8$ Aequivalent	$^1/_{16}$ Aequivalent
100%	Wasser			1,294	1,322	1,172
80	„	20%	Alkohol	1,246	1,182	1,109
60	„	40	„	1,146	1,18	1,284
40	„	60	„	1,086	1,085	1,13
80	„	20%	Glycerin	1,055	1,181	1,08
60	„	40	„	1,208	1,137	1,145
40	„	60	„	1,183	1,227	—
80	„	20%	Zucker	1,29	1,189	1,172
60	„	40	„	1,094	1,248	—

Die chemische Zusammensetzung des Alkohols, Glycerins und Zuckers lässt erwarten, dass die Molekel dieser Substanzen grösser sei als die des Wassers. In der That sind auch die Quotienten der molecularen Leitungsfähigkeiten im Wasser mehr von Eins verschieden als diejenigen, welche die Gemische von Wasser mit obigen Substanzen ergeben. Desgleichen zeigt sich auch, dass im grossen ganzen die Quotienten der molecularen Leitungsfähigkeiten mit dem Procentsatz der dem Wasser beigemischten Substanzen sich der Einheit nähern,

Es wird also der theoretisch abgeleitete Satz durch das Experiment bestätigt. Die vorkommenden Ausnahmen finden theils in der, wie schon früher erwähnt, nur angenähert richtigen molecularen Leitungsfähigkeit, theils darin ihren Grund, dass obige Sätze für sehr leicht bewegliche Flüssigkeiten abgeleitet wurden, während die Glycerin- und Zuckerlösungen ziemlich zähe sind.

Ich erlaube mir nun, wieder auf die Gl. 1 (S. 421)

$$v = \frac{C}{(r+\varrho)^2}$$

zurückzukommen. Für ein zweites Jon werden wir erhalten

$$v' = \frac{C}{(r'+\varrho)^2}.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{v}{v'} = \frac{(r'+\varrho)^2}{(r+\varrho)^2} = \frac{(d'+\delta)^2}{(d+\delta)^2}.$$

Der Quotient $\frac{v}{v'}$ bleibt derselbe, ob wir die absoluten oder die relativen Geschwindigkeiten der Jonen nehmen.

Aus der letzten Formel lässt sich d darstellen. Es ist nämlich

$$d = (d'+\delta)\sqrt{\frac{v'}{v}} - \delta.$$

Gesetzt nun, wir wüssten für ein Jon die Grössen d', δ, v' und von einem zweiten die Grösse v, so könnten wir daraus auf leichte Weise die Grösse des Moleculardurchmessers des letzteren berechnen.

Folgende Tabelle enthält die von Herrn F. Kohlrausch berechneten relativen Geschwindigkeiten der Jonen [1]).

H,	½ H_2,	J,	Br,	CN,	Cl,	K,	NH_4,
278	166	53	53	50	49	48	47
NO_3,	ClO_3,	½ K_2	½ SO_4,	Ag,	½ $(NH_4)_2$,	½ CO_3,	½ Ag_2,
46	40	40	40	40	37	36	32
Na,	F,	½ Ba,	½ Cu,	½ Sr,	½ Ca,	½ Mg,	$C_2H_3O_2$,
31	30	29	29	28	26	23	23
½ Na_2,	½ SO_4*,	Li,	½ Zn,	½ Mg*,	½ Zn*,	½ Cu*,	½ Li_2.
22	22	21	20	14	12	12	11

Die mit * bezeichneten Werthe ergaben sich aus den Sulfaten von Mg, Zn und Cu.

Für die Durchmesser der Molekeln haben wir schon mehrfache Bestimmungen. Die früher angeführten relativen Geschwindigkeiten

1) Wied. Ann. Bd. 6 S. 183 (1879).

beziehen sich auf Wasser als Lösungsmittel. Wir müssen daher für δ den Durchmesser der Wassermolekel setzen. Herr O. E. Meyer[1]) gibt für die Grösse des Durchmessers einer Wassermolekel den nach Herrn Prof. Loschmidt's Methode aus dem Condensationscoefficienten berechneten Werth $44 \cdot 10^{-9}$ cm an. Leider sind nur noch zwei Gase vorhanden, deren relative Geschwindigkeiten wir kennen, und deren Moleculardurchmesser auf gleiche Weise wie der des Wassers bestimmt wurde. Dieselben sind Cyan mit dem Durchmesser $96 \cdot 10^{-9}$ cm und der Geschwindigkeit 50, ferner Chlor mit dem Durchmesser $96 \cdot 10^{-9}$ cm und der Geschwindigkeit 49.

Nehmen wir die Werthe für Wasser und Chlor als jene gegebenen Grössen an, aus welchen wir alle andern berechnen wollen, so ist

$$d' = 96, \quad \delta = 44, \quad v' = 49.$$

Setzen wir diese Grössen in unsere Formel ein, so erhalten wir für den Durchmesser einer beliebigen Molekel

$$d = \sqrt{\frac{960400}{v}} - 44$$

ausgedrückt in 10^{-9} cm. Berechnen wir nach dieser Formel den Moleculardurchmesser der uns zu Gebote stehenden Substanzen, so erhalten wir folgende Tabelle, in der die Moleculardurchmesser vom kleinsten aufsteigend der Reihe nach angeordnet sind.

H,	$\frac{1}{2}H_2$,	J,	Br,	CN,	Cl,	K,	NH_4,
15	32	91	91	95	96	97	99
NO_3,	ClO_3	$\frac{1}{2}K_2$,	$\frac{1}{2}SO_4$,	Ag,	$\frac{1}{2}(NH_4)_2$,	$\frac{1}{2}CO_3$,	$\frac{1}{2}Ag_2$,
100	111	111	111	111	117	119	129
Na,	F,	$\frac{1}{2}$ Ba,	$\frac{1}{2}$ Cu,	$\frac{1}{2}$ Sr,	$\frac{1}{2}$ Ca,	$\frac{1}{2}$ Mg,	$C_2H_3O_2$,
132	135	138	138	141	148	160	160
$\frac{1}{2}Na_2$,	$\frac{1}{2}SO_4$*,	Li,	$\frac{1}{2}$ Zn,	$\frac{1}{2}$ Mg*,	$\frac{1}{2}$ Zn*,	$\frac{1}{2}$ Cu*,	$\frac{1}{2}Li_2$,
165	165	170	175	218	239	239	251.

Die letzte Stelle der Zahlen für die relative Geschwindigkeit sowie für den molecularen Durchmesser ist immer corrigirt. So ist z. B. der Durchmesser der Jodmolekel etwas kleiner, der der Brommolekel etwas grösser als $91 \cdot 10^{-9}$ cm.

Vergleicht man obige Werthe mit jenen, welche durch andere Methoden gefunden wurden, so erhält man eine vollkommen befriedigende Uebereinstimmung. So erhielt ich für Cyan 95, während man auf einem andern Weg, wie schon früher angegeben, 96 fand. Ferner berechnete Herr v. d. Waals[2]) aus der Veränderlichkeit des Aus-

1) Theorie der Gase, S. 226.

2) O. E. Meyer, Theorie der Gase, S. 231.

dehnungs-Coefficienten für Wasserstoff den Molecular-Durchmesser $14 \cdot 10^{-9}$ cm, während meine Rechnung den Werth $14{,}7 \cdot 10^{-9}$ cm ergab.

Aus obiger Tabelle würde folgen, dass die Grössen der Molekeln voneinander ziemlich verschieden sind. Am deutlichsten zeigt sich dies, wenn wir die kleinste Molekel, nämlich die einfache Wasserstoffmolekel, und die grösste, die Doppelmolekel des Lithium, vergleichen. Letztere ist in ihrer linearen Ausdehnung ungefähr sechzehnmal grösser als erstere. Dass die Doppelmolekel nicht die Kugelform haben kann, geht aus einem Vergleich zwischen den Werthen der einfachen und der Doppelmolekel irgend einer Substanz hervor. Denn die Radien zweier Kugeln, deren Volumina sich wie 2 : 1 verhalten, müssten dann das Verhältnis $\sqrt[3]{2} : 1$ geben, was bei den gefundenen Werthen durchaus nicht zutrifft. Am widersinnigsten scheint auf den ersten Blick der Umstand zu sein, dass der Durchmesser der Doppelmolekel des Wasserstoffes mehr als das Doppelte von dem der einfachen Molekel sein soll. Doch es ist dieses Ergebnis nur eine natürliche Folge der Gestalt der Doppelmolekel. Da wir früher annahmen, die einfache Molekel sei eine Kugel, so muss auf jeden Fall die Doppelmolekel, da sie aus zwei aneinandergereihten Kugeln besteht, ein in die Länge gestreckter Körper sein, der möglicherweise sogar eine Einschnürung in seiner Mitte hat. So oft nun die wandernde Doppelmolekel mit der Längsaxe senkrecht auf ihrer Bahn steht, muss sie vielmehr Wassermolekeln vor sich herschieben, da dieselben in diesem Falle nicht so leicht ausweichen können. Ist die Wassermolekel grösser als die wandernde Doppelmolekel, so ist es sogar möglich, dass zeitweise eine Geschwindigkeit erreicht wird, welche der Grösse der Wassermolekel, nicht aber der der wandernden Molekel entspricht. Daraus erklärt sich, weshalb der Werth für die Grösse der Doppelmolekel des Wasserstoffes so unerwartet gross herauskam. Wir dürfen daher nur die für die einfache Molekel gefundenen Werthe als maassgebend betrachten.

Ein Vergleich mit dem „natürlichen System der Elemente von Mendelejeff“ kann wegen der geringen Zahl der Elemente, welche unsere Tabelle enthält, nicht viel Stichhaltiges geben. Doch möchte ich mir erlauben, auf folgendes hinzuweisen. Jene Elemente, welche in chemischer Beziehung grosse Aehnlichkeit aufweisen, kommen auch ihrer Grösse nach nebeneinander zu stehen. Wir haben nämlich unmittelbar aufeinanderfolgend Jod, Brom, Chlor, ferner Barium, Strontium und Calcium, denen sich unmittelbar das Magnesium anreiht.

Wenn wir einen Körper im flüssigen oder festen Zustande haben, so können wir annehmen, dass die Molekeln unmittelbar nebeneinander zu liegen kommen, dass mithin die Zahl der Molekeln in der Volum-

einheit verkehrt proportional dem Volumen der Molekel ist. Wenn ich nun die Anzahl der Molekeln in der Volumeinheit mit dem Moleculargewichte multiplicire, so müsste ich Zahlen erhalten, die proportional den specifischen Gewichten der betreffenden Körper sind. Desgleichen müsste ich mit den specifischen Gewichten proportionale Zahlen bekommen, wenn ich das Moleculargewicht durch das Molecularvolumen dividire. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall; nur wieder bei chemisch ähnlichen Körpern fand ich es zutreffend, so besonders bei den Elementen Chlor, Brom und Jod.

Dieses merkwürdige Verhalten erklärt sich nur dadurch, dass die Molekeln verschiedener Substanzen eine verschiedene Anordnung besitzen müssen, was ja schon aus den verschiedenen Krystallformen der Körper hervorgeht. Es müssen jedoch die oben genannten Beziehungen zwischen Moleculargewicht und specifischem Gewicht ihre Giltigkeit bewahren, wenn die Molekeln verschiedener Körper nach demselben Gesetze angeordnet sind. Damit ist aber nicht gesagt, dass Körper, bei welchen die genannten Beziehungen bestehen, dieselbe Krystallform haben müssen; denn man kann ja auf die verschiedenste Art und Weise eine bestimmte Anzahl Molekeln in ein bestimmtes Volumen bringen.

Es darf nicht übersehen werden, dass wir für die Grösse von Cl den aus der kinetischen Gastheorie für Cl_2 gefundenen Werth einsetzten, so dass wir es nicht mit absolut richtigen Grössen zu thun haben, deshalb bleiben aber die darangeknüpften Erörterungen doch richtig, da sich dieselben nur auf die relativen Grössen der Molekeln beziehen.

Es ist nun nicht nothwendig, die Grösse der Wassermolekel zu kennen, sondern überhaupt die Grösse zweier beliebiger Molekeln unserer Tabelle. Es geht dies aus der Formel

$$d = (d' + \delta)\sqrt{\frac{v'}{v}} - \delta$$

hervor; denn aus derselben folgt dann für die Grösse der Wassermolekel

$$\delta = \frac{d'\sqrt{\frac{v'}{v}} - d}{1 - \sqrt{\frac{v'}{v}}},$$

eine Formel, die sich auch so schreiben lässt

$$\delta = \frac{d'\sqrt{v'} - d\sqrt{v}}{\sqrt{v} - \sqrt{v'}}.$$

Diese Formel würde es ermöglichen, den Moleculardurchmesser von Flüssigkeiten zu finden. Haben wir nämlich ein Salz, von dessen Jonen wir die Moleculargrösse kennen, und bestimmen nach Herrn Hittorf's Methode die Wanderungszahl des Anions, so können wir auf die bereits eingangs erwähnte Art und Weise v und v' finden. Es ist dann alles gegeben, um δ zu berechnen.

Einen zweiten Weg zur Bestimmung des δ zeigt die Gl. 5 (S. 422), wenn die molecularen Leitungsfähigkeiten zweier Salze und die Moleculardurchmesser der Jonen derselben gegeben sind. Diese letzte Gleichung ist in Bezug auf δ vom sechsten Grade, reducirt sich jedoch in dem Falle, dass man zwei Salze wählt, die ein gemeinsames Jon besitzen, auf eine Gleichung vierten Grades. Beide Methoden zur Bestimmung des δ haben aber einen wunden Punkt. Wir haben es nämlich hier mit einem Quotienten zweier sehr kleiner Grössen zu thun, so dass die geringsten Ungenauigkeiten schon zu erheblichen Abweichungen im Resultate führen. So lange also die moleculare Leitungsfähigkeit eines Salzes nicht genau bestimmt werden kann, müssen wir darauf verzichten, auf obigen Wegen den Moleculardurchmesser einer Flüssigkeit zu bestimmen.

Alle Folgerungen, die wir bisher aus den Eigenschaften der elektrischen Leitungsfähigkeit von Salzlösungen zogen, beschränkten sich auf Lösungen, die in Bezug auf die Elektroden in Ruhe waren. Wir wollen nun annehmen, die Lösung sei in Bewegung.

Die moleculare Leitungsfähigkeit ist durch die Formel

$$\lambda = u + v$$

charakterisirt. Hier sind u und v zwei Geschwindigkeiten von entgegengesetzter Richtung. Beziehen wir daher alle vorkommenden Geschwindigkeiten auf ein Coordinatensystem, so müssen wir für v den Werth $-v$ einsetzen und erhalten

$$\lambda = u - v.$$

Wenden wir dies auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem an, so ergibt sich bezüglich der drei Axen

$$\lambda_x = u_x - v_x,$$
$$\lambda_y = u_y - v_y,$$
$$\lambda_z = u_z - v_z,$$

wobei die Zeiger der vorkommenden Grössen die Componenten nach den entsprechenden Axen andeuten sollen. Ist nun die Lösung in Bewegung mit der Geschwindigkeit c, so addirt sich zu den Geschwindigkeiten der Jonen noch die entsprechende Componente der Geschwindigkeit der Lösung. Wir haben daher

$$\lambda_x = (u_x + c_x) - (v_x + c_x) = u_x - v_x,$$
$$\lambda_y = (u_y + c_y) - (v_y + c_y) = u_y - v_y,$$
$$\lambda_z = (u_z + c_z) - (v_z + c_z) = u_z - v_z.$$

Wie man sieht, wird das Resultat nicht geändert.

Es bleibt somit die elektrische Leitungsfähigkeit bezüglich der elektrische Widerstand einer Salzlösung derselbe, ob die Lösung in Ruhe oder in Bewegung ist.

Ich prüfte diesen Satz dadurch, dass ich an dem einen Ende eines Stabes zwei Zinkelektroden befestigte und nun nach der bereits früher angewandten Methode (Wechselströme und Telephon) die Widerstände von Zinksulfatlösungen maass. Ich untersuchte Lösungen von $^1/_{10}$, $^1/_{20}$ u. s. w. bis $^1/_{160}$ Aequivalent Salzgehalt. Die Widerstände blieben genau dieselben, ob die Elektroden nun in Ruhe waren oder in der verschiedensten Weise durch die Lösung bewegt wurden.

Bekanntlich wurde die Behauptung des Herrn F. Kohlrausch, dass einem jeden Jon eine gewisse moleculare Leitungsfähigkeit zukomme, nicht von allen Physikern angenommen. So traten besonders Herr E. Bouty [1]) und Herr Svante Arrhenius [2]) dagegen auf, indem sie annahmen, dass alle Molekeln oder wenigstens die Molekeln bestimmter Gruppen von Salzen dieselbe Geschwindigkeit besässen. Der Umstand aber, dass alle Folgerungen, welche ich aus der Theorie des Herrn F. Kohlrausch zog, mit den Thatsachen übereinstimmen, war für mich maassgebend, des letzteren Ansicht für die richtige zu halten.

1) Ueber die elektrische Leitungsfähigkeit sehr verdünnter Salzlösungen. Wied. Beibl. Bd. 9 S. 174.

2) Untersuchungen über die galvanische Leitungsfähigkeit der Elektrolyten. Wied. Beibl. Bd. 9 S. 437.

Ueber die optischen Eigenschaften des Tabaschir[1]).

Von

E. Brücke.

Ferd. Cohn hat im vierten Bande (1887) seiner Beiträge zur Biologie der Pflanzen eine ebenso lehrreiche als gelehrte Abhandlung über Tabaschir veröffentlicht. In derselben sind die Angaben, welche Sir David Brewster seinerzeit über die optischen Eigenschaften (Phil. Trans. Roy. Soc. of Londen 1819, vol. I p. 283 und Schweigger's Jahrbuch der Physik und Chemie Bd. 22 [Journ. für Chem. und Phys. Bd. 52] S. 412; letzteres Uebersetzung von Kämtz aus dem Edinburgh Journal of Science Nr. XVI p. 285) dieser merkwürdigen Substanz machte, reproducirt. Seine Angaben, so alt sie sind, müssen noch jetzt ein lebhaftes Interesse erwecken, aber sie bedürfen eines Commentars.

Was den Leser zuerst stutzig macht, ist das unglaublich niedrige specifische Brechungsvermögen (absolute refractive power), welches Sir David für Tabaschir findet. Er formt aus der durchsichtigen Varietät mehrere Prismen[2]) und findet mit denselben den Brechungsindex = 1,1115 bis 1,1535. Dieser Brechungsindex sei m. Er dividirt dann $m^2 - 1$ durch das specifische Gewicht, wie es erhalten wurde, wenn den lufthaltigen Tabaschir in der Luft und dann mit Wasser durchtränkt im Wasser abwog. Es war dies 2,412. Merkwürdig ist, dass er hiervon nicht abzubringen war. Er erzählt, dass ein ausgezeichnetes Mitglied der Royal Society ihm gesagt habe, er müsse statt dessen 0,66 (das specifische Gewicht des lufthaltigen Tabaschir

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Sitzungsberichten der Wiener Akad. math.-naturw. Classe (I) Bd. 97 S. 69 (1888).

2) Brewster spricht an der betreffenden Stelle nur von einem Prisma, aber er bestimmte den Brechungsindex von fünf Stücken, ohne anzugeben, dass er sich bei der Bestimmung einer anderen Methode bedient hätte. Auffallend ist nur, dass er darunter „a harder and more opaque specimen" aufzählt, dessen Brechungsindex er = 1,1825 fand. Erst später an einer anderen Stelle (Schweigger's Journal a. a. O. S. 425) sagt er, dass er den Brechungsindex in einem Falle nach dem Winkel der grössten Polarisation bestimmt habe.

als Ganzen) nehmen, aber er habe es vorgezogen, bei dem unmittelbaren Resultate des Versuches zu bleiben.

Man würde aber irren, wenn man glauben würde, Brewster sei über seinen Gegenstand so sehr im Unklaren gewesen, wie es hiernach scheint.

Gegen das Ende seiner Abhandlung in den Phil. Trans., welche die Form eines Briefes an Sir Joseph Banks trägt, spricht er von dem Verhalten eines kreidigen (opaken, chalky) Stückes Tabaschir, das in Bucheckernöl durchsichtig wurde, aber nicht in Wasser und auch nicht in Cassiaöl. Es zeigte bei einer gewissen Temperatur des Buchöls das Maximum der Durchsichtigkeit und Brewster schliesst mit Recht, dass hier die Brechungsindices des Buchöls und der festen Substanz des Tabaschir möglichst gleich sein mussten. Er schätzt diesen auf 1,5, während er früher den Brechungsindex des Tabaschir als eines Ganzen zu 1,1115 bis 1,1825 gefunden hatte, und ganz zuletzt sagt er: „Hence we may draw the important inference, of which we have no other example in physics, that the tabacheer and its included air exercise a joint action upon light, in the same manner as if they were in a state of chemical union".

Dass die Prismen aus lufthaltigem Tabaschir so geringe Ablenkungen gaben, war an sich nicht wunderbar. Die Lichtwellen konnten nur Verzögerungen erleiden nach Maassgabe der Dichtigkeit der Medien, in denen sie fortschritten, und nach Maassgabe der Weglängen, welche sie in denselben zurücklegten, aber die Frage muss erörtert werden, wie es denn möglich, dass das Tabaschirprisma noch durchsichtig war, dass nicht alles Licht reflectirt wurde bei den zahllosen Uebergängen aus Luft in Kiesel und aus Kiesel in Luft.

Das Material, mit welchem ich arbeitete, war calcinirter Tabaschir aus derselben Quelle, Dr. Schuchardt in Görlitz, aus der auch Prof. Cohn seinen Tabaschir bezogen hatte. Es war darunter kein Stück so durchsichtig, dass es zu einem Prisma hätte verwendet werden können. Auch unter dem uncalcinirten Tabaschir, den ich von Herrn Dr. Schuchardt erhielt, war kein solcher, obgleich letzterer die Gefälligkeit gehabt hatte, die durchsichtigsten Stücke für mich auszusuchen. Indessen bürgt Brewster's Name dafür, dass er solche Stücke besass, und dann gibt es für ihre Durchsichtigkeit meiner Ansicht nach nur eine Erklärung: Die Partikeln von Kiesel und Luft, welche in diesen Stücken abwechselten, mussten ungewöhnlich klein und ungewöhnlich gleichmässig sein. In einem trüben Medium gibt es nur zwei Ursachen, welche es einem durchsichtigen annähern, d. h., welche die Menge des unregelmässig reflectirten und verstreuten Lichtes relativ gering sein lassen, erstens die Kleinheit

des Unterschiedes im Brechungsindex des trübenden Mediums und des getrübten, oder die Kleinheit und Gleichmässigkeit der trübenden Theilchen. Die Wechsel des Mediums müssen so rasch aufeinander folgen, dass die zwischen ihnen liegende Zeit nur einen kleinen Bruchtheil von der Schwingungsdauer der Lichtvibrationen ausmacht. In einer Abhandlung über die Farben, welche trübe Medien im auffallenden und durchfallenden Lichte zeigen [1]), habe ich beschrieben, wie man eine Flüssigkeit erhalten kann, welche so durchsichtig ist und die Contouren der Gegenstände im durchfallenden Lichte so wohl erkennen lässt, dass man ihren Brechungsindex in einem Hohlprisma sehr wohl würde bestimmen können, und die dennoch im gewöhnlichen Sinne trüb ist, indem sie von dem auffallenden Lichte eine beträchtliche Menge aus ihrem Innern zurückgibt.

Man tröpfelt nämlich eine Lösung von einem Gewichtstheile Mastix in 87 Gewichtstheilen Weingeist in Wasser, das man in heftiger Bewegung erhält, so lange, bis dasselbe opalescirend wird und in auffallender Tagesbeleuchtung eine reichliche Menge von bläulichem Lichte reflectirt. Aber hier sind die Bedingungen für die Durchsichtigkeit viel günstiger, denn hier wechselt nur der Index von mit etwas Alkohol vermischtem Wasser mit dem von Kugeln, die aus Mastix bestehen, der eben noch so viel Alkohol zurückgehalten hat, um mit demselben Tropfen zu bilden, im Tabaschir dagegen wechselt der Brechungsindex von Luft mit dem der festen Substanz des Tabaschir. Wenn der letztere also nicht soviel Licht zerstreut reflectiren soll, dass er dadurch undurchsichtig wird, so müssen die trübenden Theilchen viel kleiner sein. Wenn man ein Newton'sches Farbenglas im auffallenden Tageslichte betrachtet, so sieht man, dass der Uebergang vom centralen dunklen Flecke zum ersten hellen Ringe kein plötzlicher, sondern ein allmählicher ist. Es ist dies eine bekannte und theoretisch hinreichend erörterte Erscheinung, welcher ich hier nur erwähne, um in Erinnerung zu bringen, in welcher Weise der Abstand der reflectirenden Flächen in Betracht kommt und auch da in Betracht kommt, wo das eine Medium Luft, das andere Glas oder ein anderes stark brechendes Medium ist.

Als ich vor 36 Jahren die oben erwähnte Abhandlung schrieb, glaubte ich noch, die Farbe des zurückgeworfenen Lichtes neige zum Violett, wenn die trübenden Theile sämmtlich sehr klein seien, weil ich an der Haut des Chamäleons als Farbe trüber Medien die violettblaue Farbe der als Aquarellfarbe bekannten Neutraltinte beobachtet hatte; aber ich bin dieser Erscheinung sonst nirgend begegnet, und

1) Wiener Akad. Bd. 9 S. 530 (1852). Daraus in Pogg. Ann. Bd. 88 S. 363.

aus den Bedingungen für die Entstehung der Farben trüber Medien lässt sie sich selbst für die kleinsten trübenden Theilchen nicht mit Nothwendigkeit herleiten. Diese Bedingungen sind zwei:

Die erste ist die Ungleichheit in der Zusammensetzung des reflectirten und des durchgelassenen Lichtes, insoweit sie lediglich als Folge der zahlreichen Reflectionen erscheint. Ich habe dieselbe schon in jener Abhandlung aus den Formeln für die Intensität des reflectirten und für die Intensität des gebrochenen Strahles hergeleitet, und es sind seitdem so ausführliche Rechnungen darüber veröffentlicht worden, dass ich hier nicht weiter darauf zurückzukommen brauche. Die zweite ursächliche Bedingung liegt in den Interferenzen, zu welchen es sowohl zwischen den reflectirten als auch zwischen den gebrochenen Strahlen kommt. Allerdings sollte man auf den ersten Anblick meinen, dass diese das reflectirte Licht umsomehr violett machen müssten, je rascher die Reflexionen aufeinanderfolgen, wenn man aber die rasche Zunahme der Lichtintensität vom Violett zum Grün berücksichtigt, welche auch das Normalspectrum zeigt, und wenn man auch bedenkt, dass Violett und Grün in gleichen Intensitäten auf der Netzhaut gemischt blau geben, so lässt sich eben über die resultirende Farbe nichts anderes aussagen, als dass sie zum Blau neigen müsste, indem das kurzwellige Licht in ihr vorherrscht.

Dies muss also auch geschehen, wenn die Abstände, in denen die Reflexionen stattfinden, einander noch näher rücken, nicht nur als eine Viertelwellenlänge des grünen und des blauen, sondern auch des violetten Lichtes, ja selbst wenn deren Abstände auch nur noch einen kleinen Bruchtheil der Wellenlänge irgend eines sichtbaren Lichtes betragen, und das letztere müssen wir beim durchsichtigen Tabaschir annehmen.

Freilich könnte die Durchsichtigkeit auch bei etwas grösseren Abständen bestehen, aber dann müsste die Zahl der trübenden Theile gering sein, was nothwendig voraussetzen würde, dass von den beiden Medien, die im Tabaschir gemengt sind, Luft und feste Kieselsubstanz, das Gesammtvolumen des einen sehr klein sein müsste gegen das Gesammtvolumen des andern. Das ist nun aber erfahrungsgemäss nicht der Fall.

Brewster sagt, der Raum, welchen die Poren einnehmen, verhält sich zu dem von der festen Masse ausgefüllten nahe wie $2\frac{1}{2}$ zu 1 [1]).

In einem opaken Tabaschir wurden 2,307 Vol. Luft auf 1 Vol. fester Substanz gefunden, in einem durchsichtigen Tabaschir aber 2,5656 Vol.

1) Schweigger's Jahrbuch d. Chem. u. Phys. Bd. 22 (Bd. 52 von Schweigger's Journal) S. 413 aus dem Edinburgh Journal of science, Nr. XVI.

Luft auf 1 Vol. fester Substanz. Das in Rücksicht auf Durchsichtigkeit denkbar ungünstigste Verhältnis würde erreicht sein, wenn die Zeiten, welche das Licht während seines Durchganges in Luft und in fester Substanz zubringt, gleich wären, wenn also die Weglängen in der Luft, dividirt durch die Weglängen in fester Substanz den Brechungsindex der letzteren gegen Luft geben würden, aber alle Verhältnisse sind ungünstig, solange nicht das eine Volum sehr klein ist gegen das andere. Es kann also nur durch die Kleinheit der Abstände, in welchen die Reflexionen aufeinanderfolgen, ermöglicht werden, dass trotz ihrer grossen Zahl so wenig Licht unregelmässig zerstreut wird, dass ein solches Stück Tabaschir noch durchsichtig und für Anfertigung eines Prismas geeignet sein kann, und zwar muss diese Kleinheit eine möglichst gleichmässige sein, es dürfen nicht Regionen der feineren Vertheilung mit Regionen der gröberen Vertheilung abwechseln.

Wenn die hier vorgetragene Ansicht über den durchsichtigen Tabaschir richtig ist, so muss man mit Hilfe von solchem einen für die Optik wichtigen Versuch anstellen können. Man bestimme den Brechungsindex eines Stückes auf dioptrischem Wege, also z. B. wie Brewster dadurch, dass man ein Prisma aus demselben schneidet. Dann wird dasselbe, nachdem es zur besagten Bestimmung gedient hat, gewogen, darauf mit einer Flüssigkeit von bekanntem specifischem Gewichte möglichst vollständig durchtränkt, an der Oberfläche abgetrocknet und wieder gewogen. Man findet auf diese Weise das Volum der Lufträume, welche die durchtränkende Flüssigkeit erfüllt.

Durch Division des Resultates der ersten Wägung mit dem specifischen Gewichte der Kieselsubstanz des Tabaschir findet man das Volum der festen Masse des Prismas, nachdem man das erwähnte specifische Gewicht dadurch ermittelt hat, dass man das durchtränkte Prisma noch einmal in derselben Flüssigkeit von bekanntem specifischem Gewichte, mit der es durchtränkt wurde, abwog.

Daraus ergeben sich, die Substanz des Prismas als gleichartig vorausgesetzt, die Weglängen, welche das Licht in demselben in der Luft und in der festen Substanz des Tabaschir zurücklegt, und es fragt sich, entspricht die Ablenkung diesen Weglängen, wenn man einfach die Brechungsindices von Luft und von der Kieselsubstanz des Tabaschir zu Grunde legt, oder weicht sie davon ab, welche Abweichung man dann auf Rechnung von Störungen zu setzen haben würde, die beim Uebergange des Lichtes aus einem Medium in das andere stattfinden.

Ist s die in Luft zurückgelegte Wegstrecke und s_1 die in fester Substanz zurückgelegte, so muss, falls keine solchen Störungen stattfinden, gefunden werden

$$x = \frac{s + n s_1}{s + s_1},$$

worin x den Brechungsindex des lufthaltigen Tabaschir gegen Luft, den Brechungsindex der letzteren gleich 1 gesetzt, bedeutet und n den Brechungsindex der festen Substanz des Tabaschir gegen Luft.

Die Angaben von Brewster können nicht als Unterlage für eine solche Rechnung dienen, schon deshalb nicht, weil alle Daten an einem und demselben Stücke gewonnen sein müssen, während die von Brewster überlieferten Zahlen von verschiedenen Stücken herrühren, aber ich will, ehe ich weiter gehe, noch die Art besprechen, wie der Brechungsindex der festen Substanz des Tabaschir gegen Luft, der gleichfalls an demselben Stücke bestimmt werden muss, am besten ermittelt wird.

Wenn Tabaschir mit einer Flüssigkeit durchtränkt wird, so wird er sicher umso durchsichtiger werden, je mehr sich der Brechungsindex der Flüssigkeit dem seiner festen Substanz nähert, und er wird bis zum Verschwinden durchsichtig werden, wenn jener diesem gleichkommt. Man hat dann nur den Brechungsindex der Flüssigkeit zu bestimmen. Man kann aber mittels Prof. Sigm. Exner's Mikrorefractometer[1]) dies Verfahren noch bedeutend verfeinern. Herr Prof. S. Exner untersuchte auf meinen Wunsch mikroskopische Splitter von einem durchscheinenden, im auffallenden Lichte bläulichen, calcinirten Tabaschir mit seinem Instrumente. Er brachte sie in verschiedene Mischungen von Glycerin und Wasser und fand die feste Substanz derselben immer stärker brechend als solche von 1,4637 und schwächer als solche von 1,4647. In Flüssigkeiten vom Index 1,4638 und 1,4640 zeigten sich einzelne Splitter des Tabaschir stärker, andere schwächer brechend als das Medium.

Der auf gleiche Weise bestimmte Brechungsindex von rohem, nicht calcinirtem Tabaschir lag zwischen 1,4580 und 1,4598.

Die Brechungsindices der Flüssigkeiten wurden mittels Abbe's Refractometer bestimmt. Der Tabaschir setzte wegen seiner Imbibitionsfähigkeit der Anwendung des Mikrorefractometers insoferne grössere Schwierigkeiten entgegen als andere Körper, als die meisten Stücke verschwanden, nachdem die Gleichheit der Brechungsindices nahezu erreicht war und nur einzelne besonders günstig gelagerte Stücke sichtbar blieben.

1) Ein Mikrorefractometer. Arch. f. mikroskopische Annat. Bd. 25 und Sitzungsprotokoll der chem.-phys. Gesellschaft zu Wien, 2. Juni 1885 in F. Exner's Repert. der Physik.

Die gefundenen Werthe sind sehr beträchtlich unter 1,544, dem Brechungsindex des ordinären Strahles im Quarz für Natronlicht, aber die Dichte des Tabaschir ist auch, abgesehen von den Lufträumen, viel geringer als die des Quarzes. Brewster schätzt das specifische Gewicht der festen Substanz auf 2,412 [1]) während die des Quarzes 2,653 ist.

Brewster sagt, als er ein Tabaschirprisma mit Cassiaöl getränkt habe, so sei dessen Brechungsindex ein wenig höher gewesen als der des Oels, nämlich gleich 1,6423. Das Prisma sei durch das Oel stark gelb gefärbt worden. Diese angegebene Zahl ist vorläufig nicht zu erklären. Baden Powell, der höhere Zahlen für Cassiaöl angibt als Kundt, verzeichnet für gelbes Natronlicht 1,6104, während Brewster selbst für dieses Oel 1,641 angibt (Schweigger's Jahrbuch d. Chem. und Phys. a. a. O. S. 524). Brewster müsste also einen Tabaschir untersucht haben, dessen feste Substanz nicht nur stärker brach als Quarz, sondern auch stärker als das Cassiaöl.

Brewster spricht ferner den Verdacht aus, dass das Wasser vielleicht nicht in alle Poren des Tabaschir eindringe. Es wird sich deshalb empfehlen, bei Wägungen für den besagten Zweck nicht Wasser anzuwenden, sondern eine andere Flüssigkeit. Bedingungen sind: Grosse Capillarattraction gegen Kiesel und Silicate und Nichtflüchtigkeit bei gewöhnlicher Temperatur, letztere deshalb, weil man das imbibirte Stück auch in der Luft wägen muss, um das Volumen der Lufträume zu bestimmen. Wünschenswerth ist ferner ein Brechungsindex, der nicht zu weit von dem der festen Substanz des Tabaschir entfernt ist, damit die in allen Theilen erzielte Durchsichtigkeit Zeugnis für die Vollständigkeit der Imbibition ablege. Die letztere erzielt man am besten so, dass man in ein Gefäss zuerst eine niedere Schicht von der Flüssigkeit giesst, in welche das Tabaschirstück weniger als zur Hälfte eintaucht und nun wartet, bis das letztere sich vollgesogen hat und durchsichtig geworden ist. Erst dann giesst man von der Flüssigkeit nach, bis das ganze Stück bedeckt ist. Ich habe so sehr undurchsichtige Stücke von Tabaschir mittels Bucheckernöl durchsichtig gemacht.

Dass die Theilchen der festen Substanz und ihre Zwischenräume sehr klein sein müssen, bestätigt auch die mikroskopische Untersuchung. Ich habe für dieselbe Tabaschir in verschiedener Weise im-

1) Es war dies das Resultat, welches James Jardine als Mittel an einigen durchsichtigen Tabaschirstücken erhalten hatte. Cavendish fand das specifische Gewicht der festen Substanz eines gleichfalls durchsichtigen Stückes = 2,169. (Phil. Trans. l. c. p. 395.)

prägnirt. Das erste belehrende Resultat ergab das schon von Plinius beschriebene Verfahren, Onyx aus Calcedon zu machen, Imprägnation mit Zuckerkohle. Ich kochte ein Stück durchscheinenden Tabaschir in heiss concentrirter Rohrzuckerlösung (Plinius schreibt begreiflicherweise Honig vor) und liess es mehrere Tage in der erkalteten Flüssigkeit liegen; dann trocknete ich es durch mehrere Tage erst an der Luft, dann im warmen Raume und erhitzte es schliesslich bis zur gänzlichen Verkohlung des Zuckers, wobei es in mehrere Fragmente zersprang. Ein Paar derselben wurden in der Reibschaale gepulvert und das Pulver in Bucheckernöl mikroskopisch untersucht. Die einzelnen Stückchen waren sämmtlich braun gefärbt. Auch mit den stärksten Vergrösserungen liess sich keine Abwechslung von Weiss und Braun wahrnehmen, zwar erschienen die Stücke oft heller und dunkler gekörnt, aber der hellere Grund war noch immer braun. Nur ganz vereinzelt kamen kleine Stücke vor, in denen ein feines, braunes Gitter farblose Räume einschloss, und auch hier musste es zweifelhaft bleiben, ob man es mit gröberen Massen fester Substanz zu thun habe, oder mit kleinen Partien, in welche die Zuckerlösung nicht eingedrungen war. Auch kamen an einem und demselben Splitter ganz gleichmässige Braunfärbung und Körnerzeichnung nebeneinander vor.

Dass wir Theilchen, von denen wir annehmen, dass ihre Durchmesser nur einen kleinen Bruchtheil von der Wellenlänge des Lichtes betragen, auch wenn sie stark absorbirend wirken, nicht einzeln sehen, versteht sich, die Richtigkeit der Annahme vorausgesetzt, von selbst, aber die mikroskopische Untersuchung gab noch zu einer anderen Wahrnehmung Veranlassung.

Sir David Brewster erzählt, dass ein Stück Tabaschir, welches man in Papier wickelt, wenn man das letztere anzündet, nicht nur oberflächlich, sondern bis zu einer gewissen Tiefe schwarz wird, und dass man die Schwärze vertiefen kann, wenn man den Versuch mit demselben Stücke mehrmals wiederholt. Ich fand nun auf diese Weise geschwärzte Stücke, wenn sie pulverisirt und mikroskopisch untersucht wurden, zwar weniger tief gefärbt als die mit Zucker geschwärzten, aber, so weit die Färbung reichte, viel gleichmässiger.

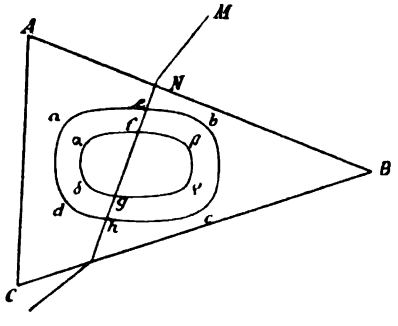
Die früher beschriebene Körnchenzeichnung kam an den von mir untersuchten Stücken nur vereinzelt vor. Die mikroskopischen Splitter waren einfach gleichmässig braun, nur da, wo sie dünner waren, lichter.

Es unterliegt nun keinem Zweifel, dass die Färbung von Kohlentheilchen herrührte, welche durch Luftströmungen in das Innere des Tabaschir getragen waren. Diese Kohlentheilchen waren also selbst

für die stärksten Vergrösserungen unsichtbar klein, und sie waren durch Luftströme in Räume von derselben Grössenordnung hineingetragen. In solchen Räumen also existiren noch Luftströme. Es scheint das auf den ersten Anblick schwer vereinbar mit dem Widerstande, den wir beim Hindurchpressen von Luft durch sehr enge Räume erfahren, aber die treibenden Kräfte sind verschiedene. Hier sind es eben die durch die Verbrennung entwickelten lebendigen Kräfte, welche die Lufttheilchen und die Kohlentheilchen miteinander forttreiben.

Brewster führt einen interessanten, auf den ersten Anblick paradoxen Versuch an. Bringt man auf ein durchsichtiges Stück Tabaschir eine kleine Quantität von Wasser, so wird diese sofort absorbirt, und es entsteht ein weisser, undurchsichtiger, kreidiger Fleck. Wenn man aber das ganze Stück vollständig mit Wasser imbibirt, so wird es durchsichtiger als es früher war. Ich habe diesen Versuch an durchscheinenden Stücken von Tabaschir, rohem und calcinirtem, mit demselben Erfolge wiederholt, der Erklärung aber, welche Brewster gibt, kann ich nicht beistimmen.

Man sehe folgende Figur. Sie ist eine Copie derselben, welche Brewster seiner Erklärung beigibt. ABC sei ein Prisma aus Tabaschir und $abcd$ einer von seinen Poren stark vergrössert. Dieser Hohlraum ist mit Luft gefüllt. Wenn nun der Strahl MN bei e in denselben eintritt und bei h ihn wieder verlässt, so ist er, meint Brewster, wegen des niederen Brechungsindex des Tabaschir so wenig gebrochen und so wenig reflectirt, dass das Stück durchsichtig erscheinen kann. Wenn aber etwas Wasser eintritt, so benetzt dieses die Wand des Hohlraumes, ohne ihn ganz zu erfüllen. Es soll etwa bis zur Linie $\alpha\beta\gamma\delta$ reichen. Dann tritt Brechung zwischen Luft und Wasser ein, der Brechungsindex von Wasser ist aber höher, und dadurch wird das Stück undurchsichtig.



Es ist klar, Brewster denkt hier an den niedrigen Brechungsindex, welchen er für Tabaschir als Ganzes ermittelt hat. Dieser setzt sich zusammen aus dem Brechungsindex von Luft und dem der festen Substanz. Er kann also 1,1115 sein, während Brewster den des Wassers zu 1,3358 angibt. Wenn wir aber die den ganzen Tabaschir durchsetzenden kleinen Poren betrachten, durch deren Kleinheit und Gleichmässigkeit es allein möglich wird, dass er durchsichtig sein kann,

während er auf einen Raumtheil fester Substanz 2½ Raumtheile Luft enthält, wenn wir diese kleinsten Poren betrachten, so handelt es sich um nichts Geringeres als um den Uebergang von Luft in Kiesel und von Kiesel in Luft. Es kommt also nicht der Brechungsindex des Tabaschir als eines Ganzen in Betracht, sondern der Brechungsindex der festen Substanz desselben gegen Luft.

Mir scheint die Ursache des Opakwerdens bei Benetzung mit einzelnen Tropfen eine andere zu sein. Es ist gewiss, das Wasser, da es in unzureichender Menge vorhanden ist, kann nicht alle Räume erfüllen. Es wird nur einige erfüllen, aber diese werden wahrscheinlich kein glatt abgerundetes Territorium bilden, sondern es werden zwischen den wassererfüllten Räumen andere mit Luft gefüllte bleiben. Es entstehen dadurch im Bereiche des Tropfens zwei Substanzen, von denen die eine einen Brechungsindex zwischen 1,336 und 1,465 hat, während die der anderen zwischen 1,1115 und 1,1535 liegt.

Wenn also die Grenzen dieser zwei Substanzen Abstände von mikroskopisch sichtbarem Durchmesser zwischen sich lassen, so erklärt dies hinreichend die Undurchsichtigkeit im Bereiche des Tropfens. Ich habe die Richtigkeit dieser Erklärung durch einen Versuch erhärten können. Ich setzte auf ein Stück durchscheinenden Tabaschir einen Tropfen einer ziemlich concentrirten Lösung von übermangansaurem Kali, der sogleich eingesogen wurde. Ich trocknete langsam zuerst an der Luft, dann in der Wärme und erhitzte zuletzt, als sicher kein Wasser mehr zurück war, über der Spirituslampe.

Es blieb nun ein brauner Fleck zurück, von dem ich mit dem Grabstichel kleine Stücke heraushob, die ich dann zwischen zwei Objectträgern weiter zertrümmerte und in Bucheckernöl mikroskopisch untersuchte. Sie zeigten Abwechslungen von braunen und von vollständig farblosen Partien. Die braunen Zeichnungen, welche die Räume wiedergaben, in welche die Flüssigkeit eingedrungen war, zeigten einen dendritischen Charakter, aber die Figuren waren nicht gespreizt ästig, sie ähnelten vielmehr Bildern von Thujatrieben. Oft aber kamen an einem Splitter auch nur vereinzelte braune Sterne vor, offenbar dann, wenn die Richtung, in der die Flüssigkeit fortgeschritten war, nicht senkrecht gegen die Gesichtslinie stand, sondern parallel zu derselben oder wenig geneigt.

Ferd. Cohn sagt, ohne näher auf diesen Punkt einzugehen, der Tabaschir fluorescire, namentlich das schöne blaue Licht, welches er in Terpentinöl liegend und mit demselben getränkt zurückgibt, sei Fluorescenzlicht. Dass es nicht von Fluorescenz allein herrührt, lässt sich leicht wahrnehmen. Wenn man es durch ein Nicol'sches Prisma

betrachtet und dieses vor dem Auge um die Axe dreht, so ändert sich seine Intensität je nach der Lage des Prismas deutlich. Fluorescenzlicht thut dies bekanntlich nicht, da es unpolarisirt ist.

Dieses reflectirte Licht ist einfach Farbe des trüben Mediums und als solches bläulich. Im durchfallenden Lichte sind dieselben Stücke gelblich, bräunlich oder röthlich. Weshalb die Farbe des durchfallenden Lichtes von der Complementärfarbe des reflectirten Lichtes mehr oder weniger abweicht, das habe ich in meiner oben citirten Abhandlung über die Farben trüber Medien bereits ausführlich auseinandergesetzt.

Daneben konnte aber Fluorescenzlicht von dem in Terpentinöl liegenden Tabaschir ausgehen, und dies scheint in der That der Fall zu sein.

Erstens glaube ich einen schwachen blauen Lichtschein im Tabaschir auch dann noch gesehen zu haben, wenn nicht mehr Theile des leuchtenden Spectrums hindurchgingen, sondern die den violetten zunächst liegenden dunklen Strahlen. So meinte auch Prof. Sigm. Exner, der den Versuch mit mir anstellte.

Das Licht wurde durch verbrennenden Magnesiumdraht erzeugt, das Spectrum durch ein Bergkrystallprisma und zwei Bergkrystalllinsen entworfen.

Zweitens erschien ein Stück Tabaschir, das in Terpentinöl so durchsichtig geworden wie Eis und in demselben fast unsichtbar, in dem durch eine Sammellinse vom Magnesiumlicht entworfenen Lichtkegel schön blau und zeigte seine ganze Gestalt wie ein bläulich getrübter Stein, der im Wasser liegt. Freilich war das Licht, welches es zurückgab, auch nicht frei von polarisirtem. Es war also auch reflectirtes Licht dabei. Doch glaube ich, dass auch diese Beobachtung im Zusammenhalte mit der vorerwähnten dafür spricht, dass dem Tabaschir Fluorescenz zukomme, wenn auch nicht gerade als hervorragende Eigenschaft.

Wenn schliesslich gefragt wird, was wir über die Structur des Tabaschir aussagen können, so ist es zunächst unzweifelhaft, dass alle festen Theile desselben miteinander in Verbindung stehen, denn der durchscheinende Tabaschir ist nicht kreidig und schreibend, er zeigt muscheligen Bruch.

Andrerseits ist es unzweifelhaft, dass alle Lufträume miteinander in Verbindung stehen, denn sonst könnte er sich nicht dadurch vollständig infiltriren, dass wir ihn theilweise in eine Flüssigkeit tauchen lassen, gleichviel von welcher Seite dies geschieht. Die feste Substanz bildet also ein dreidimensionales Gitterwerk. Ob die Elemente

dieses Gitterwerkes amorph oder krystallisirt sind, wissen wir nicht. Unter dem Polarisationsmikroskope zeigt Tabaschir keine Spur von krystallinischer Structur, aber auch, falls er ganz aus Krystallen bestände, müsste dies so sein, wenn die Krystalle nicht orientirt wären, da der einzelne viel zu klein sein würde, um zu einer Interferenzerscheinung des polarisirten Lichtes Veranlassung zu geben.

Der Tabaschir ist im gewöhnlichen Sinne des Wortes vollständig amorph.

Versuche und Bemerkungen über den galvanischen Lichtbogen [1]).

Von

H. Luggin.

Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich Herrn Prof. Mach, der meine Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand lenkte und ihn mir zur Untersuchung empfahl. Anfänglich gedachte ich bei diesen Versuchen den Gasmotor und die Dynamomaschine des physikalischen Institutes zu verwenden, es zeigte sich aber bei Graduirung des Voltmeters, mit dem ich die Spannungen zu messen beabsichtigte, dass mit diesen Mitteln Spannungen von 40 Volt. überhaupt nicht erreicht werden konnten. Ich hätte die Versuche aufgeben müssen, wenn mir nicht Herr Křižik in liebenswürdigster Weise die Benutzung einer Accumulatorenbatterie in seiner Fabrik gestattet hätte, wofür ich zu grösstem Danke verpflichtet bin. Diese Batterie zeigte vollgeladen 100 Volt. Spannung, in der Regel konnte ich mit nur wenig schwankenden Strömen zwischen 6 und 7 Ampère arbeiten und diesem Umstande, glaube ich, ist es zu verdanken, dass ich im allgemeinen befriedigende Uebereinstimmungen erzielte, obwohl alle Messungen von mir allein angestellt sind, die Versuchsdaten also niemals gleichzeitig, sondern immer nacheinander gewonnen wurden.

Ich habe in Nr. XIII des akad. Anzeigers, Jahrg. 1887, eine vorläufige Mittheilung veröffentlicht, deren Inhalt ich jetzt für irrig ansehen muss, sowohl was die Methode als auch was das Resultat anlangt.

Nach dem Vorbilde der V. v. Lang'schen Methode gedachte ich durch eine Brückenaufstellung, in deren einem Zweige sich der Lichtbogen befand, den Widerstand desselben zu ermitteln; die Klemmspannung, vermindert um das Product der Stromstärke in jenen Widerstand, hätte die elektromotorische Kraft des Lichtbogens geliefert.

Solange ein Leiterstück von einem constanten, von einer äusseren elektromotorischen Kraft gelieferten Strome durchflossen ist, die Span-

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 96 S. 759 (1887).

nung sich also an seinen Enden nicht ändert, kann man offenbar nicht angeben, ob die Spannung an seinen Enden durch den Widerstand dieses Leiterstückes allein bedingt ist, oder ob sich in demselben auch etwa noch eine elektromotorische Gegenkraft befindet, deren Spannung, zum Producte aus Stromstärke und Widerstand addirt, erst die an den Enden des Leiters beobachtete Spannung liefern würde.

Wenn sich nun aber mit der äusseren elektromotorischen Kraft die Stromstärke im fraglichen Leiter um di und damit auch die Klemmspannung an seinen Enden um dS ändert, so kann man unter der Annahme, der Widerstand und die fragliche elektromotorische Kraft des Leiters seien unverändert geblieben, aus der gemessenen Klemmspannungsvariation dS auf einen Widerstand

$$w = \frac{dS}{di}$$

schliessen. Ob und wie weit dieser Schluss berechtigt ist, kann nur von Fall zu Fall entschieden werden. Beim Lichtbogen führt eine solche Schlussweise sofort zum Widerspruche. Wenn man nämlich an den Enden eines gewöhnlichen stromdurchflossenen Leiterstückes eine kleine elektromotorische Kraft anbringt und die dadurch hervorgerufene Intensitäts- und Spannungsvariation im Sinne dieser zugefügten elektromotorischen Kraft rechnet, so wird die Spannungsvariation $w\,di$ immer positives Vorzeichen haben; anders beim Lichtbogen, wo eine Verstärkung des Stromes die Spannung vermindert, hier ist die Spannungsvariation immer negativ, wenn man im Sinne der neu auftretenden Intensitätsvariation rechnet. Das bequemste Mittel, um Spannungsdifferenzen an den Enden eines Leiters mit denen an den Enden eines bekannten Widerstandes zu vergleichen, sind nun Brückencombinationen. Wenn Stromschwankungen, die durch den einen Diagonalzweig zwischen den Seitenzweigen a und c eintreten, im zweiten Diagonalzweige keinerlei Schwankung hervorrufen, wenn also das Potential an der Verbindungsstelle von a und b in der gleichen Weise variirt wie an der Verbindungsstelle der Zweige c und d, so darf man ohne weiteres behaupten, in a sei der Widerstand

$$w_1 = \frac{w_2 w_3}{w_4},$$

wo w_2, w_3, w_4 die Widerstände von b, c und d darstellen; dies ist auch dann noch richtig, wenn sämmtliche Zweige der Brückencombination constante elektromotorische Kräfte enthalten sollten. Wird nun im Zweige a ein Lichtbogen angezündet, während im Uebrigen sämmtliche Widerstände der Brückencombination ungeändert bleiben,

so wird die Spannung an den Enden von a jetzt weniger variiren als zuvor, und man müsste aus der verminderten Spannungsvariation schliessen, der Widerstand w_1 sei kleiner geworden, der Lichtbogen habe also einen negativen Widerstand.

Nach dem Gesagten brauche ich auf alle Einzelheiten der Methode, welche ich in Anwendung bringen wollte, nicht einzugehen und bemerke nur, dass bei mir der Lichtbogen den einen und eine Vergleichseinheit von 2 Ohm Widerstand den zweiten Seitenzweig der Brücke bildete, die zwei weiteren Seitenzweige wurden durch variable Flüssigkeitswiderstände dargestellt, deren Gesammtwiderstand unveränderlich 300 Ohm betrug. In einem Diagonalzweige waren die Accumulatorenbatterie und die Rheostaten zur Regulirung des Stromes untergebracht, im Nebenschluss zu diesen Rheostaten befanden sich Flüssigkeitswiderstände von etwa 600 Ohm und eine Unterbrecherstelle, an welcher eine elektrisch getriebene Feder von variabler Tonhöhe spielte. Obwohl die so entstehenden Stromschwankungen äusserst schwach waren, gab der Lichtbogen dennoch den Ton des Unterbrechers wieder. Im zweiten Diagonalzweige waren ein Telephon und ein Condensator hintereinander geschaltet, letzterer schützte das Telephon vor constant hindurchgehenden Strömen und nahm doch bei auftretenden Stromstössen solche Elektricitätsmengen auf, dass das Telephon genügende Empfindlichkeit bewahrte. Die Einstellung auf das Minimum des Tones litt an grosser Unsicherheit. Die an dieser Aufstellung vorgenommenen Messungen des Lichtbogenwiderstandes ergaben erst Abweichungen, aus denen ich Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft von der Temperatur der Elektroden folgerte, später stellten sich Widersprüche ein, die mich zwangen, die Abhängigkeit der Spannung am Lichtbogen von der Stromstärke zu untersuchen, da ergab sich die schon vorhin angegebene Thatsache, dass die Spannung mit der Stromstärke sinkt, anstatt zu steigen. Diese Thatsache ist, wie ich nachher gewahr wurde, schon aus den Messungen des Herrn W. Peukert[1]) ersichtlich, ja sie wurde schon von Herrn O. Frölich[2]) vermuthet und sie ist von Herrn B. Nebel[3]) eingehendst untersucht und mit gewissen Einschränkungen bethätigt worden, was mir erst später bekannt wurde. Das Sinken der Spannung beim Steigen der Stromstärke dürfte seinen Grund in der verbesserten Leitungsfähigkeit der Gase bei erhöhter Temperatur haben; so ist es erklärlich, dass dieser Rückgang sich nicht momentan einstellt und der Lichtbogen bei Anwendung kurz andauernder Stromstösse positive

1) Zeitschr. für Elektrotechnik 1885 S. 111.
2) Elektrotechn. Zeitschr. 1883 S. 150.
3) Diese Zeitschrift 1886 S. 527.

Widerstände zeigt. Ein Analogon bieten Elektrolyte; bei langsamen Variationen der Spannung an den Enden verhindert die Polarisation den Durchgang der Ströme, und der Widerstand scheint unendlich; bei sehr rasch verlaufenden wechselnden Strömen vermag sich keinerlei Polarisation zu entwickeln und man kann vollkommen einwurfsfreie Widerstandsbestimmungen vornehmen.

Der Einwand, der gegen meine Bestimmung des Lichtbogenwiderstandes zu erheben ist, muss auch gegenüber den anderen Methoden gemacht werden, welche sich dieselbe Aufgabe stellen.

Herr O. Frölich [1]) bringt seinen Lichtbogen in einen Seitenzweig der Brücke und schliesst, dass die Widerstände abgeglichen seien, wenn Stromschwankungen im einen Diagonalzweige das Galvanometer im zweiten Diagonalzweige nicht beeinflussen. Herr L. Arons [2]) hat ausser dem Lichtbogen noch die denselben speisende Batterie in einem Seitenzweige der Brücke angebracht, erzeugt im einen Diagonalzweige durch ein Inductorium Stromstösse und stellt den zweiten Diagonalzweig, der die bewegliche Rolle eines Dynamometers enthält, sodass er von diesen Stössen nicht beeinflusst wird, hernach wird für den Lichtbogen ein Widerstand substituirt, für welchen die Brücke wieder bei unveränderter Stellung der Diagonalzweige abgeglichen ist. Dass der Lichtbogen bei Herrn Arons einen positiven Widerstand zeigte, dürfte seinen Grund wieder in den rasch verlaufenden Stössen haben. Herr Frölich erhielt einen allerdings nur kleinen Widerstand; die Beschreibung seines Experimentes nimmt nur wenige Zeilen in Anspruch, über den Grund, weshalb er keinen negativen Widerstand erhielt, kann ich keine Vermuthung aufstellen. Allen diesen Methoden diente die Methode von V. v. Lang [3]) zum Vorbilde, bei derselben soll der Widerstand eines Stromkreises mit zwei Bogenlichtern bestimmt werden. Denkt man sich eine Batterie von $2n$ hintereinander geschalteten Elementen an äquipotentiellen Punkten als Seitenzweig in eine Brücke gebracht, so dass also dieser Zweig in zwei Zweige von je n-Elementen gespalten ist, so wird sich der Widerstand dieses Zweiges, der gleich dem Widerstande von $\frac{n}{2}$ Elementen ist, durch Abgleichung der Brücke finden lassen. Fügt man in jeden Arm des Doppelzweiges in der Brücke ein Bogenlicht, so wird sich jetzt die Spannung an den Enden des Doppelzweiges beim Oeffnen und Schliessen der Messbatterie weniger ändern als zuvor, und man müsste auf Verringerung des Widerstandes schliessen. Thatsächlich erhielt V. v. Lang

1) Wied. Ann. Bd. 30 S. 156 (1887).

2) Wied. Ann. Bd. 30 (1887).

3) Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 91 (1885) und Bd. 95 (1887).

nach seiner Methode einen grösseren Werth für die Gegenkraft des Lichtbogens als nach der Edlund'schen Methode. Letztere bestimmt nun die Minimalspannung des Lichtbogens (womit ich die Spannung bei der Bogenlänge Null bezeichne), welche recht wohl zum Theile auf einen Uebergangswiderstand zurückzuführen sein kann. Der Vergleich der Resultate beider Methoden würde einen negativen Uebergangswiderstand ergeben.

Die Messungen, welche ich im folgenden mittheile, wurden nach der Edlund'schen Methode angestellt. Zur Messung der Spannungsdifferenzen an den Elektroden benutzte ich ein Fein'sches Voltmeter, in das ein rückwärts versilbertes Mikrometerblättchen eingesetzt wurde, der Stand der darüber spielenden Nadel wurde mittels Lupe abgelesen. Die zur Graduirung des Apparates erforderlichen Spannungen wurden durch den Strom der Dynamomaschine des physikalischen Institutes, welcher bekannte, in destillirtes Wasser tauchende Neusilberwiderstände durchfloss, erzielt. Die betreffenden Stromstärken wurden mittels eines Siemens'schen Dynamometers bestimmt, dessen Reductionsfactor vorher controlirt worden war. Die Graduirung wurde bis zu 35 Volt. vorgenommen, bei welcher Spannung die Voltmeternadel das Ende der Mikrometerscala erreichte. Hernach wurden zum Voltmeter bekannte Widerstände zugeschaltet, sodass das Ende der Scala einer Spannung von 63 Volt. entsprach. Die Spannungen und ihre zugehörigen Ausschläge wurden graphisch dargestellt, und es liess sich durch die 22 Punkte, welche die Graduirung lieferte und welche Spannungen von 22 bis 61 Volt. entsprachen, eine einheitliche Curve ziehen, von welcher nur ein Punkt um 1 % abwich. Der Nullpunkt des Voltmeters war sehr constant; da die Erwärmung durch den Strom die Ausschläge sehr stark beeinflusste, so wurde der Apparat immer nur für die Dauer der Ablesung eingeschaltet. Die Stromstärken wurden bei den Messungen am Lichtbogen an dem bereits erwähnten Siemens'schen Dynamometer abgelesen. Zur Bestimmung der Bogenlängen wurde mittels einer Linse ein Bild des Lichtbogens auf einem 4 m entfernten englinirten Faulenzerblatt entworfen. Ein Scalentheil entsprach einer Bogenlänge von 0,434 mm.

Zunächst theile ich das Ergebnis von Messungen mit, die mit Siemens'schen Kohlenstiften von 10 mm Stärke angestellt wurden; als positiver oberer Pol war Dochtkohle, als negativer homogene Kohle in Verwendung. Als Bogenlänge bezeichne ich den Abstand des Kraterrandes der positiven von der Spitze der negativen Elektrode. Die freien Enden der Kohlenstifte hatten zusammen eine Länge von 10—16 cm.

Um möglichst gute Uebereinstimmungen zu erzielen, wurden fünf Versuchsreihen angestellt, bei jeder von ihnen schritt die Bogenlänge

in sieben gleichen Absätzen vom Scalentheile 1 bis zum Scalentheile 8 fort. Jede einzelne Ziffer einer Versuchsreihe wurde aus drei bis vier Spannungsmessungen, für welche der Lichtbogen immer auf die erforderliche Bogenlänge gebracht wurde, gewonnen, dazu kamen noch zwei Messungen der Stromstärke am Anfange und am Ende jedes solchen Beobachtungssatzes. Die fünf Beobachtungsreihen, in acht gleichweit abstehende Normalorte vereinigt und auf die Stromstärke 7 Ampère bezogen, ergaben die Formel:

$$K = 40{,}04 + 1{,}77\,L \text{ (Volt.)},$$

wo K die Spannung an den Elektroden und L die Lichtbogenlänge in Scalentheilen bedeutet. Nachstehend gebe ich die beobachteten und berechneten Spannungsdifferenzen für die einzelnen Normalorte nebst ihren gegenseitigen Abweichungen.

L	K beobachtet	K berechnet	δ
1	41,6	41,81	− 0,21
2	43,3	43,59	− 0,29
3	45,4	45,36	+ 0,04
4	47,6	47,14	+ 0,46
5	49,3	48,91	+ 0,39
6	50,8	50,68	+ 0,12
7	52,3	52,46	− 0,16
8	53,9	54,23	− 0,33

Ich muss gestehen, dass mich die geringen Abweichungen der beobachteten Punkte von der Geraden überrascht haben; da nach den Messungen von Herrn B. Nebel[1]) die Spannungsänderung mit der Stromstärke in recht complicirter Weise von der Bogenlänge abhängt, hatte ich mich auf eine ziemlich bedeutende Krümmung gefasst gemacht. Da unter den zahlreichen Beobachtungsreihen, die in jener Arbeit niedergelegt sind, mehrere mit Siemens'schen Kohlenstiften von 10 mm Stärke angestellt wurden, so ist ein Vergleich der beiderseitigen Resultate möglich. Die Uebereinstimmung der von Herrn B. Nebel für die Minimalspannung des Lichtbogens erhaltenen Werthe 39,3, 39,4, 39,2 Volt. bei resp. 12, 14 und 16 Ampère mit der von mir erhaltenen Minimalspannung 40,0 scheint mir sehr befriedigend. Bei jenen Messungen ist übrigens die Kratertiefe in die

1) A. a. O.

Bogenlänge eingerechnet worden; ich habe mich diesem Verfahren, bei welchem der Werth für die Minimalspannung kleiner herauskommt, nicht angeschlossen, da bei mir der ganze Kraterrand nicht in ringsum gleicher Intensität zu glühen schien, ich demnach nicht annehmen darf, dass der Lichtbogen wirklich von der tiefsten Stelle des Kraters ausgegangen sei.

Die Spannungszunahme bei Zunahme der Bogenlänge um 1 mm muss aus den Messungen von Herrn Nebel zu rund 3 Volt. gefolgert werden, während ich 4,1 Volt. erhielt. Solche Abweichungen liegen weit ausserhalb der Grenze der Beobachtungsfehler der beiderseitigen Messungen. Nebenbei will ich noch bemerken, dass man am Lichtbogen bei ganz geringer Bogenlänge Spannungen wahrnehmen kann, welche noch geringer sind als die nach der Edlund'schen Methode ermittelten Minimalspannungen; so erhielt ich im Mittel 34,9 Volt., wenn die Spitze der negativen Elektrode mit dem Krater der positiven in gleicher Höhe schien, dabei ist oft ein Singen und Zischen vernehmlich, die negative Elektrode scheint stärker zu erglühen und die Kohlentheilchen verbrennen nicht mehr vollständig, sondern schlagen sich massenhaft an der Kathode nieder. Die so sehr verringerte Spannung ganz kurzer Lichtbögen erklärt es wohl, dass man mit Batterien, welche die Minimalspannung nicht besitzen, Bogenlichter herstellen kann.

Das folgende Experiment wurde angestellt, um den Einfluss, welchen sehr bedeutende Temperaturschwankungen auf die Klemmspannung haben, zu studiren, es gestaltete sich aber in der That zu einem Experiment über zischende Lichtbogenentladungen. Eine Scheibe aus Retortenkohle von 15 cm Durchmesser wurde auf einen Rotationsapparat aufgesetzt und bildete die eine Elektrode des Lichtbogens, während ihr in einiger Entfernung vom Rande und zur Scheibenebene senkrecht ein Stift aus gleichem Material als zweite Elektrode gegenüberstand. Da der Lichtbogen bei Anwendung des Batteriestromes nur sehr schwer und unter unausgesetztem Zischen brannte und selbst für mässige Bogenlängen gegen 10 Ampère erforderlich waren, gestattete Herr Křižik die Benutzung einer Dynamomaschine von ungefähr 100 Volt. Klemmspannung. Auch schwache Maschinenströme von 7 oder 9 Ampère unterhielten jetzt den Lichtbogen, der offenbar im Falle des Erlöschens durch den Extrastrom der Maschine immer wieder angezündet wurde. Wenn der Stift den positiven und die darunter befindliche Scheibe den negativen Pol bildete, so brachte eine Rotation der letzteren den Lichtbogen sofort zum Erlöschen, bei ganz langsamer Bewegung gelang es, den Lichtbogen schief in die Länge zu ziehen, derselbe stellte sich hernach in kleinen ruckweisen Bewegungen

vertical. Wenn der Lichtbogen einmal erloschen ist, kann er demnach von der positiven Elektrode aus nicht wieder angezündet werden. Das Verhalten bei schwachen und starken Strömen war das nämliche, und da ich nicht im Stande war, Längenmessungen vorzunehmen, wurde dieses Experiment nicht weiter verfolgt.

Nun wurde unter die Scheibe als positiven Pol der Stift als negativer gestellt. Schon bei Strömen von 7 oder 9 Ampère brannte der Lichtbogen auch dann, wenn die Scheibe rotirte, ganz ruhig fort und zischte dabei nach wie vor. Bei 27 Ampère konnte die Scheibe rasch rotiren, die negative Elektrode schien dabei ungleich heller zu glühen als die positive, der Lichtbogen prasselte und es erschienen getrennte glühende Marken auf der Scheibe, welche nacheinander die Ausgangspunkte für den Lichtbogen gebildet hatten und die bald wieder verschwanden. Wenn man die Scheibe später ansah, so zeigte sie lauter abgegrenzte Kreise von etwa 1 mm Durchmesser. Bei 33 Ampère und noch rascherer Rotation waren diese glühenden Marken nicht mehr scharf getrennt sichtbar, es zeigte sich ein breiter glühender Streifen und der Ton des Lichtbogens glich dem Sausen einer Influenzmaschine.

Bei diesen Versuchen wurde demnach der infolge der Rotation erloschene Lichtbogen immer nur von der negativen Elektrode aus entzündet. Ich werde im folgenden nachweisen, dass die Elektricität beim Uebergange von der positiven Elektrode in den Lichtbogen einen enormen Potentialsprung durchzumachen hat; falls dieser Potentialsprung einer elektromotorischen Gegenkraft und nicht einem Uebergangswiderstande zuzuschreiben ist, liegt die Erklärung für das verschiedene Verhalten der beiden Elektroden nahe.

Wenn infolge der Bewegung der Zusammenhang zwischen dem Lichtbogen und der heissesten Stelle der positiven Elektrode, an welcher der Strom eintritt, gelöst wird, so herrscht zwischen den übrigen Stellen dieser Elektrode und den heissen Gasen die volle Spannung der Batterie; führt man umgekehrt die Austrittsstelle des Stromes an der negativen Elektrode unter dem Lichtbogen hinweg, so steht der Ladung desselben von der positiven Elektrode aus die volle Gegenkraft des Lichtbogens entgegen und es besteht zwischen dem Lichtbogen und der negativen Elektrode nur die um 40 Volt. verminderte Spannung der Batterie. Im ersten Falle schlägt die Elektricität durch, im zweiten nicht. Auch die grosse Beweglichkeit des Lichtbogens an der positiven Elektrode, welche den Elektrotechniker zur Einführung von Dochten zwingt, würde in dieser Weise erklärbar sein.

Aus dem blossen Umstande, dass der Lichtbogen in diesem und noch so manchem anderen Falle sichtlich intermittirt, kann noch nicht geschlossen werden, dass er überhaupt eine intermittirende Er-

scheinung sei. Derartiges dürfte sich wohl zunächst in einer Verschiedenheit der Spannungsverhältnisse äussern, wenn man den Lichtbogen durch Maschinen oder durch Batterien speist. Man könnte auch die Frage in der Weise erledigen, dass man den Strom eines ruhig brennenden Lichtbogens durch eine starke Spule gehen lässt und die inducirende Wirkung derselben auf eine zweite umhüllende Spule dynamometrisch untersucht.

Was die bei den Messungen mit der Kohlenscheibe wahrgenommenen Spannungen betrifft, so war der Unterschied zwischen den zischenden und den ruhig brennenden Lichtbögen ein sehr bedeutender. Geräuschloses Brennen kam nur selten vor, die dabei auftretenden Spannungen dürften dieselben sein, wie sie zwischen Stiften am normalen Lichtbogen beobachtet werden, sowie aber das Zischen begann, sank die Spannung um ein Viertel ihres Werthes. Es wurden mit der Scheibe als positiver Elektrode je drei Beobachtungen bei 12 und bei 30 Ampère angestellt, bei den ersten sank der Strom im Mittel von 47,7 auf 36,8, bei den letzteren von 43,8 auf 33,8 Volt. Wurde nun die Scheibe in Rotation versetzt, so sank die Klemmspannung um weitere 3—5 Volt., dieser Rückgang trat bei den stärksten Strömen in etwas geringerem Maasse hervor.

Aus diesem Sinken der Spannung infolge der Bewegung darf angesichts des starken Einflusses, den ein verändertes Brennen hat, noch keine Verminderung der Spannung mit dem Sinken der Temperatur der positiven Elektrode gefolgert werden. Alle erwähnten Erscheinungen konnten auch bei Anwendung des Batteriestromes wahrgenommen werden, nur war, wie gesagt, die Beobachtung durch das fortwährende Erlöschen des Lichtbogens sehr erschwert.

Um auf einem anderen Wege möglicher Weise zu einem sicheren Aufschluss über den Einfluss der Temperatur der Elektroden zu gelangen, wurden Messungen mit Eisenstäben von verschiedener Dicke angestellt. Dabei befand sich der positive Pol immer über dem negativen, er trug eine stark gewölbte Kuppe von flüssigem Oxyd, während sich die Oxydkuppe an der negativen abplattete.

Zunächst gebe ich zwei Beobachtungsreihen, die bei zwei verschiedenen Stromstärken mit Eisenstäben von 10 mm Dicke gewonnen wurden. Ich muss vorausschicken, dass die Längenmessungen in beiden Fällen nicht in ganz gleicher Weise vorgenommen wurden. Im ersten Falle ($i = 9{,}3$ Ampère) wurde der Abstand der geschmolzenen Kuppen als Bogenlänge aufgefasst. Im zweiten Falle ($i = 4{,}9$ Ampère) erglühte die negative Elektrode nicht im ganzen Querschnitte und ich musste die positive Elektrode etwas seitlich stellen, dabei schmolz die negative Elektrode schief ab und das Ende des Lichtbogens wurde

als heller Fleck im projicirten Bilde sichtbar, der Abstand dieses Fleckes von der positiven Kuppe wurde als Bogenlänge aufgefasst. Es musste natürlich darauf geachtet werden, dass der Lichtbogen vertical stand, und dass die helle Eintrittsstelle des positiven Stromes in den Lichtbogen, welche sich an der negativen Elektrode spiegelte, nicht mit dem negativen Fusspunkte des Bogens verwechselt werde. Diese Verschiedenheit in der Art der Messung der Bogenlänge führt jedenfalls nur Abweichungen ein, die weit innerhalb der wahrscheinlichen Fehler liegen; dies gilt auch für alle übrigen Messungsreihen, in welchen Schiefstellung der positiven Elektrode angewendet werden musste.

Die Klemmspannungen und Bogenlängen wurden immer abwechselnd beobachtet, vier Bogenlängen mit drei zugehörigen Klemmspannungen wurden in ein Glied der Reihe vereinigt. Am Anfange und am Ende jedes solchen Beobachtungssatzes wurde die Stromstärke abgelesen. Es wurde darauf geachtet, dass die Stromstärke bei grossen und kleinen Bogenlängen immer möglichst genau dieselbe war. Die Bogenlängen wurden immer abwechselnd grösser und kleiner genommen.

1. Stromstärke 9,3 Ampère. Die positive und negative Elektrode haben 10 mm Dicke.

$K = 27{,}61 + 1{,}62\,L$ (Volt.)

L	K beobachtet	K berechnet	δ
2,33	31,6	31,4	+0,2
3,70	33,3	33,6	−0,3
4,77	35,4	35,4	—
5,72	36,6	36,9	−0,3
7,90	41,0	40,4	+0,6
9,75	43,2	43,5	−0,3

2. Stromstärke 4,9 Ampère. Die positive und negative Elektrode haben 10 mm Dicke.

$K = 27{,}35 + 2{,}16\,L$ (Volt.)

L	K beobachtet	K berechnet	δ
2,60	33,9	32,96	+0,94
2,93	33,0	33,67	−0,67
3,65	36,1	35,22	+0,88
3,97	35,6	35,92	−0,32
4,03	34,9	36,04	−1,14
4,15	35,7	36,40	−0,70
4,43	37,3	36,90	+0,40
5,60	39,1	39,43	−0,32
5,74	40,6	39,74	+0,86
6,07	40,4	40,44	−0,04

Die grossen Abweichungen in der zweiten Reihe, welche zeigen, wie sehr die Unsicherheit der Messung bei geringen Stromstärken erhöht ist, lassen die Uebereinstimmungen in den Minimalspannungen der beiden Reihen als reinen Zufall erscheinen. Dass aber auch beim Eisen die Spannungen bei grösseren Stromstärken geringer sind als bei kleineren, lässt sich mit Sicherheit ersehen.

3. Die positive Elektrode wurde auf 5 mm abgedreht, die negative hat 10 mm Durchmesser. Mittlere Stromstärke 6,8 Ampère, Minimalspannung $a = 27{,}68 \pm 0{,}43$ V., Spannungszunahme pro Scalentheil $b = 2{,}07 \pm 0{,}10$ V.

L	K beobachtet	K berechnet	δ
1,80	31,8	31,40	+0,40
2,32	32,6	32,49	+0,11
2,47	32,8	32,80	—
2,50	33,6	32,86	+0,74
3,50	35,0	34,92	+0,08
3,69	33,9	35,13	−1,23
4,10	35,7	36,17	−0,40
4,15	36,4	36,27	+0,13
4,27	36,1	36,51	−0,41
4,42	36,3	36,82	−0,52
4,70	38,0	37,41	+0,59
5,10	38,7	38,25	+0,45
6,25	40,6	40,62	−0,02
6,97	42,4	42,10	+0,30

Der Abkürzung halber theile ich von den folgenden Versuchsreihen immer nur das Gesammtergebnis mit.

4. Die negative Elektrode hat 5, die positive 10 mm Durchmesser. Mittlere Stromstärke 6,6 Ampère.

$$a = 25{,}99 \pm 0{,}37 \text{ V.}$$
$$b = 2{,}17 \pm 0{,}08 \text{ V.}$$

Zur Berechnung wurden zwölf Beobachtungssätze in sechs Normalorte vereinigt.

Nun folgen die Ergebnisse von drei Versuchsreihen, bei denen beide Elektroden auf eine Dicke von 5 mm abgedreht waren. Reihe 5 ist aus sechs Beobachtungssätzen gewonnen, bei den Reihen 6 und 7 wurden je zehn Beobachtungssätze in je fünf Normalorte vereinigt.

5. $a = 26{,}75 \pm 0{,}93$ V.
$b = 2{,}10 \pm 0{,}26$ V.
Stromstärke 6,4 Ampère.

6. $a = 25{,}57 \pm 0{,}73$ V.
$b = 2{,}17 \pm 0{,}16$ V.
Stromstärke 6,7 Ampère.

7. $a = 26{,}93 \pm 0{,}35$ V.
$b = 2{,}04 \pm 0{,}09$ V.
Stromstärke 6,8 Ampère.

Gerade in den letzten drei Reihen dürften die wahrscheinlichen Fehler wegen der geringen Zahl der Normalorte etwas zu klein erhalten worden sein. Angesichts der Art, wie in diesen drei Reihen die gewonnenen Constanten a und b schwanken, muss ich die Abweichungen Beobachtungsfehlern und nicht Schwankungen der beobachteten Grösse zuschreiben. Ich wage nicht zu behaupten, dass in den Reihen 3 und 4 die Abweichung der Minimalspannungen von den Dimensionen der Stifte herrühre. Die Uebereinstimmung der hier ermittelten Werthe für die Minimalspannung mit dem Werthe $a = 25{,}03 \pm 2{,}16$ V., welchen V. v. Lang[1]) erhielt, ist recht befriedigend, aber die Zunahme der Spannung pro Millimeter scheint bei jenen Messungen kleiner gewesen zu sein als bei mir. Jedenfalls ist der Einfluss der Stabdicke bei Eisen, wenn überhaupt vorhanden, nur gering und ein Gleiches wird von allen übrigen Metallen gelten. Ich muss erwähnen, dass eine Beobachtungsreihe von nur sechs Punkten, welche stark voneinander abwichen und noch dazu ziemlich nahe beisammen lagen, gar nicht zur Berechnung herangezogen wurde, da das Ergebnis gegenüber den anderen Messungen ja doch nur verschwindendes Gewicht gehabt hätte; niemals wurden einzelne Beobachtungen aus einer Versuchsreihe wegen ihrer Abweichungen unterdrückt. Es wurde noch unter Anwendung des Batteriestromes ein Versuch angestellt, bei welchem eine Eisenscheibe einem 5 mm starken Eisenstifte gegenüberstand, der Lichtbogen vermochte bei Rotation der Scheibe zu brennen, ob dieselbe nun positiv war oder nicht; er wurde dabei schief in die Länge gezogen und infolgedessen stieg die Spannungsdifferenz. Wenn sich am Eisenstifte noch keine Oxydkuppe gebildet hatte und die gegenüberliegende Stelle der Scheibe ebenfalls blank war, brannte der Lichtbogen ziemlich unstät und die Spannung war nicht unerheblich vermindert. Ich beobachtete 19,9 und 20,8 Volt., wenn die Scheibe negativ war und 20,5 und 20,6, wenn die Scheibe positiv war, also Spannungen, die erheblich unter der Minimalspannung des Lichtbogens lagen. Da flüssige Oxyde gut leiten, kann die geringe Spannung nicht dem Fortfall der ja doch nur ein paar Millimeter hohen Oxydkuppe zugeschrieben werden.

Um in sicherer Weise festzustellen, wie die Arbeitsleistung im Lichtbogen vertheilt ist, versuchte ich schliesslich noch das Potential

1) Wiener Sitzungsber. Bd. 95 S. 84 (1887).

der Lichtbogengase mit dem der Elektroden zu vergleichen. Wenn z. B. der Lichtbogen eine wesentlich discontinuirliche Erscheinung wäre und der Strom die Unterbrechungen an der negativen Elektrode erleiden würde[1]), so liesse sich erwarten, dass das Potential der Bogengase dem der positiven Elektrode näher steht als dem der negativen; bei Peltier'schen Effecten wären Potentialsprünge an beiden Elektroden zu erwarten.

Im Nebenschluss zum Lichtbogen waren zwei hintereinander geschaltete, mit Zinkvitriol gefüllte Rohre angebracht, in welche der Strom durch amalgamirte Zinkplatten ein- und austrat. Das eine mit der positiven Elektrode verbundene Rohr hatte eine constante Länge von 15 cm, daran schloss sich das zweite von gleichem Querschnitt und variabler Länge, dessen Ende mit der negativen Elektrode verbunden war. Die Verbindungsstelle der beiden Rohre, deren Potential durch Ausziehen und Verkürzen des variablen Rohres beliebig gehoben und gesenkt werden konnte, war durch einen Multiplicator von 20,000 Windungen mit einem 5 mm starken Kohlenstift in Verbindung, den die aufsteigenden Flammengase des horizontal gestellten Lichtbogens bestrichen. Wenn das Galvanometer auf Null gebracht war, so war das Verhältnis der Rohrlängen A und B gleich dem Verhältnisse des Potentialunterschiedes zwischen der positiven Kohle und dem Probirstift einerseits und der negativen Elektrode und dem Probirstift andrerseits.

Bei Anwendung von reinen Kohlenstiften und auch dann, wenn in den Lichtbogen Soda gebracht wurde, war die Empfindlichkeit der Aufstellung eine geradezu übertriebene, eine eigentliche freie Ruhelage der Multiplicatornadel gab es nicht und bei geringen Längenänderungen am variablen Brückenzweige wurde die Nadel von der einen der bei 15° angebrachten Hemmungen zur anderen geschleudert.

Das Verhältnis

$$\frac{A-B}{A+B}$$

liefert, mit der am Lichtbogen beobachteten Spannung K multiplicirt, den Betrag E, um welchen die Spannungsdifferenz zwischen der positiven Elektrode und dem Probirstift grösser ist, als die Spannungsdifferenz zwischen Probirstift und negativer Elektrode.

Bei der ersten der folgenden Versuchsreihen brannte der Lichtbogen zwischen reinen Elektroden aus Siemens'scher Kohle mit

1) Wenn ich den Inhalt einer in Nr. 11 Jahrgang 1887 enthaltenen Mittheilung des akadem. Anzeigers recht verstehe, so ist Herr E. Lecher in seiner Arbeit zu diesem Schlusse gelangt.

6,8 Ampère, bei der zweiten, bei welcher Soda auf die Elektroden gestreut worden war, mit 8,9 Ampère.

Reihe 1.		Reihe 2.		
K	E	K	E	l
39,8	25,9	17,9	0,43	2,9
42,5	27,1	19,4	1,76	3,0
46,3	26,9	20,0	0,69	3,9
48,7	32,2	21,4	3,77	4,0
49,3	31,0	22,6	2,89	5,0
51,7	33,3	28,0	7,00	6,8
52,7	32,9			
57,7	34,6			

In Reihe 2 wurde die Länge l nach jedem Versuche ganz roh mit einem Maassstabe in Millimetern bestimmt.

Es besteht demnach eine bedeutende Einseitigkeit in der Vertheilung des Potentials im Lichtbogen, welche bei reinen Kohlenstiften viel bedeutender ist, als bei salzbestreuten. Wenn man diese Thatsache mit der starken Erwärmung an der positiven Kohle und mit dem Gesetze zwischen Bogenlängen und Spannung zusammenhält, so muss man folgern, dass das Potential nicht etwa im Lichtbogen an der Seite der positiven Elektrode stärker abfällt, sondern dass bei reinen Elektroden zwischen dem Lichtbogen und der positiven Elektrode ein enormer Potentialsprung auftritt, der durch Einstreuen von Salz unter gleichzeitigem Sinken der Spannungsdifferenz der Elektroden erheblich herabgemindert wird. Unverkennbar sinkt die gemessene Einseitigkeit bei Abnahme der Bogenlänge; als in einem Falle bei reinen Kohlenelektroden die negative Elektrodenspitze vom Krater der positiven ganz umgeben war und die Spannung infolgedessen nur 35,5 Volt. betrug, war nur eine Einseitigkeit von 18,8 Volt. wahrzunehmen.

Es lässt sich vermuthen, dass bei sehr langen Lichtbögen die volle Minimalspannung erreichbar wäre; dass dies bei kürzeren Bögen, bei welchen die Messung geringere Empfindlichkeit hat, nicht der Fall ist, dürfte einer Ladung der abfliessenden Bogengase durch die positive Elektrode zuzuschreiben sein; für den positiven Pol ist der Uebergangswiderstand in eine Flamme ohnedies immer kleiner als für den negativen. Wenn der Probestift nicht genau über der Mitte des Lichtbogens, sondern der einen der beiden Elektroden näher oder ganz über derselben steht, so ändert sich natürlich sein Potential, doch ist diese Aenderung geringfügig, ganz im Einklang damit, dass das Potentialgefälle im Lichtbogen selbst nur einen geringen Theil der Spannungs-

differenz an den Elektroden ausmacht. Der analoge Versuch mit Eisenelektroden blieb resultatlos, da die Empfindlichkeit der Aufstellung auch dann nicht ausreichte, wenn sich Lichtbogen und Probirstift innerhalb einer Bunsenflamme befanden.

In welchem Maasse der Potentialsprung an der positiven Elektrode durch eine Gegenkraft verursacht wird, kann wohl nur durch Beobachtung des Edlund'schen Disjunctionsstromes entschieden werden. Experimente, welche ich in dieser Hinsicht vorhatte, konnten leider bei der Kürze der zur Verfügung stehenden Zeit nicht mehr ausgeführt werden; ich gedenke den Gegenstand wieder aufzunehmen, so wie sich Gelegenheit bietet.

Bestimmungen der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten [1]).

Von

Theodor Wähner.

Quincke hat im 24. Bande der Wiedemann'schen Annalen [2]) eine Reihe von Untersuchungen über die in magnetisirten Flüssigkeiten auftretenden Druckkräfte mitgetheilt, von welchen eine Art zur Bestimmung der Magnetisirungszahlen der Flüssigkeiten besonders geeignet ist. Die Anordnung ist folgende.

Der enge Schenkel einer *U*-förmigen Röhre, welche die zu untersuchende Flüssigkeit enthält, ist vertical zwischen die Pole eines Elektromagnets gestellt, der weite Schenkel befindet sich ausserhalb der Pole an einer Stelle, wo auch beim Erregen des Magnets die magnetische Kraft nahezu gleich Null bleibt. Wird der Elektromagnet erregt, so wird eine magnetische Flüssigkeit in das magnetische Feld hineingezogen, sie erhebt sich in dem engen Schenkel der Röhre, bis das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit dem magnetischen Zuge das Gleichgewicht hält. Dieser Zug hat den Werth

$$\frac{1}{2} k H_1^2,$$

wenn k die Magnetisirungszahl der Flüssigkeit und H_1 die für alle Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit gleich angenommene Intensität des magnetischen Feldes bedeutet. Die Höhe h der gehobenen Flüssigkeitssäule ist daher durch die Gleichung

$$h \sigma g = \frac{1}{2} k H_1^2 \qquad (1$$

bestimmt. σ bedeutet die Dichte der Flüssigkeit, g die Beschleunigung der Schwere. Diese Gleichung kann, wie Adler [3]) gezeigt hat, auch

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 96 S. 85 (1887).

2) Quincke, Wied. Ann. Bd. 24 S. 347.

3) Adler, Ueber die Energie magnetisch-polarisirter Körper etc. Wiener Sitzungsber. Bd. 92 II. Abth. 1440.

aus dem Ausdrucke für die Energie eines magnetisirten Systems nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen abgeleitet werden.

Zu bemerken ist, dass auch die über der Flüssigkeit befindliche Luft unter einem Zuge

$$\frac{1}{2} k_0 H_1^2$$

steht, wenn k_0 die Magnetisirungszahl der Luft bedeutet. Der Druck, den die Luft auf die Flüssigkeit im magnetischen Felde ausübt, ist also um diesen Betrag grösser als der Druck der Luft auf die Flüssigkeit ausserhalb des Feldes. In der Gl. 1 ist also eigentlich $k - k_0$ statt k zu setzen. Im folgenden wird jedoch immer die Gl. 1 angewendet. Aus den daraus abgeleiteten k findet man die wahren Werthe derselben durch Addition von k_0. Es ist

$$k_0 \cdot 10^6 = 0{,}021.$$

Quincke hat statt der Gl. 1 die Gleichung

$$h\sigma = \mathfrak{k} H_1^2$$

angesetzt und aus seinen Versuchen die Werthe der Coefficienten $\mathfrak{k}$ abgeleitet. Er hat dieselben auch mit denjenigen Werthen verglichen, welche Schuhmeister[1]) auf einem ganz anderen Wege für die Magnetisirungszahlen einiger Flüssigkeiten gefunden hat. Daraus, dass letztere ungefähr g mal so gross sind, als die von ihm selbst erhaltenen, hat Quincke geschlossen, dass die Bestimmungen Schuhmeister's mit seinen in Uebereinstimmung stehen. Aus dem obigen ist aber zu ersehen, dass diese Uebereinstimmung nicht vorhanden ist, da die Magnetisirungszahlen nicht mit g, sondern mit $2g$ multiplicirt die Coefficienten von Quincke geben.

Aus diesem Anlasse habe ich im Vereine mit Herrn L. Kusminsky über Anregung des Herrn Hofrathes Stefan, unter dessen Leitung auch die Versuche von Schuhmeister ausgeführt und berechnet worden sind, im vorigen Jahre die Lösungen von Salzen der Eisengruppe (Eisen, Mangan, Cobalt, Nickel) bezüglich ihres magnetischen Verhaltens nach Quincke's Methode untersucht. Es wurde jedes k für drei verschiedene Feldstärken von 5000 bis 10000 absoluten Einheiten (cm g sec.) bestimmt.

Die drei Werthe kamen einander ziemlich nahe; jedoch war in ungefähr doppelt so viel Fällen ein Sinken, als ein Steigen bei steigender Feldstärke wahrzunehmen; selbst ein und dieselbe Flüssigkeit zeigte dieses verschiedene Verhalten, so dass man nicht mit Sicherheit

1) Schuhmeister, Bestimmung magnetischer Constanten. Wiener Sitzungsber. Bd. 83 II. Abth. 46.

schliessen kann, ob wirklich bei zunehmender Feldstärke eine Abnahme der Grösse von k eintritt, sondern weit eher annehmen muss, dass die kleinen Abweichungen den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben sind.

Ohne für jetzt auf die Anordnung der Versuche näher einzugehen, welche ich anlässlich der folgenden Versuchsreihe erörtern werde, will ich nur die Mittelwerthe der aus unseren Messungen erhaltenen Constanten $\mathfrak{k}$ und k für die einzelnen Lösungen angeben. Unter σ stehen die specifischen Gewichte der Lösungen; letztere waren sorgfältig hergestellt und filtrirt worden, die Salze waren als chemisch rein aus der Fabrik der Herren Wirth und Comp. in Wien bezogen.

	σ	$\mathfrak{k} \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^6$
Eisenchlorid in Wasser	1,2555	84,21	16,521
	1,0996	35,84	7,028
Eisenchlorid in Methylalkohol	0,9787	35,43	6,948
	0,9158	21,83	4,280
Eisensulfat in Wasser	1,1865	31,57	6,197
	1,1054	27,67	5,432
Manganchlorid in Wasser	1,1819	79,60	15,618
	1,0837	37,71	7,398
Manganchlorid in Methylakohol	0,9468	30,32	5,947
	0,9051	19,96	3,920
Mangansulfat in Wasser	1,1455	45,16	8,864
	1,0963	31,32	6,143
Kobaltchlorid in Wasser	1,0790	16,26	3,194
	1,0538	13,54	2,653
Kobaltchlorid in Methylalkohol	0,9539	17,54	3,438
	0,9085	11,03	2,161
Kobaltsulfat in Wasser	1,1616	27,91	5,475
	1,0850	15,57	3,058
Kobaltnitrat in Wasser	1,1401	23,39	4,590
	1,0788	15,22	2,984
Kobaltnitrat in Methylalkohol	0,9868	20,12	3,946
	0,9349	14,04	2,751
Nickelchlorid in Wasser	1,1213	9,98	1,958
	1,0581	3,79	0,744
Nickelchlorid in Methylalkohol	1,0015	10,72	2,101
	0,9276	5,92	1,162
Nickelsulfat in Wasser	1,1785	9,63	1,889
	1,1155	9,02	1,770

Vergleicht man die Werthe von $\mathfrak{k}$ mit den von Quincke gefundenen [1]), so zeigt sich, dass letztere durchwegs beträchtlich grösser

1) Quincke, a. a. O. S. 385.

sind, ja in den meisten Fällen nahezu doppelt so gross. (Um auch Lösungen verschiedenen specifischen Gewichtes ungefähr miteinander vergleichen zu können, kann man von der Näherungsformel Gebrauch machen:

$$k_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma} k_1,$$

wenn k_2 und k_1 die Magnetisirungszahlen zweier Lösungen vom specifischen Gewichte σ_2 und σ_1 bedeuten, σ das specifische Gewicht des Lösungsmittels. Die Giltigkeit dieser Formel setzt voraus, dass die Magnetisirungszahl k des Lösungsmittels und der Contractionscoefficient vernachlässigt werden können gegenüber den Grössen k_2 und k_1.)

Um jedoch noch verlässlichere Zahlen wenigstens für die von Schuhmeister untersuchten Flüssigkeiten zu erhalten, haben vor kurzem Herr L. Kusminsky und ich eine neue Reihe von Versuchen nach Quincke's Methode angestellt. Die Windungsfläche des bei den früheren Versuchen zur Bestimmung des magnetischen Feldes verwendeten Erdinductors war klein und konnte nicht direct gemessen, sondern musste nach der Kohlrausch'schen Methode durch Wirkung in die Ferne [1]) bestimmt werden. Nunmehr stand uns ein ausgezeichnetes Instrument zur Verfügung, dessen sehr grosse Windungsfläche völlig genau berechnet werden konnte.

Die Anordnung des Versuches war folgende: Der Strom von sieben Grove, welcher durch ein Galvanometer mit Ringmagnet und Ablesespiegel und durch ein Rheochord geleitet wurde, magnetisirte einen kräftigen Elektromagnet mit senkrecht gestellten Schenkeln. Auf letztere waren zwei würfelförmige Anker aus weichem Eisen aufgesetzt, welche in der Mitte ihrer Höhe in horizontalen Durchbohrungen verschiebbare Cylinder aus weichem Eisen trugen, die durch Schrauben festgeklemmt wurden und an den einander zugekehrten Enden flach abgeschliffen waren. Die beiden Polflächen wurden etwa 4 mm voneinander entfernt aufgestellt; ihr Durchmesser betrug etwa 2,5 cm. Zwischen den beiden Ankern war ein Querbalken aus hartem Holz angebracht, welcher einerseits dazu bestimmt war, eine Verschiebung der beiden Anker zu verhindern, andrerseits aber ein mit einer Mikrometerschraube versehenes Ablesemikroskop trug, an deren Kopf Hundertel und mittels eines Nonius Tausendtel der Umdrehungen abgelesen werden konnten.

Die Höhe t eines Schraubenganges wurde durch Einstellung des Mikroskopes auf die Theilstriche eines vertical gestellten sehr feinen

1) Kohlrausch, Wied. Ann. Bd. 18 S. 513.

Maassstabes nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt und ergab:

$$t = 0{,}04296 \text{ cm}.$$

Die U-förmigen Röhren konnten durch eine passende Vorrichtung so aufgestellt werden, dass die beiden parallelen Schenkel, welche voneinander etwa 25—30 cm entfernt waren, vertical gerichtet waren, und dass der enge Schenkel, dessen innerer Durchmesser 0,224 cm war, durch die Mitte des Magnetfeldes ging. Durch das Ablesemikroskop wurden die Niveauunterschiede h' im engen Röhrchen bestimmt; jedem h' entspricht aber gleichzeitig ein entgegengesetzter Niveauunterschied δ in der weiten Röhre, wobei

$$qh' = Q\delta,$$

wenn q und Q die Querschnitte sind.

Und es ist der wirkliche Niveauunterschied zwischen beiden Röhren:

$$h = h' + \delta = h'\left(1 + \frac{q}{Q}\right).$$

Durch Quecksilbercalibrirung ergab sich das Verhältnis von q zu $Q = 0{,}0265$, also ist

$$h = h' \cdot 1{,}0265,$$

oder wenn n die Anzahl der Schraubenumdrehungen in ganzen und Bruchtheilen bedeutet:

$$h = n \cdot 0{,}04296 \cdot 1{,}0265 = n \cdot 0{,}04410.$$

Die Zahl n wurde immer aus mindestens vier Beobachtungen als Mittelwerth gewonnen, wobei das Fehlermaximum fünf Hundertel einer Schraubendrehung fast nie überschritt.

Unter f ist in der Tabelle zu jeder „Steighöhe" der mittlere Beobachtungsfehler, gerechnet aus den Fehlerquadraten, angegeben.

Die Steighöhen sind die Unterschiede zwischen der Stellung der Flüssigkeitskuppe, während der Strom geschlossen war und während er unterbrochen war; und zwar wurde die erstere Ablesung immer zuerst gemacht, damit die Flüssigkeitskuppe wirklich in die Mitte des magnetischen Feldes gebracht werden konnte. Bezeichnen wir die Intensität des magnetischen Feldes bei geschlossenem Strome mit H_1, bei unterbrochenem mit H_0, so ist

$$\sigma h = \mathfrak{k}(H_1^2 - H_0^2),$$

woraus, da der remanente Magnetismus H_0 sehr klein ist gegenüber H_1:

$$\mathfrak{k} = \frac{\sigma h}{H_1^2}\left(1 + \left[\frac{H_0}{H_1}\right]^2\right). \qquad (2$$

Zur Bestimmung des magnetischen Feldes diente eine flache Spirale von der Windungsfläche f, welche zwischen die beiden Pole so

eingestellt wurde, dass ihre Achse die Richtung der Kraftlinien hatte, und welche senkrecht zu dieser Richtung rasch in grosse Entfernung verschoben werden konnte. Sie war mit einem Erdinductor von der Windungsfläche F, dessen Achse die Richtung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus hatte, und mit einer Wiedemann'schen Bussole in eine geschlossene Stromleitung eingeschaltet.

Die beiden letzteren Instrumente waren im Nebenzimmer aufgestellt und so weit voneinander entfernt, dass directe Wirkungen nicht wahrgenommen werden konnten.

Wird der Erdinductor um einen verticalen Durchmesser um 180° gedreht, sodass seine Fläche F vor und nach der Drehung senkrecht zum magnetischen Meridian steht, so ertheilt der Inductionsstrom der Galvanometernadel einen ersten Ausschlag α. Wird dann die flache Spirale f aus dem magnetischen Felde H_1 in hinreichend grosse Entfernung verschoben, so macht die Galvanometernadel einen ersten Ausschlag α_1. Bedeutet H die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, so verhält sich α zu α_1 wie $2FH$ zu fH_1, es ist also

$$H_1 = \frac{2FH}{f} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha}. \qquad (3$$

Die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus wurde durch genaue Schwingungsdauer- und Ablenkungs-Beobachtungen an der Stelle, an welcher der Erdinductor aufgestellt war, mehrfach bestimmt, und es war

$$H = 0{,}1944 \text{ (cm g sec)}.$$

Der Erdinductor ist mit einer Vorrichtung versehen, welche den Holzring, der die kreisförmigen Wickelungen trägt, in den beiden Grenzlagen fixirt und ein Zurückschnellen desselben unmöglich macht, sodass die Drehung präcise um 180° geschieht. Die Dimensionen können direct gemessen werden, und es ergibt sich seine Windungsfläche:

$$F = 892239 \text{ qcm}.$$

Die kleine Inductionsspirale f wurde auf folgende Weise hergestellt: Ein Ebonitscheibchen von etwa $^1/_4$ cm Dicke und 0,9147 cm Durchmesser wurde zwischen zwei Glimmerblättchen gekittet und in einer Holzklemme festgeklemmt; der sehr dünne, mit Seide übersponnene Kupferdraht wurde darauf in möglichst regelmässigen Lagen aus freier Hand um das Scheibchen gewickelt und zwar in sechs Lagen zu 8, 8, 8, 6, 8 und 7 Windungen. Der äussere Durchmesser dieser kleinen Rolle betrug im Mittel 1,350 cm.

Ist die Anzahl der kreisförmigen Wicklungen in den aufeinanderfolgenden m Lagen einer Rolle bezüglich $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$, r_0 der innerste Radius, d die Dicke des Ringes, so ist die Fläche

$$f = (nr_0^2 + 2qr_0d + sd^2)\pi;$$

dabei ist

$$n = a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_{m-1}$$

$$q = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_2 + \ldots (m-1)\, a_{m-1}}{m}$$

$$s = \frac{a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \ldots (m-1)^2 a_{m-1}}{m^2}.$$

Die Rechnung ergibt

$$f = 42{,}56 \text{ qcm}.$$

(Die Drahtlänge wäre: $l = [nr_0 + qd]\, 2\pi = 154{,}13$ cm. Durch Messen der Drahtlänge vor dem Wickeln und der Länge der beiden übrig bleibenden Enden hatte sich ergeben: $l = 152$ cm. Nach Abschluss der Versuchsreihe wurde die Rolle wieder abgewickelt, und es zeigte sich l nun noch grösser als 154 cm; es ist dies wohl durch die Zerrung des Drahtes beim Auf- und Abwickeln zu erklären. Daraus ist ersichtlich, wie misslich es ist, aus vor der Wickelung gemessenen Drahtlängen einen Schluss auf die Grösse der Windungsfläche zu ziehen.)

Es dürfte dies wohl eine hinreichend genaue Bestimmung von f sein. Versuche, so kleine Windungsflächen nach der Kohlrausch'schen Methode durch Wirkung in die Ferne zu bestimmen, wie es Quincke gethan hat, haben allzu divergirende Resultate ergeben, als dass sie mit Sicherheit hätten verwendet werden können.

Die beiden Enden des Drahtes der kleinen Spule wurden um einander gedreht, durch eine etwa 40 cm lange Glasröhre geführt und an die Enden der Leitung gelöthet. Die Glimmerblättchen wurden an das Ende der Glasröhre angekittet; das andere Ende der Röhre wurde in eine Messinghülse gekittet, die um eine Queraxe drehbar war; dadurch wurde es möglich, die Spule sehr rasch senkrecht zu den Kraftlinien aus dem magnetischen Felde herauszuführen längs eines Kreisbogens von mehr als 90° und von 40 cm Radius, also sicher weit genug, dass am Endpunkte das Potential des magnetischen Feldes = 0 angenommen werden durfte.

Setzen wir die gefundenen Zahlen in die Gl. 3 ein, so ergibt sich:

$$H_1 = 8152 \frac{\alpha_1}{\alpha}.$$

Das remanente Feld H_0 konnte immer gleich angenommen werden, und zwar im Mittel

$$H_0 = 279 \; (\alpha_1 = 0{,}40, \; \alpha = 11{,}70).$$

Der Ausschlag α wurde immer durch zwei entgegengesetzte Drehungen des Erdinductors bestimmt; die beiden Zahlen stimmten in der

Regel bis auf eine Einheit der zweiten Decimalstelle überein. Für α_1 wurden ebenfalls immer zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen gemacht, welche hinlänglich übereinstimmten (die Unterschiede waren 1 bis 4 Einheiten der zweiten Decimalstelle).

Die Untersuchung geschah nun in der Weise, dass zwischen zwei Bestimmungen der Feldintensität eine Reihe von Steighöhenbeobachtungen gemacht wurde. Gleichzeitig wurde die Intensität des primären Stromes an dem eingeschalteten Galvanometer beobachtet. Zeigte sich eine kleine Abnahme der Feldintensität, so wurde angenommen, dass dieselbe der Abnahme der Stromstärke proportional gewesen sei, und die zwischenliegenden Werthe wurden durch lineare Interpolation gefunden.

Das eingeschaltete Rheochord gestattete die Stromstärke und damit die Feldstärke beliebig zu verkleinern.

Auf diese Weise wurden die von Schuhmeister untersuchten Flüssigkeiten, nämlich Lösungen von Eisenchlorid in Wasser, ferner Wasser, Alkohol, Schwefelkohlenstoff und Aether bezüglich ihres magnetischen Verhaltens geprüft. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. In den beiden letzten Spalten sind die nach Gl. 2 berechneten Constanten $\mathfrak{k}$ und die daraus durch Multiplication mit $2g$ ($g = 980{,}8$) berechneten Magnetisirungszahlen k verzeichnet.

Flüssigkeit	σ	α	α_1	H_1	h	f	$\mathfrak{k} \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^6$
Eisenchloridlösung I . .	1,4345	11,70	12,415	8650	0,9997	12	191,9	37,63
„ „ . .	„	„	8,42	5867	0,4530	09	189,3	37,12
„ „ . .	„	14,115	4,68	2703	0,0953	24	189,1	37,09
„ II . .	1,3751	11,70	12,20	8500	0,8533	15	162,6	31,89
„ „ . .	„	„	8,42	5867	0,4016	07	160,8	31,55
„ III . .	1,3132	„	12,42	8653	0,7651	32	134,3	26,35
„ „ . .	„	„	8,42	5867	0,3494	05	133,6	26,21
„ IV . .	1,1640	„	12,371	8619	0,4250	12	66,66	13,08
„ „ . .	„	„	8,42	5867	0,1925	03	65,27	12,80
„ V . .	1,1325	„	12,29	8563	0,3367	12	52,07	10,21
„ „ . .	„	11,985	8,93	6074	0,16110	004	49,56	9,72
Wasser	0,9993	11,70	12,378	8624	— 0,02051	057	— 2,758	— 0,5411
„	„	„	8,42	5867	— 0,01014	013	— 2,951	— 0,5789
Alkohol	0,795	„	12,29	8563	— 0,01980	044	— 2,149	— 0,4216
„	„	11,985	8,93	6074	— 0,00948	022	— 2,047	— 0,4016
Schwefelkohlenstoff . .	1,270	„	12,71	8645	— 0,01499	008	— 2,550	— 0,5002
„	„	„	8,93	6074	— 0,00705	015	— 2,432	— 0,4771
Aether	0,730	11,70	12,29	8563	— 0,02058	101	— 2,051	— 0,4024
„	„	11,985	8,93	6074	— 0,00942	010	— 1,868	— 0,3664

Vergleicht man diese Zahlen mit den Mittelwerthen der von Quincke und der von Schuhmeister gefundenen Zahlen, so zeigt sich, dass unsere Zahlen etwas mehr als die Hälfte der von Quincke gefundenen betragen, dagegen mit den Schuhmeister'schen ziemlich gut übereinstimmen.

Flüssigkeit	Quincke's $t \cdot 10^{10}$	Schuhmeister's $k \cdot 10^6$
Eisenchlorid in Wasser . . . $\sigma = 1{,}5083$	330,8	—
„ „ „ . . . $\sigma = 1{,}388$	—	30,67
„ „ „ . . . $\sigma = 1{,}1395$	87,91	—
Wasser	— 4,270	— 0,481
Alkohol	— 3,484	— 0,414
Schwefelkohlenstoff	— 3,987	— 0,407
Aether	— 3,218	— 0,343

Zum Schlusse kann ich nicht umhin, dem Herrn Assistenten am physikalischen Institute, L. Kusminsky, welcher in der freundlichsten Weise an allen Untersuchungen theilnahm, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 17. April 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Hofrath Prof. Dr. E. v. Brücke hält einen Vortrag: „Ueber die optischen Eigenschaften des Tabaschir".

Herr Dr. G. Goldschmiedt spricht: „Ueber Papaverin".

Wien, 15. Mai 1888.

Der Secretär.

des elektrischen Nachrichtenwesens. Charles Tilston Bright. — Die Bestimmung des Widerstandes einer Erdleitung. — Das System van Rysselberghe in der Schweiz. — Die Verstaatlichung der Telegraphie in den Vereinigten Staaten von Nordamerika. — Messung des Widerstandes von Telegraphenleitungen. — Das Telephon als Empfänger für unterseeische Telegraphenlinien. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Elektrische Beleuchtung. Elektricitätswerke zu Darmstadt und Salzburg. — Verschiedenes. Deutsche Allgemeine Ausstellung für Unfallverhütung Berlin 1889. — Sprachlicher Unfug. — Wirkungen des Rauhfrostes. — Eigenthümliche elektrische Erscheinungen. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 19 enthält:

Rundschau. — **Ein Wort zur Kritik und zum Schutze der in der Praxis gebräuchlichen elektrischen Messapparate.** Von Prof. Dr. W. Kohlrausch in Hannover. — **Zur Theorie des Elektrometers.** Von C. Feldmann. — **Ueber den Glimmer als Dielektricum.** Von Dr. Ignaz Klemencic. (Schluss.) — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Telegraphie. Der Spektro-Telegraph. — Elektrische Beleuchtung. Die Ausschreibung der Anlage einer Beleuchtungscentrale in Frankfurt zum Wettbewerb. — Errichtung einer elektrischen Centralstation in Wien. — Verschiedenes. Veröffentlichung von Anträgen zur Frage der Revision der Patentgesetzgebung vom Verein deutscher Patentanwälte. — Verhandlungen der 28. Jahresversammlung des Deutschen Vereins von Gas- und Wasserfachmännern. — Hundertjährige Gedächtnisfeier der Entdeckung der galvanischen Elektricität durch Galvani zu Bologna. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, *Verlagsbuchhandlung.*

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte

Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a|7)

Verlag von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig.**

Taschenbuch für Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von Ingenieur **S. Freiherr v. Gaisberg.**

Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage.

klein 8. VIII und 128 Seiten. Preis gebunden 2 M. 40 Pf.

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Soeben erschienen:

Ueber den gegenwärtigen Stand

der

elektrischen Beleuchtung.

Bericht

an den Verein der Gas- und Wasserfachmänner Deutschlands

erstattet von

Dr. Schilling sen.

Octav. 45 Seiten. *Brochirt Preis 70 Pf.*

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(13a/7)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale

Elektrische Maasssystem

im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis M. 1.—.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdriefsen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden.“

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 8. Heftes.

Ueber absolute Maasssysteme. Von W. Winter. S. 471.
Beobachtungen über atmosphärische Elektricität. Von J. Elster und H. Geitel. S. 486.
Ueber die Verwendung des Mikrophons (Transmitters) bei elektrischen Widerstandsmessungen mit dem Telephon und über den Einfluss des Gesichtsorganes auf den Gehörsinn. Von Dr. B. Nebel. S. 490.
Ueber den normalen irregulären Astigmatismus. Von Sigmund Exner. S. 495.
Ueber das elektrische Verhalten des Quarzes. I. Von Dr. Paul Czermak. S. 511.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 15. Mai 1888. S. 535.
Eingesendete Bücher. S. 536.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,
Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 7).

Jahrgang 1888 Nr. 20 enthält:

Rundschau. — **Wirkungsweise elektrischer Maschinen.** (Fortsetzung.) Von Dr. Friedrich Vogel in Braunschweig. — **Ueber Disjunctionsströme.** Von Dr. C. A. Mebius. — **Kleinere Mittheilungen.** Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung in Nürnberg. — Vorarbeiten für die elektrische Beleuchtung Unter den Linden und auf dem Pariser Platze in Berlin. — Generalversammlung der Elektricitätswerke zu Berlin. — Elektr. Beleuchtung des Kurortes Gastein. — Verbreitung der Lahmeyer-Maschinen in Belgien. — Verschiedenes. Specifische Gewichte einiger Körper (mitgetheilt von der elektrotechnischen Versuchsstation in München). — Kraft- und Arbeits-Maschinen-Ausstellung, München 1888. — XXVIII. Jahresversammlung des Deutschen Vereins von Gas- und Wasserfachmännern in Stuttgart. — Edisons Phonograph. — Neue Schnell-Bohrmaschine von H. Dudeck. — Einschlagen des Blitzes in die Leitung des elektrischen Lichtes in Bad Ems. — **Patente.** — **Briefkasten der Redaction.**

Jahrgang 1888 Nr. 21 enthält:

Rundschau. — **Sicherheitsvorschriften für elektrische Anlagen.** — **Grosse Reflectorlampe mit Selbstregulirung.** Von W. E. Fein. — **Versuche und Bemerkungen über den galvanischen Lichtbogen.** Von H. Luggin. — **Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens.** — **Literatur.** — J. D. Everett, Physikalische Einheiten und Constanten. — Dr. A. Ritter v. Urbanitzky, Die Elektricität des Himmels und der Erde. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachricht. Prof. Dr. Kittler zum Director der technischen Hochschule zu Darmstadt ernannt. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinen-Ausstellung für das Deutsche Reich. München 1888. — Elwell Parkers Dynamo für elektrolytische Zwecke. — Strom- und Spannungszeiger von Decharme. — Wilkes Polreagenzpapier. — Telegraphen-Taschenmesser. — **Patente.** — **Briefkasten der Redaction.**

Jahrgang 1888 Nr. 22 enthält:

Rundschau. — **Correspondenz.** — **Bogenlichtemission und Kohlenquerschnitt.** Von Max Schreihage. — **Apparate zur Messung des Widerstandes von Kohlenstäben** von Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a. M. — **Fortschritte der Physik.** Ueber eine neue Construction eines Daniell-Normalelements und die Herstellung von Spannungsetalons. Von Josef Popper. — Ueber Edisons pyromag-

SEP 20 18

Ueber absolute Maasssysteme.

Von

W. Winter.

In einem früheren Aufsatze in dieser Zeitschrift (1885 S. 775 ff.) habe ich die Dimensionen der abgeleiteten Grössen absoluter Maasssysteme besprochen, insbesondere in der Absicht, zu zeigen, dass diese Dimensionen den Werth genauer Formeln haben oder bekommen können, und dass auch in den Dimensionen elektrischer Grössen der physikalische Charakter des Dargestellten erkennbar ist. Nach mehreren Richtungen hin lassen sich nun die Betrachtungen über absolute Maasssysteme erweitern; nämlich wenn man vom CGS-System auf das Universalgravitationssystem von CG übergeht, könnte man versuchen, den Uebergang so zu machen, dass auch im neuen System die Dimensionen genaue Formeln des Dargestellten sind; ferner könnte man versuchen, ein Maasssystem aufzustellen, bei welchem die Einheiten des elektrostatischen und elektrodynamischen Systems nicht mehr, weder durch einen Dimensionsfactor (CS^{-1}) noch durch einen constanten Factor (28 800 000 000) verschieden sind; schliesslich könnte man den Gedanken verfolgen, ob nicht absolute Naturmaasse aufstellbar sind, welche frei von willkürlich angenommenen Maasseinheiten sind.

Der Uebergang vom CGS-System zum Universalgravitationssystem kann in folgender Art gemacht werden: Krafteinheit des CGS-Systems ist diejenige Kraft, welche der trägen Masse von $1\,G$ in $1\,S$ eine Geschwindigkeit von $1\,CS^{-1}$ gibt; also ist $F = CGS^{-2}$. Krafteinheit des Universalgravitationssystems ist diejenige Kraft, mit welcher $1\,G$ ein um $1\,C$ entferntes G infolge der allgemeinen Massenanziehung anzieht; also $F = C^{-2}\,Q^2$, wobei mit Q die Intensität der Anziehung eines G bezeichnet ist. Da nun und so lange diese Intensität der Massenanziehung ausser von der Distanz nur von der Masse selbst abhängig und derselben direct proportional ist, kann die Intensität der Massenanziehung durch die Masse selbst gemessen werden; man ist also berechtigt, G statt Q zu setzen und $F = C^{-2}\,G^2$ zu nehmen.

Da man für F zwei Gleichungen hat, so erhält man durch Gleichsetzen die Relation

$$C G S^{-2} = C^{-2} G^2$$

und diese kann nun dazu benutzt werden, um irgend eine der unabhängigen Einheiten C, G, S, also etwa S zu berechnen, also durch C und G auszudrücken, und damit durch ein einfaches Einsetzen sämmtliche Dimensionen der abgeleiteten Grössen zu vereinfachen. Man erhält so das CG-System.

Bei diesem Uebergange ist aber eine Constante unterdrückt worden, was zur Folge hat, dass die Dimensionen des CG-Systems keine genauen Formeln mehr sind. Nämlich die Krafteinheit des Universalgravitationssystems, $F = C^{-2} G^2$, ist nicht gleich der des CGS-Systems, $F = CGS^{-2}$, sondern ca. 14 900 000 mal kleiner, wie früher angegeben; also heisst die Relation:

$$C G S^{-2} = 14\,900\,000\ C^{-2} G^2.$$

Beim Uebergang vom CGS-System in das Universalgravitationssystem müsste man also stets diese durch einen constanten Factor beschwerte Formel benutzen, und es wäre deshalb zu untersuchen, ob man nicht ein anderes Maasssystem aufstellen könnte, bei welchem dieser constante Factor verschwinden würde. Das ist theoretisch leicht zu machen; denn man braucht nur statt einer der drei Einheiten C, G, S eine andere so zu wählen, dass der Factor aus der Relation verschwindet. Wählen wir S und setzen statt der Secunde eine neue Zeiteinheit $H = 3860\ S$ (ca), so wird

$$C G H^{-2} \cdot 3860^2 = 14\,900\,000\ C^{-2} G^2,$$

oder, da $3860^2 = 14\,900\,000$ (ca), so ist

$$C G H^{-2} = C^{-2} G^2.$$

Das Universalgravitationssystem ist also folgendermaassen definirt: C und G sind die absoluten Einheiten, und dabei bezeichnet G sowohl die Einheit des Trägen, als auch die Einheit des gravitirend Anziehenden. Als Zeiteinheit ist nicht mehr eine beliebige absolute Grösse S, sondern eine ihrer Grösse nach bestimmbare Grösse H zu nehmen, welche 3860 S, also etwa eine Stunde beträgt. H ist nicht willkürlich, sondern hängt von C und G ab und hat aus der Relation die Dimension

$$H = C^{\frac{1}{2}} G^{-\frac{1}{2}}.$$

Zugleich ändern sich die Werthe der abgeleiteten Einheiten. Die Geschwindigkeitseinheit ist

$$V = CH^{-1} = CS^{-1} 3860^{-1};$$

sie ist 3860 mal kleiner als die Geschwindigkeitseinheit des CGS-Systems und hat nun die Dimension $C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$.

Die Krafteinheit ist

$$F = CGH^{-2} = CGS^{-2} \cdot 3860^{-2};$$

sie ist 14900000 mal kleiner als die Krafteinheit des CGS-Systems. Aber vermöge der Relation

$$CGH^{-2} = C^{-2} G^2$$

ist die Kraft, welche dem trägen G in der Zeit H die Geschwindigkeit CH^{-1} gibt, ebenso gross wie die Kraft, mit welcher ein G ein anderes G in 1 C Abstand gravitirend anzieht. Ebenso ist die Arbeitseinheit 14900000 mal kleiner geworden und hat die Dimension

$$C^{-1} G^2 \text{ u. s. f.}$$

Als elektrostatische Mengeneinheit ist zu definiren diejenige Elektricitätsmenge, welche eine ihr gleiche in 1 C Abstand mit der Krafteinheit $CGH^{-2} = C^{-2} G^2$ anzieht, also ebenso stark wie 2 G in 1 C-Distanz sich gravitirend anziehen. Hieraus ergibt sich

$$Q^2 C^{-2} = G^2 C^{-2}, \text{ also } Q = G,$$

d. h. die Anziehungsintensität der elektrischen Mengeneinheit ist gleich der Anziehungsintensität der gravitirenden Mengeneinheit; beide können sich direct ersetzen. Die elektrische Mengeneinheit des CGS-Systems welche eine ihr gleiche in 1 C-Distanz mit der Krafteinheit CGS^{-2} (Dyne) anzieht, ergibt sich aus

$$Q^2 C^{-2} = CGS^{-2}$$

und hat die Dimension

$$Q = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1};$$

die jetzige ergibt sich aus

$$Q^2 C^{-2} = CGH^{-2}$$

und hat die Dimension

$$Q = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} H^{-1} = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1} \cdot 3860^{-1}$$

ist also 3860 mal kleiner als die Dimension des CGS-Systems und hat die Dimension G. Ebenso ergibt sich, dass die Stromstärke 3860^2 mal kleiner ist und die Dimension

$$C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} H^{-2} = C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$$

hat, dass das Potential 3860 mal kleiner ist und die Dimension

$$C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} H^{-1} = C^{-1} G$$

hat u. s. f.

Von den elektromagnetischen oder elektrodynamischen Einheiten hat die Menge dieselbe Dimension $C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$ und Grösse beibehalten, weil sie von der Zeit unabhängig ist, die Stromstärke ist 3860 mal kleiner, das Potential 3860^2 mal kleiner geworden. Im CGS-System ist die Mengeneinheit des dynamischen Systems 28800000000 mal grösser als die des statischen Systems, im CGH-System ist demnach die Mengen-

einheit des dynamischen Systems $3860 \cdot 28\,800\,000\,000$ mal grösser als die des statischen Systems, da die Einheit des statischen Systems 3860 mal kleiner geworden ist. Durch Einführung des CGH-Systems werden also die Einheiten des statischen und dynamischen Systems noch weiter auseinandergerückt.

Der Werth des Bisherigen dürfte nun darin zu finden sein, dass nach willkürlicher Annahme von C und G die Zeiteinheit nicht mehr willkürlich ist, sondern eine von der Natur gegebene Grösse hat $= 3860\,S$; dies hat sich daraus ergeben, dass man die Forderung aufstellte, zwei Masseneinheiten sollen sich mit derselben Kraft anziehen, als erforderlich ist, um einer Masseneinheit die Geschwindigkeit von einer Längeneinheit zu geben. Die Ableitung hätte man auch so machen können: Krafteinheit ist die Kraft, mit welcher sich zwei Masseneinheiten in 1 C-Distanz anziehen. Bewegt sich nun ein freies G um ein festes G in Kreisform, sodass die natürliche Gravitation gerade hinreicht, diese Centralbewegung zu erhalten, so braucht das bewegte G eine gewisse Zeit, um die Längeneinheit zu durchlaufen; diese Zeit beträgt 3860 Secunden, hat die Dimension $C^{\frac{1}{2}} G^{-\frac{1}{2}}$ und ist eine naturgemäss abgeleitete Einheit. Dass man die elektrischen Einheiten dementsprechend abändert, ist einfache Consequenz.

Das homogene elektrische System.

Wir gehen zur Aufstellung eines Systemes, in welchem die Einheiten der elektrostatischen und elektrodynamischen Grössen nicht mehr voneinander verschieden sind, weder durch einen Zahlenfactor, noch durch einen Dimensionsfactor.

Es hat im CGS-System die Mengeneinheit statisch die Dimension $Q = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}$ und dynamisch $Q' = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$; dabei ist die Mengeneinheit des statischen Systems 28 800 000 000 mal kleiner als die des dynamischen Systems. Dies führt zur Gleichung

$$C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} = 28\,800\,000\,000\; C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1},$$

oder vereinfacht zur Relation

$$1 = 28\,800\,000\,000\; C S^{-1}.$$

Wir wollen nun ein neues System aufstellen, sodass beide Einheiten nicht mehr voneinander verschieden sind, dass also die Relation ohne den Zahlenfactor erfüllt ist. Dies geschieht, indem man über C oder S oder beide passend verfügt. Wählen wir S und führen statt derselben eine neue Zeiteinheit s ein, sodass $S = 28\,800\,000\,000\,s$, so wird die Relation

$$1 = C s^{-1}.$$

Ebensogut hätten wir auch C ändern können, oder C und S zugleich, wenn nur durch die Aenderung bewirkt wird, dass die Relation übergeht in $C_1 S_1^{-1} = 1$. Die von uns gewählte Grösse

$$s = \frac{1}{28\,800\,000\,000} S$$

ist noch abhängig vom gewählten Werthe von C, denn nimmt man statt C eine p mal grössere Einheit, so ist auch die Zeit p mal grösser zu wählen.

Dies drückt sich in der Relation $Cs^{-1} = 1$ aus, aus welcher $s = C$ folgt, sodass man sagen kann, die Zeiteinheit s hat die Dimension C, d. h. sie ändert sich proportional C.

Durch die allgemeine Einführung einer neuen Zeiteinheit s, die von der bisherigen Zeiteinheit S soweit verschieden ist, dass sich ihre Grösse fast der sinnlichen Vorstellung entzieht, werden natürlich auch die anderen Einheiten bedeutend geändert. Wir betrachten diese abgeleiteten Einheiten des $Cs\,G$-Systemes, und bezeichnen sie mit Index 1, und die Zahl 28 800 000 000 mit $\varkappa$.

Es ist die Geschwindigkeitseinheit

$$V_1 = Cs^{-1} = C S^{-1} \cdot \varkappa;$$

sie ist $\varkappa$ mal grösser als die Geschwindigkeitseinheit des CGS-Systems, und da s die Dimension C hat, so ist $V_1 = 1$; das heisst: die Geschwindigkeitseinheit hat gar keine Dimension mehr, sie ist unabhängig vom gewählten Werthe C; denn, welche Längeneinheit man auch wählen mag, stets muss die Zeiteinheit entsprechend gewählt werden, sodass die Relation $C_1 S_1^{-1} = 1$ erfüllt ist, dass also die Geschwindigkeitseinheit ungeändert bleibt. Man kann also diese Geschwindigkeitseinheit von 1 cm in $\frac{1}{\varkappa}$ Secunde ein Naturmaass nennen; denn, sobald wir verlangen, dass die elektrostatischen und elektrodynamischen Mengeneinheiten gleich gross sind, muss die Geschwindigkeitseinheit diese Grösse haben.

Die Krafteinheit ist

$$F_1 = C G s^{-2} = C G S^{-2} \cdot \varkappa^2;$$

sie ist $\varkappa^2$ mal grösser als die Krafteinheit F des CGS-Systems und hat die Dimension $F_1 = C^{-1} G$.

Die Arbeitseinheit ist

$$A_1 = C^2 G s^{-2} = C^2 G S^{-2} \cdot \varkappa^2;$$

sie ist auch $\varkappa^2$ mal grösser als A und hat die Dimension $A_1 = G$.

Die elektrostatische Mengeneinheit ist

$$Q_1 = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} s^{-1} = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1} \cdot \varkappa;$$

sie ist $\varkappa$ mal grösser als Q im CGS-System und hat die Dimension $C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$.

Die elektrodynamische Mengeneinheit ist

$$Q'_1 = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}};$$

sie ist ungeändert geblieben sowohl in der Grösse als in der Dimension; da Q $\varkappa$ mal kleiner als Q', so ist das $\varkappa$ mal grössere Q_1 ebenso gross als Q'_1.

Doch sind die bisher durchgesprochenen Einheiten von den bisher gebräuchlichen oft so ungemein weit verschieden, dass es schwer ist, sich von ihrer Grösse eine ordentliche Vorstellung zu machen. Wir können aber ihre Grösse ändern, indem wir noch über G verfügen; denn da G in der Relation $Cs^{-1} = 1$ nicht vorkommt, so ist eine Aenderung desselben ohne Einfluss auf das Bestehen derselben, also auch ohne Einfluss darauf, dass die Einheiten der elektrischen Systeme gleich gross sind. Wir wählen statt G eine $\varkappa^2$ mal kleinere Grösse g als Mengeneinheit, setzen also $G = \varkappa^2 g$ und bauen das System aus C, g, s auf, so erhalten wir unter Beibehaltung aller Definitionen folgendes:

Die Krafteinheit ist

$$F_2 = Cgs^{-2} = C \cdot \varkappa^{-2} G \cdot \varkappa^2 S^{-2} = CGS^{-2};$$

sie ist ebenso gross wie die gebräuchliche Krafteinheit des CGS-Systems (Dyne); also die Krafteinheit $F_2 = Cgs^{-2}$, welche dem g in s die Geschwindigkeit Cs^{-1} gibt, ist ebenso gross wie die Kraft $F = CGS^{-2}$, welche dem G in S die Geschwindigkeit CS^{-1} gibt. Ebenso ist die Arbeitseinheit

$$A_2 = C^2 g s^{-2} = C^2 \varkappa^{-2} G \varkappa^2 S^{-2} = C^2 G S^{-2}.$$

Die elektrostatische Mengeneinheit ist

$$Q_2 = C^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-1} = C^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa^{-1} G^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa S^{-1} = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1};$$

sie ist also dieselbe wie Q im CGS-System, also so gross, dass sie eine ihr gleiche Menge in C-Distanz mit der Krafteinheit CGS^{-2} (Dyne) anzieht.

Die elektrodynamische Menge ist

$$Q'_2 = C^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} = C^{\frac{1}{2}} \varkappa^{-1} G^{\frac{1}{2}};$$

sie ist $\varkappa$ mal kleiner als die Einheit Q' des CGS-Systems, folglich ist sie so gross als Q also auch so gross als Q_2.

Wir haben also folgenden Zusammenhang zwischen elektrostatischen und elektrodynamischen Einheiten:

Die statische Mengeneinheit ist so gross, dass sie eine ihr gleiche im Abstand 1 C mit der Krafteinheit (Dyne) anzieht. Wenn dieselbe Menge Elektricität in der Zeit s den Querschnitt eines Leiters durch-

fliesst, so befindet sich im Leiter die statische Stromeinheit; zugleich ist dies aber dann auch die dynamische Stromeinheit, und ein Stück von 1 C Länge dieses Stromes zieht ein ebenso langes Stück desselben Stromes in C-Distanz auch mit der Krafteinheit (Dyne) an. Man kann sich auch so ausdrücken: Die so definirte Menge Elektricität übt dieselbe Kraft aus, wenn sie eine ihr gleiche Menge in C-Distanz anzieht oder mit der Geschwindigkeit von $\frac{1}{\varkappa} S$ den C durchläuft und einen ebensolchen Strom in C-Distanz anzieht. Man hat so einen genauen Einblick in die Bedeutung des Coefficienten $\varkappa$: er gibt an, mit welcher Geschwindigkeit sich die statische Mengeneinheit im Leiter bewegen muss, um bei dynamischer Anziehung dieselbe Kraft hervorzubringen wie bei statischer Anziehung. Diese Zahl $\varkappa$ ist somit eine Constante der Elektricität und gibt die Geschwindigkeit an, mit welcher sie sich im Leiter bewegen muss, damit der statische Strom dynamisch die Krafteinheit hervorbringt.

Man bemerke, dass wohl die Zeit s abhängig ist von der gewählten Längeneinheit C, dass aber die Geschwindigkeitseinheit stets dieselbe bleibt. Wenn wir also statt C irgend eine andere Länge nehmen, z. B das Meter, und machen genau dieselben Definitionen, wobei sich natürlich die abgeleiteten Einheiten der Kraft, Arbeit, Menge u. s. w. entsprechend ändern, so gilt doch wieder dasselbe Resultat: die definirte elektrostatische Mengeneinheit übt dieselbe Anziehung aus, gleichgiltig, ob sie statisch wirkt auf eine gleich grosse Menge in der Entfernung der Längeneinheit, oder ob sie mit der angegebenen Geschwindigkeit den Querschnitt eines Leiters durchläuft und nun eine Längeneinheit dieses Stromes eine Längeneinheit desselben Stromes in der Entfernung der Längeneinheit anzieht. Alle Grössen haben sich geändert, nur die Geschwindigkeit ist genau dieselbe geblieben. Man ist also berechtigt, diese Geschwindigkeit ein Naturmaass zu nennen, das sich von selbst einstellt als Geschwindigkeitseinheit, wenn man die Forderung aufstellt, dass nach den Definitionen der absoluten Maasssysteme eine gewisse Menge Elektricität in Ruhe und in Bewegung dieselbe Kraft hervorbringen soll.

Wir betrachten noch kurz die anderen elektrischen Einheiten, um uns zu überzeugen, dass sie alle je von gleicher Grösse sind.

Es ist die statische Stromstärke

$$J_s = C^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-2} = C^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa^{-1} G^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa^2 S^{-2} = \varkappa C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-2};$$

sie ist $\varkappa$ mal grösser als im CGS-System.

Die dynamische Stromstärke ist

$$J'_s = C^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-1} = C^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa^{-1} G^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa S^{-1} = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1};$$

sie ist dieselbe wie im CGS-System; da im CGS-System J' $\varkappa$ mal grösser ist, als J, so ist nur $J_2 = J'_2$.

Das Potential ist im statischen System:

$$E_2 = C^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-1} = C^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa^{-1} G^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa S^{-1} = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1};$$

es ist ebenso gross wie im CGS-System. Im dynamischen System ist

$$E'_2 = C^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-2} = C^{\frac{1}{2}} \varkappa^{-1} G^{\frac{1}{2}} \varkappa^2 s^{-2} = \varkappa \cdot C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-2};$$

es ist $\varkappa$ mal grösser als im CGS-System; da im CGS-System E' $\varkappa$ mal kleiner ist als E, so ist $E'_2 = E_2$.

Der Widerstand ist im statischen System

$$W_2 = C^{-1} s = C^{-1} \varkappa^{-1} S;$$

er ist $\varkappa$ mal kleiner als im CGS-System; im dynamischen System ist

$$W'_2 = C s^{-1} = C \cdot \varkappa S^{-1};$$

er ist $\varkappa$ mal grösser als im CGS-System; da im CGS-System W' $\varkappa^2$ mal kleiner ist als W, so ist $W'_2 = W_2$.

Wir haben schon angegeben, dass die Zeiteinheit s die Dimension C hat, da nämlich die Relation $s = C$ ausspricht, dass sich s proportional der absoluten Grösse C ändert. Man ist demnach berechtigt in den Dimensionen der abgeleiteten Einheiten s durch C zu ersetzen und dadurch die Dimensionen zu vereinfachen. Man erhält dadurch folgende Dimensionen:

Geschwindigkeit .	$V = 1$, sie ist Naturmaass,
Beschleunigung .	$P = C^{-1}$
Kraft	$F = C^{-1} G$
Arbeit	$A = G$;

das ist naturgemäss, da in der Formel Mv^2 das v eine Constante geworden ist. Die elektrischen Einheiten haben sowohl im statischen als im dynamischen Systeme die Dimensionen:

Menge	$Q = C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$
Stromstärke . .	$J = C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$
Potential . . .	$E = C^{-1} G^{\frac{1}{2}}$
Widerstand . .	$W = 1$;

auch die Widerstandseinheit ist wie die Geschwindigkeit ein Naturmaass; es ist eben derjenige Widerstand = 1, der bei Potential 1 die Stromstärke 1 hervorbringt; Potential und Stromstärke haben aber in unserem System dieselbe Dimension, wählt man also andere C und G, so ändern sich beide gleichmässig, geben also wieder dieselbe Widerstandseinheit. Solange also ein System so definirt ist, dass $C = s$, ist die Widerstandseinheit eine ganz bestimmte Grösse, die sonst von nichts abhängt, also, wie die Geschwindigkeit, ein Naturmaass.

Es muss nach dem bisher Gefundenen anerkannt werden, dass die getrennte Aufstellung zweier elektrischer Systeme etwas Ueberflüssiges ist. Man wäre ja von vornherein gar nicht berechtigt, zweierlei Systeme aufzustellen, weil es ja nur eine einzige Elektricität ist, die in ihren Wirkungen verschiedenartiges leistet, einerseits Anziehung statischer Art, andrerseits dynamische Anziehung von Stromtheilen. Es ist aber gar kein Unterschied zu finden zwischen statischem Strom, dem gleichmässigen Fliessen statischer Elektricität durch einen Leiterquerschnitt, und dem dynamischen Strom, der auch nur in einem gleichmässigen Fliessen statischer Elektricität durch einen Leiter besteht. Von Potential und Widerstand ist genau dasselbe zu sagen. Es ist also von vornherein anzuerkennen, dass es nur einen statischen Strom gibt, d. h., ein gleichmässiges Fliessen statischer Elektricität durch einen Leiter; derselbe bedarf zu seinem Zustandekommen einer vorhandenen Elektricitätsmenge, eines Potentials und Widerstandes. All dieses lässt sich direct ableiten wie es im statischen System geschieht. Wenn wir nun sehen, dass dieser statische Strom auch noch eine laterale Wirkung, die wir dynamische Wirkung nennen, hervorbringt, so sind wir nur solange berechtigt, die Stromstärke aus ihrer dynamischen Wirkung zu berechnen, als wir nicht im Stande sind, diesen Strom mit dem statischen Strom zu vergleichen. Diese Berechtigung entspringt aber nur aus der zunächst noch vorhandenen Unmöglichkeit, das Richtige zu thun, und sobald wir erkannt haben, dass wir die dynamische Wirkung des Stromes direct ableiten können aus dem statisch definirten Strom, weicht die Erlaubnis, vorderhand mit dynamischem Maasse zu messen, der Verpflichtung, nun stricte mit statischem Maasse zu messen. Diese Kenntnis haben wir aber erlangt; denn wir wussten schon früher, dass die dynamische Stromeinheit 28 800 000 000 mal grösser ist als die statische, wir haben jetzt sogar ein System gefunden, in welchem die dynamische Strom-, Mengen-, Potential- und Widerstandseinheit geradezu gleich ist der entsprechenden statischen Einheit; deshalb hören wir auf, die dynamischen Einheiten überhaupt zu betrachten, definiren bloss die statischen Einheiten und behalten dann von den dynamischen Einheiten bloss die Stromstärke bei. Dies geschieht ja schliesslich in dem sehr übersichtlichen *Cgs*-System. Bei diesem wird die statische Menge und die statische Stromeinheit definirt, und diese statische Stromeinheit ist dann von selbst so gross, dass sie lateral wirkend auch die Krafteinheit ausübt. Wir sind also nicht mehr berechtigt, für seitliche Wirkung des statischen Stromes etwas anderes in die Definition aufzunehmen, als die statisch definirte Stromeinheit schon in sich hat, denn das genügt schon; wir sind also verpflichtet, mittels des statischen Strommaasses auch denjenigen Strom

zu messen, von welchem uns die dynamische Wirkung mehr interessirt als die in ihm vorhandene Elektricität. Mit der Beseitigung der dynamischen Stromstärke und deren Ersetzung durch die statische, fällt die Einführung der dynamischen Einheiten für Menge, Potential und Widerstand von selbst weg.

Dabei ist allerdings anzuerkennen, dass wir aus den bisherigen Ableitungen nicht zu erkennen vermögen, warum die statisch definirte Stromeinheit auch die dynamische Stromeinheit sei, dass wir also nicht wissen, warum die statische Elektricitätsmengeneinheit, wenn sie mit der angegebenen Geschwindigkeit den Stromquerschnitt passirt, auch lateral eine so grosse Wirkung ausübt, dass sie einen gleichen Strom in 1 C-Distanz mit der Kraft 1 anzieht; es hat sich ja auch nicht ergeben, warum gerade diese Geschwindigkeit von 1 C in $\frac{1}{\varkappa} S$ hierzu erforderlich ist; aber es hat sich doch in anschaulicher Weise ergeben, wie die zwei ruhenden Elektricitätsmengeneinheiten sich statisch mit derselben Kraft anziehen, wie die Ströme, in welchen sich dieselben zwei Mengen mit genau vorgeschriebener Geschwindigkeit bewegen.

Ein Naturmaasssystem.

Ein System, welches einigermaassen auf den Namen eines Naturmaasssystemes Anspruch hat, deshalb, weil zu seiner Definition möglichst wenig Willkürliches verwendet wurde, und weil eine ganze Reihe von Einheiten desselben auf gar keinen willkürlichen Voraussetzungen mehr beruhen, ergibt sich auf folgende Art.

Wir haben zuerst das Universalgravitationssystem aufgestellt, definirt durch die Bestimmung, dass die Krafteinheit, welche der trägen Masseneinheit in der Zeiteinheit die Beschleunigungseinheit ertheilt, dieselbe Grösse haben soll wie die Krafteinheit, mit welcher dieselbe Masseneinheit eine ihr gleiche in der Distanzeinheit gravitirend anzieht. Es ergab sich, dass hierzu die Relation erfüllt sein muss:

$$\text{I} \qquad C G S^{-2} = 14\,900\,000\, C^{-2} G^2 \text{ oder}$$
$$C^3 G^{-1} S^{-2} = 14\,900\,000;$$

und zwar muss diese Gleichung durch Verfügen über eine in ihr vorkommende Grösse so umgestaltet werden, dass die Constante 14 900 000 aus ihr verschwindet. Wir machten das dadurch, dass wir

$$S = \frac{1}{3860} H$$

setzten, constatirten dabei, dass wir auch auf andere Art derselben Forderung genügen können, und wollen jetzt annehmen, wir hätten

eine solche Bestimmung überhaupt noch nicht getroffen, sondern uns freie Hand darüber vorbehalten.

Ferner stellten wir ein neues Maasssystem auf mit der Bestimmung, dass in demselben die Einheiten des elektrostatischen und elektrodynamischen Systems sich nicht mehr unterscheiden sollen. Dies führte zu der Relation

$$\text{II} \qquad CS^{-1} \cdot 28\,800\,000\,000 = 1;$$

auch von ihr war zu sagen, dass man über C oder S oder beide so verfügen solle, dass die Constante $28\,800\,000\,000 = \varkappa$ sich in 1 verwandelt.

Wir verbinden nun beide Forderungen, verlangen also ein neues Maasssystem, in welchem sowohl das träge Gramm gleich dem gravitirenden Gramm, als auch die elektrostatische Anziehung gleich der elektrodynamischen Anziehung wird. Wir müssen deshalb über C, G, S so verfügen, dass beide Relationen zugleich erfüllt sind. Es ist klar, dass wir zu diesem Zwecke nur über zwei von ihnen zu verfügen brauchen, dass also die dritte der willkürlichen Bestimmung vorbehalten bleibt; wir bekommen also ein eingliedriges System mit nur einer willkürlichen, also absoluten Einheit. Wir wählen beliebig das S als die absolute Einheit. Dann wird der Relation II genügt, wenn wir setzen $C = \frac{1}{\varkappa} \cdot K$; denn dann ist

$$\text{II} \qquad \frac{1}{\varkappa} K S^{-1} \cdot \varkappa = 1, \text{ also } K S^{-1} = 1.$$

Dies in I eingesetzt gibt:

$$\text{I} \qquad K^3 G^{-1} S^{-2} = 14\,900\,000\,\varkappa^3.$$

Setzen wir, um aus dieser Gleichung auch die Constante zu entfernen:

$$\Omega = 14\,900\,000 \cdot \varkappa^3 G, \text{ also } G = \frac{1}{14\,900\,000 \cdot \varkappa^3} \Omega,$$

so ist:

$$K^3 \cdot 14\,900\,000\,\varkappa^3 \Omega^{-1} S^{-2} = 14\,900\,000\,\varkappa^3, \text{ also}$$

$$\text{II} \qquad K^3 \Omega^{-1} S^{-2} = 1.$$

Durch Einführung der neueren Grössen K und Ω in den angegebenen Grössen werden also beide Relationen erfüllt und das System $K\Omega S$ genügt also den durch die Relationen I und II ausgesprochenen Bedingungen.

Betrachten wir zuerst die Brauchbarkeit dieses Systems $K\Omega S$, so ist die Zeiteinheit S dieselbe wie früher, die Längeneinheit K ist aber ungemein gross $= 28\,800\,000\,000\ C$, die Masseneinheit Ω ist noch ungeheuerlicher $= 14\,900\,000 \cdot 28\,800\,000\,000^3\ G$. Die Frage, ob wir nicht

anschaulichere Einheiten aufstellen könnten, ersparen wir auf später und betrachten nun die Bedeutung der Einheiten.

Aus der Relation I $K S^{-1} = 1$ folgt, dass, wenn wir für S eine andere Einheit wählen, auch das K entsprechend anders gewählt werden muss, und zwar proportional der Aenderung von S; denn es ist $K = S$. Man kann somit sagen: wenn wir S als die uns willkürlich bleibende Einheit betrachten, so ist das K nicht mehr willkürlich, sondern von der Grösse des S abhängig und derselben direct proportional; es muss also, wenn $S = 1''$ ist, $K = \varkappa C$ gewählt werden; wählt man ein p mal grösseres S als Zeiteinheit, so muss man auch ein p mal grösseres K als Längeneinheit nehmen. K ist also nicht mehr absolute, willkürliche Einheit, sondern eine von der willkürlichen absoluten Einheit S abgeleitete Einheit, und zwar ist K von der Dimension S. Es ist deshalb auch erlaubt, in den Dimensionen der abgeleiteten Grössen überall statt des K das S zu setzen und damit die Dimensionen zu vereinfachen. Thun wir dies zunächst in der Relation I

$$K^3 \Omega^{-1} S^{-2} = 1,$$

so wird daraus

$$S \Omega^{-1} = 1.$$

Dies zeigt uns an, dass $S = \Omega$, d. h., dass die Masseneinheit Ω auch von der gewählten Zeiteinheit abhängig und derselben direct proportional ist. Ist $S = 1''$, so muss $\Omega = 14\,900\,000\,\varkappa^3\, G$ genommen werden; nimmt man ein v mal grösseres S, so muss man ein v mal grösseres Ω wählen. Deshalb ist Ω auch nicht mehr absolute Einheit, sondern eine von der absoluten Einheit S abgeleitete Einheit und von der Dimension S. Man darf deshalb in den Dimensionen der abgeleiteten Einheiten auch statt des Ω überall das S setzen und dadurch die Dimensionen vereinfachen.

Hieraus ersieht man zunächst, dass man durch andere Wahl des S nicht gerade zu bequemeren und anschaulicheren Einheiten kommt. Denn nimmt man die Zeiteinheit $\varkappa$ mal kleiner, so wird die Längeneinheit auch $\varkappa$ mal kleiner, also $= C$ und die Masseneinheit $\varkappa$ mal kleiner, also $= 14\,900\,000\,\varkappa^2\, G$. Nimmt man die Zeiteinheit $\varkappa^2$ mal kleiner, so wird die Längeneinheit $= \frac{1}{\varkappa} C$, die Masseneinheit $= 14\,900\,000\,\varkappa \cdot G$, wie auch aus folgender Tabelle ersichtlich ist, in welcher $14\,900\,000 = \gamma$ gesetzt ist.

Zeiteinheit . . .	$\varkappa S$	S	$\frac{1}{\varkappa} S$	$\frac{1}{\varkappa^2} S$	$\frac{1}{\varkappa^3} S$
Längeneinheit . .	$\varkappa^2 C$	$\varkappa C$	C	$\frac{1}{\varkappa} C$	$\frac{1}{\varkappa^2} C$
Masseneinheit . .	$\gamma \varkappa^4 G$	$\gamma \varkappa^3 G$	$\gamma \varkappa^2 G$	$\gamma \varkappa G$	γG

In all diesen und den ähnlichen Fällen hat man mit Einheiten zu thun, die ungemein weit entfernt sind von den unserer Vorstellung bequemen Grössen.

Wir betrachten ferner die Grösse der abgeleiteten Einheiten des $K\Omega S$-Systems, indem wir sie vergleichen mit den Einheiten des CGS-Systems, was stets leicht dadurch geschieht, dass man $K = \varkappa C$, $\Omega = 14\,900\,000\,\varkappa^3 G = \gamma\,\varkappa^3 G$ setzt.

Geschwindigkeitseinheit:

$$V_2 = K S^{-1} = \varkappa C S^{-1}.$$

Sie ist $\varkappa$ mal grösser als die Geschwindigkeitseinheit des CGS-Systems.

Da K die Dimension S hat, so darf man S statt K einsetzen, und es wird $V_2 = S\,S^{-1} = 1$. Diese Geschwindigkeitseinheit V_2 des $K\Omega S$-Systems hat also keine Dimension mehr, ist nicht mehr abhängig von der absoluten Grösse S und ist demnach Naturmaass.

Beschleunigung:

$$P_2 = K S^{-2} = \varkappa C S^{-2};$$

sie ist $\varkappa$ mal grösser als im CGS-System. Setzt man S für K, so ist $P_2 = S^{-1}$; also hat P_2 die Dimension S^{-1}, ist also der absoluten Grösse S umgekehrt proportional.

Krafteinheit:

$$F_2 = K\Omega S^{-2} = \varkappa C \cdot \gamma\varkappa^3 G \cdot S^{-2} = \gamma\varkappa^4 \cdot CGS^{-2}.$$

Sie ist $\gamma\varkappa^4$ mal grösser als die Krafteinheit des CGS-Systems (Dyne). Aber die Krafteinheit ist auch

$$F_2 = K^{-2}\Omega^2 = \varkappa^{-2} \cdot C^2 \cdot \gamma^2\varkappa^6 G^2 = \gamma^2\varkappa^4 \cdot C^{-2} G^2;$$

sie ist also $\gamma^2\varkappa^4$ mal grösser als die Kraft, mit welcher ein G ein G in ein C-Distanz anzieht; da letztere selbst γ mal kleiner ist als SGS^{-2} (Dyne), so ist im $K\Omega S$-System die Kraft $K^{-2}\Omega^2$ gleich der Kraft $K\Omega S^{-2}$. Das heisst: Die Kraft F_2 ertheilt dem Ω in S die Beschleunigung KS^{-2}, und auch ein Ω zieht ein Ω in K Distanz mit derselben Kraft F_2 an.

Führt man S statt K und Ω in die Dimension ein, so ist:

$$F_2 = SSS^{-2}, \text{ oder } = S^{-2}S^2, \text{ also stets } = 1,$$

d. h. diese Krafteinheit ist auch ein Naturmaass, nicht mehr abhängig von der absoluten Grösse S. Die Krafteinheit F_2 ist von den bisher gebräuchlichen Krafteinheiten ungemein weit verschieden; aber wenn man auch statt der absoluten Grösse S andere Zeiteinheiten einführt, und danach die abgeleiteten Einheiten K und Ω verändert, so hat das keinen Einfluss auf die Grösse von F_2. F_2 ist eben Naturmaass und als solches von der einzigen noch in unserem Belieben stehenden Grösse S unabhängig.

Arbeitseinheit:

$$A_2 = K^2 \Omega S^{-2} = \varkappa^2 C^2 \cdot \gamma \varkappa^3 G \cdot S^{-2} = \gamma \varkappa^5 C^2 G S^{-2}.$$

Sie ist $\gamma \varkappa^5$ mal grösser als im CGS-System und ihre Dimension reducirt sich auf

$$A_2 = S^2 S S^{-2} = S.$$

Die elektrostatische Mengeneinheit:

$$Q_2 = K^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}} S^{-1} = \varkappa^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma^{\frac{1}{2}} \varkappa^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} \cdot S^{-1} = \gamma^{\frac{1}{2}} \varkappa^{\frac{3}{2}} C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}.$$

Durch Vereinfachung der Dimension wird

$$Q_2 = S;$$

die Mengeneinheit ist also von der absoluten Zeiteinheit abhängig und derselben direct proportional, gerade so wie die Masseneinheit Ω.

Vergleichen wir damit die Mengeneinheit des elektrodynamischen Systems, so ist

$$Q'_2 = K^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}} = \varkappa^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma^{\frac{1}{2}} \cdot \varkappa^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} = \gamma^{\frac{1}{2}} \varkappa^2 C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}.$$

Da nun im CGS-System Q' $\varkappa$ mal grösser ist als Q, so erkennt man leicht, dass nun im $K\Omega S$-System $Q'_2 = Q_2$.

Stromstärkeeinheit statisch:

$$J_2 = K^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}} S^{-2} = \varkappa^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma^{\frac{1}{2}} \varkappa^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-2} = \gamma^{\frac{1}{2}} \varkappa^3 C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-2}.$$

Stromstärkeeinheit dynamisch:

$$J'_2 = K^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}} S^{-1} = \varkappa^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} \cdot \gamma^{\frac{1}{2}} \varkappa^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} \cdot S^{-1} = \gamma^{\frac{1}{2}} \varkappa^2 \cdot C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}.$$

Da nun im CGS-System J' $\varkappa$ mal grösser ist als J, so ist im $K\Omega S$-System $J'_2 = J_2$. Durch Einführung von S vereinfacht sich die Dimension auf

$$J_2 = J'_2 = 1.$$

Die Stromstärkeeinheit ist auch ein Naturmaass geworden.

Führt man die Rechnung ganz analog weiter, so findet man, dass auch Potential und Widerstand Naturmaasse geworden sind von der Dimension 1, und dass ihre Grössen im statischen und dynamischen System einander geradezu gleich sind.

Fassen wir die Resultate zusammen, so ist folgendes zu constatiren. Wir sind ausgegangen von der Forderung, dass von den bisher als absolut angenommenen Einheiten C, G, S einige oder alle so bestimmt werden sollen, dass 1. die Krafteinheit, welche der trägen Masseneinheit die Beschleunigungseinheit ertheilt, gleich derjenigen Krafteinheit sein soll, mit welcher die Masseneinheit eine gleich grosse im Abstand 1 anzieht; dass 2. die Einheiten des elektrostatischen Systems von denen des elektrodynamischen Systems nicht mehr verschieden sein sollen, weder durch einen constanten noch durch einen Dimensions-Factor. Diese letztere Bedingung hat sich zunächst in die einzige Bedingung vereinigt, dass die statische Einheit, welche eine ihr gleiche im Ab-

stand 1 mit der Kraft 1 anzieht, zugleich auch den Strom 1 hervorbringen soll, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit 1 durch den Leiter bewegt, sodass sie also, wenn von der Länge 1, einen ebenso starken Strom von der Länge 1 im Abstand 1 mit der Kraft 1 anzieht. Es hat sich dann ergeben, dass diesen Forderungen genügt werden kann durch eine unendliche Anzahl von absoluten Systemen, bei denen nur eine Grösse, in unserem Falle S, willkürlich ist, während die anderen Grössen (Länge und Masse) von der gewählten Zeiteinheit abhängen, derselben direct proportional sind und der Grösse nach in jedem Falle leicht angebbar sind. Man hat deshalb Länge und Masse als abgeleitete Einheiten anzusehen, und das System ist ein eingliedriges. Ferner zeigte sich, dass eine ganze Reihe von abgeleiteten Einheiten, nämlich Geschwindigkeit, Kraft, Stromstärke, Potential und Widerstand von der gewählten Zeiteinheit geradezu unabhängig sind und demnach Naturmaasse sind, die sich ihrer Grösse nach direct ergeben, wenn man die aufgestellten Bedingungen erfüllt. Diese Naturmaasse haben allerdings eine von bisher gebräuchlichen und uns geläufigen Einheiten ungemein weit verschiedene Grösse und sind, weil unveränderlich, unverbesserlich.

Beobachtungen über atmosphärische Elektricität.

Von

J. Elster und H. Geitel.

Die Beobachtungen wurden auf einer im Norden Wolfenbüttels gelegenen Wiese mit den von Exner im vorigen Bande dieser Zeitschrift S. 656 beschriebenen transportablen Apparaten angestellt. Dieselbe ist fast vollständig eben und die ersten, vereinzelten Häuser der Stadt sind im Süden von der Mitte der Wiese ca. 2—300 m entfernt. Im übrigen ist der Horizont fast vollständig frei.

Als Aufsaugevorrichtung diente eine kleine Petroleumlampe, die durch einen einseitig aufgeschlitzten Glimmercylinder gegen den Wind geschützt werden konnte. Die Flamme wurde so regulirt, dass die Spitze derselben eben den oberen Rand des Cylinders überragte; die Flammengrösse darf daher bei allen Messungen als nahezu constant angesehen werden. Wenn irgend thunlich, wurde in zwei bis drei verschiedenen Höhen gemessen. Hierbei wurde je nach der Jahreszeit von der Länge des Ebonitstabes, der die Lampe trägt, die Höhe des Grases, resp. der Schneedecke in Abrechnung gebracht. Am Rande der Wiese — im Garten unserer Wohnung — wurde während der Beobachtung an einem passenden Stative ein Hygrometer und ein in halbe Grade getheiltes Thermometer nach Celsius frei aufgehängt, so dass unmittelbar nach der Beobachtung Temperatur und relative Feuchtigkeit notirt werden konnten.

Das Hygrometer zeigte mit den Angaben der meteorologischen Station in Braunschweig eine befriedigende Uebereinstimmung.

Leider konnte gerade an jenen Tagen, an welchen eine genaue Bestimmung von $\frac{\delta V}{\delta n}$ von besonderer Wichtigkeit gewesen wäre, eine Messung auf der Wiese nicht oder doch nur sehr approximativ vorgenommen werden. Es erwies sich nämlich an kalten Wintertagen das Elektroskop für unsere Breiten als viel zu empfindlich, sodass z. B. am 25./II. nur dadurch ein ungefährer Werth des Potentials er-

langt werden konnte, dass das kleinste, disponible Ebonit-Stück schräg in den Schnee eingesteckt wurde; alsdann zeigte das Elektroskop noch eine Ladung von 116 Volt an. Da sich hierbei die Flammenspitze nur ca. 10 cm über dem Erdboden befand, so würde sich für $\frac{\delta V}{\delta n}$ in 1 m Höhe der enorm grosse Werth von 1160 Volt ergeben und zwar bei einem beobachteten Dunstdrucke von 1,9 mm.

An derartigen Tagen, an welchen aus dem soeben angeführten Grunde eine Messung auf der Wiese nicht möglich war, wurde dieselbe am Rande der Wiese — in unmittelbarer Nähe unserer Wohnung — vorgenommen und später an einem normalen Tage durch eine sorgfältige Versuchsreihe der Reductionsfactor bestimmt. (Nr. 24 der Tabelle I.) Die auf diese Weise ermittelten Zahlen sind in der beigefügten Tabelle mit einem Stern (*) bezeichnet.

Die 24 an ganz oder doch fast normalen Tagen angestellten Beobachtungen lassen sich unter Berücksichtigung der absoluten Feuchtigkeit in vier Gruppen ordnen, die in der Tabelle II angegeben sind. Hierdurch ist eine Vergleichung der F. Exner'schen und unserer Beobachtungen ermöglicht. Stellt man entsprechende Beobachtungen nebeneinander, so erhält man folgendes Schema:

Mittelwerthe nach F. Exner			Mittelwerthe nach Elster und Geitel		
Anzahl der Beobachtungen	p_0	$\frac{\delta V}{\delta n}$	Anzahl der Beobachtungen	p_0	$\frac{\delta V}{\delta n}$
12	2,3	325	7	1,8	636
6	3,8	297 [1])	4	3,8	226
7	8,4	106	7	8,0	112
10	12,5	68	6	12,3	81

Sehr auffallend ist hier, dass, während die Zahlen für mittleren und hohen Dunstdruck eine befriedigende Uebereinstimmung zeigen, die von uns an kalten Wintertagen ermittelten Werthe des Potentialgefälles fast doppelt so gross sind, als die von F. Exner gemessenen.

1) Ein Blick auf die von Exner auf S. 240 dieses Bandes gegebenen Curven zeigt, dass diese Zahl, wie dort auch bemerkt ist, jedenfalls viel zu hoch gefunden wurde; der aus den übrigen Werthen für diesen Punkt der Curven berechnete Werth wäre 220 was mit obiger Beobachtung von E. und G. gut übereinstimmt. Anm. d. Red.

Setzt man mit Exner in der Formel:

$$\frac{\delta V}{\delta n} = \frac{A}{1 + k \cdot p_0}$$ [1])

die Constante $k = 1{,}31$, so ergibt sich aus Gruppe:

I $A = 2162$
II $A = 1356$
III $A = 1288$ } Mittel: 1309.
IV $A = 1356$

Der sehr hohe Werth unter Nr. I findet vielleicht seine Erklärung darin, dass der mittlere Dunstdruck für Gruppe I nicht genügend genau, und zwar im allgemeinen zu hoch, bestimmt ist. Die Einsetzung des Mittelwerthes 1300 in obige Formel würde $p_0 = 0{,}8$ mm erfordern.

Tabelle I.
Bestimmung des Potentialgefälles an normalen Tagen.

Nr.	Jahr	Tag	Stunde	$\frac{\delta V}{\delta n} = \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$	Temp.	Feuchtigkeit abs.	Feuchtigkeit rel.	Windrichtung	Bemerkungen
1	87	23. VIII.	6½ p	44	14,4° C.	8,5	70%	W	Fast heiter.
2	„	25. VIII.	4¾ p	78	26,6	12,9	50	SSE	Fast vollständig klar.
3	„	26. VIII.	5 p	83	24,6	11,1	52	SSE	Im W schwach bewölkt, sonst klar.
4	„	27. VIII.	5 p	96	27,7	14,0	51	SSE	Heiter, Horizont dunstig.
5	„	28. VIII.	5 p	86	29,2	14,7	49	S	Heiter.
6	„	3. IX.	5 p	89	20,0	10,6	61	SSW	Ganz klar.
7	„	8. IX.	5 p	76	12,1	8,4	79	NNW	Klar.
8	„	9. IX.	5 p	79	13,7	8,8	75	SSE	Horizont bewölkt, sonst klar.
9	„	17. IX.	6 p	51	15,4	10,4	81	SSW	Absolut windstill; Nebel in der Ferne auf den Wiesen.
10	„		5 p	70	13,4	8,1	71	N	Fast windstill; klar.
11	„	24. X.	3 p	218	4,2	4,5	72	N	Ganz klar.
12	„	3. XI.	4 p	200	10,8	7,6	79	SE	Heiter; Horizont umflort; Cirrhus.
13	„	5. XI.	3 p	91	10,5	6,7	69	SE	Heiter.
14	„	7. XI.	2 p	221	10,3	7,7	82	SE	Ganz klar.
15	„	16. XI.	9 a	292	— 6,0	2,3	82	NW	Windstill; leicht bedeckt; Schneedecke 4 cm.
16	„	17. XI.	12 m	232	— 3,8	2,7	79	SE	Ganz klar; Schneedecke 4 cm.
17	88	1. I.	3 p	910	— 6,5	2,2	75	—	Ganz klar und windstill.
18	„	2. I.	4 p	900	— 5,5	2,1	72	SE	Ganz klar, fast windstill.
19	„	13. I.	5 p	231	— 2,1	3,4	84	NW	Ganz klar; Horizont umflort; Wind lebhaft; Schneedecke.
20	„	20. I.	5 p	655*	— 13,5	0,7	46	SE	Klar; doch dichter Nebel auf den Wiesen; Schneedecke.
21	„	31. I.	12 m	358*	— 10,4	1,7	80	SE	Klar; fast windstill; Schneedecke.
22	„	24. II.	6 p	448*	— 5,6	1,7	56	SE	Halbklar; am Horizont Wolkenbänke; Schneedecke.
23	„	25. II.	6 p	887*	— 8,5	1,9	85	E	Klar; etwas dunstig; Schneedecke.
24	„	27. IV.	11 a	224	+ 6,6	4,7	65	SW	Fast klar; Cirrhusschleier.

Zeichen der Elektricität stets +.

1) Hier bedeutet A das Potentialgefälle, wie es bei vollständiger Abwesenheit von Wasserdampf in der Luft herrschen würde; dasselbe ergab sich aus den Messungen Exner's zu 1300.

Tabelle II.

Abhängigkeit von $\frac{\delta V}{\delta n}$ vom Dunstdruck.

Gruppe I			Gruppe II		
Nr. der Beobachtung	p_0 in mm Hg	$\frac{\delta V}{\delta n}$	Nr. der Beobachtung	p_0 in mm Hg	$\frac{\delta V}{\delta n}$
20	0,7	655			
21	1,7	358			
22	1,7	448	16	2,7	232
23	1,9	887	19	3,4	231
18	2,1	900	11	4,5	218
17	2,2	910	24	4,7	224
15	2,3	292			
Mittel:	1,8	636		3,8	226
Gruppe III			Gruppe IV		
Nr. der Beobachtung	p_0	$\frac{\delta V}{\delta n}$	Nr. der Beobachtung	p_0	$\frac{\delta V}{\delta n}$
13	6,7	91			
12	7,6	200	9	10,4	51
14	7,7	221	6	10,6	89
10	8,1	70	3	11,1	83
7	8,4	76	2	12,9	78
1	8,5	44	4	14,0	96
8	8,8	79	5	14,7	86
Mittel:	8,0	112		12,3	81

Wolfenbüttel, 29. April 1888.

Ueber die Verwendung des Mikrophons (Transmitters) bei elektrischen Widerstandsmessungen mit dem Telephon und über den Einfluss des Gesichtsorganes auf den Gehörsinn.

Von

Dr. **B. Nebel.**

Wie das Mikrophon im Fernsprechverkehr dazu berufen ist, das Gesprochene dem Empfangenden deutlicher zu übermitteln, so müsse, dachte ich, das Mikrophon verstärkend auf die schwachen Wechselströme bei den elektrischen Widerstandsmessungen mit dem Telephon wirken, sodass der Tonabfall im Telephon bedeutender und somit die Genauigkeit im Messresultat erhöht würde.

Da ich in der mir zugänglichen Literatur eine derartige Verwendung des Mikrophons nicht finden konnte, stellte ich, um obige Ueberlegung praktisch auf ihre Richtigkeit zu prüfen, folgende Versuche an. Die Widerstandsmessung wurde mit einer Hartmann-Braun'schen Walzenbrücke nach der Wheatstone'schen Brückenmethode ausgeführt. In einem von derselben Firma gelieferten und zu diesem Zweck besonders gebauten Inductionsapparate suchte ich dadurch möglichst gleichmässige Wechselströme zu erzielen, dass ich von zwei grossen Accumulatoren nur ½ Ampère als Primärstrom benutzte, wodurch der Ton am Unterbrecher des Inductionsapparates die nämliche Höhe behielt, somit keinerlei Umschnappen des Tones stattfand, was z. B. bei unserem grossen Rhumkorff'schen Inductionsapparat, welcher mit drei Grove-Elementen in Thätigkeit versetzt wird, üblich ist.

Von den verschiedensten Widerstandsmessungen, welche ganz ähnlich verlaufende Resultate lieferten, sollen der Kürze wegen nur zwei Typen in die nachstehende Tabelle aufgenommen werden, einmal ein metallischer Leiter in Gestalt einer Siemens'schen Doseneinheit, sodann eine leitende Flüssigkeit, und zwar verdünnte Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1,24, welche in einem Kohlrausch'schen Gefäss einen Widerstand von nicht ganz 10 S.-E. ergab.

Was sowohl den Empfänger, als auch den Transmitter betrifft, so kamen Exemplare zur Untersuchung, die in Bezug auf Alter und Bauart als Extreme bezeichnet werden können. Die älteren Apparate

gehören dem physikalischen Institut, während die neueren von der hiesigen Telegraphenverwaltung geliehen wurden. Ein aus der ersten Zeit des Telephonbaus herrührendes Telephon, in der Tabelle mit F.-T. bezeichnet und von der Firma C. & E. Fein seiner Zeit geliefert, besitzt einen Magnetstab, dessen Nordpol mit einer Spule versehen, dem Mittelpunkt der Membran gegenübersteht. Als Gegenstück diente ein neues Telephon von Siemens & Halske (S.-T.), bei welchem die Pole des Hufeisenmagnets rechtwinklig umgebogen, beide mit Spulen umgeben, der Membran gegenüberliegen. Während das Fein'sche Telephon nur den Ton gab, wurde im Siemens'schen Telephon noch ein Geräusch wahrgenommen, welches lebhaft an das Krabbeln erinnerte, wenn die in der Kinderzeit aus Papier gefertigten Mückenkäfige mit ihren Insassen dem Ohr genähert wurden. Dieses Geräusch blieb auch dann noch bestehen, wenn ein Ton, wie dies in der ersten Serie von Versuchen der Fall war, nicht mehr gehört werden konnte.

Von Mikrophonen wurde zunächst die einfachste Form gewählt, ein sog. Hughes-Mikrophon (H.-M.). Dasselbe besteht aus zwei rechtwinklig miteinander verbundenen Brettchen; an der verticalen Innenseite des einen sind zwei mit Klemmen versehene Kohlenstücke horizontal angeschraubt, die in entsprechenden Vertiefungen durch zwei dünnere, an den Enden zugespitzte, verticale Kohlenstäbchen in losem Contact sind. Bei dieser Art ist Mikrophon und Telephon in dem gleichen Stromkreis hintereinander geschaltet, während bei den Mikrophonen neuerer Bauart das Mikrophon mit den dicken Windungen einer Inductionsspule in dem primären Stromkreis liegt, das Telephon und die dünnen Windungen der Inductionsspule dagegen für sich einen geschlossenen Stromkreis darstellen. Diese Schaltung sei im Kopf der Tabelle zwischen den abgekürzten Bezeichnungen der verwendeten Instrumente durch ||, während jene durch — angedeutet. Um einen Vergleich in der Wirksamkeit ziehen zu können, wurde auch bei den neueren Mikrophonen das Telephon in denselben Stromkreis gebracht, wodurch die dünnen Windungen der Inductionsspule ausser Thätigkeit kamen.

Als Mikrophone neuerer Construction wurden ein Blake-Mikrophon (B.-M.) mit federndem Contact und ein neuer Transmitter von Berliner (N. B.-M.) mit Kohlenplatte und Kohlenpulver benutzt.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, dass das Contactröllchen theils von der linken, theils von der rechten Seite her verschoben wurde, bis im Telephon entweder kein Ton mehr zu vernehmen war, was bei sämmtlichen Versuchen der ersten Serie der Fall war, oder bis ein Tonminimum erreicht war, was bei den Versuchen der zweiten Serie stattgefunden hat. Die in der Tabelle enthaltenen Zahlen geben den Stand des Contactröllchens an dem Walzen-

draht an, sodass von der weiteren Berechnung der daraus folgenden Widerstände der untergeordneten Natur wegen Abstand genommen wird.

Siemens'sche Doseneinheit als zu messender Widerstand.

1	2	3	4	5	6	7	8
N. B.-M. ‖ S.-T.	S.-T.	N. B.-M. — S.-T.	N. B.-M. ‖ F.-T.	F.-T.	B.-M. ‖ S.-T.	B.-M. — S.-T.	H.-M. — S.-T.
498,7	497,2	497,5	497,2	499,9	497,1	499,1	498.5
8	8,7	8,9	8,5	496,0	8,0	7,5	1
3	7,4	8,2	9,0	501,3	7,8	8,5	3
9	8,8	8,7	7,0	496,0	9,7	7,3	4
4	7,5	8,1	8,8	500,3	7,3	9,1	8
5	8,8	9,0	7,5	496.4	9,3	8,0	5
6	7,9	9,0	9,3	499,8	7,2	7,8	4
7	8,9	9,1	8,5	496,4	9,8	8,6	7
6	7,6	7,8	8,4	500,0	7,2	8,4	5
5	8,3	8,9	9,1	496,5	9,3	8,9	4
Mittel 498,6	498,1	498,5	498,3	498,2	498,3	498,3	498,5
wahrscheinl. Fehler des Resultats ± 0,039	± 0,178	± 0,122	± 0,174	± 0,459	± 0,240	± 0,138	± 0,043

Verdünnte Schwefelsäure (etwa 10 S.-E.) als zu messender Widerstand.

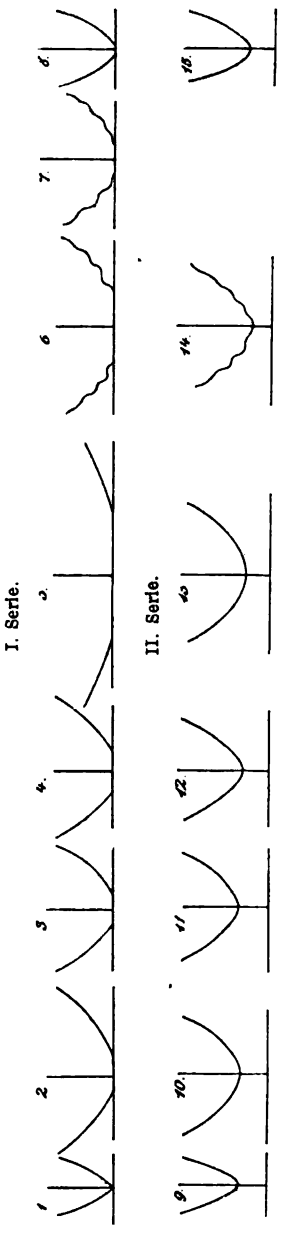
9	10	11	12	13	14		15
490,4	491,4	490,5	490,4	490,5	491,1		490.8
3	0,5	0	7	89,5	1,3		3
8	0,4	8	7	89,8	1,3		8
2	1,3	7	6	89,7	0,6		2
5	0,4	3	5	89,1	0,5		3
6	0,6	4	8	90,9	0,6		1
2	1,0	3	4	91,0	0,6		1
6	0,8	4	4	91,1	0,8		3
5	0,3	6	3	89,2	0,6		1
4	0,7	2	6	90,2	1,1		3
Mittel 490,5	490,7	490,4	490,5	490,1	490,9		490,3
wahrscheinl. Fehler des Resultats ± 0,042	± 0,088	± 0,051	± 0,036	± 0,163	± 0,068		± 0,056

Um eine leichtere Uebersicht zu erlangen, sollen die im Ohr wahrgenommenen Tonänderungen graphisch vor Augen geführt werden. Die den Figuren beigefügten Nummern entsprechen denjenigen der Versuchsreihen.

Die Abscissenaxe repräsentirt den Draht der Walzenbrücke, und zwar entspricht der Abscisse „Null“ jeweils der Mittelwerth der einzelnen Versuchsreihen, die Ordinate dagegen gibt ein Maass für den Tonabfall, sodass durch die Ordinate „Null“ keinerlei Tonempfindung im Ohr ausgedrückt werden soll.

Die Frage, ob das Telephon wirklich zum Schweigen gebracht werden kann, ist theoretisch für gewisse Fälle bejaht, praktisch hingegen hängt sie von rein subjectiven Verhältnissen ab und kann somit nicht mit dem Ohr entschieden werden. Je schärfer der Gehörsinn bei dem Einzelnen ausgeprägt ist, um so genauer wird er noch schwache Töne wahrnehmen können.

Was nun mein Gehörorgan betrifft, so ist mir schon lange her bekannt, dass es an Schärfe nichts zu wünschen übrig lässt, gewiss eine kleine Entschädigung für die Kurzsichtigkeit; um aber dennoch ein bestimmtes Urtheil darüber zu erlangen, stellte ich mit Bekannten Gehörproben an, die mir die Gewissheit gaben, dass dasselbe von keinem anderen übertroffen worden ist.



Wie das Auge in absoluter Dunkelheit für den geringsten Lichtreiz, der sich gegen den Willen in das Auge drängt, sehr empfindlich ist, was Jedem bekannt ist, der sich mit spectroskopischen Lichtstärkemessungen beschäftigt, so fand ich, dass das Gehörorgan nicht nur in absoluter Ruhe, wie natürlich, für schwache Töne viel empfänglicher ist, sondern dass es auch durch den Gesichtssinn beeinflusst wird. Obwohl ich in einem nur durch eine Gasflamme erleuchteten Dunkelzimmer diese Versuche anstellte, so bemerkte ich doch infolge zahlreich angestellter Beobachtungen, dass die Einstellungen, die mit geschlossenen Augen ausgeführt wurden, genauer waren, als die bei geöffneten. War im letzteren Fall die ganze Aufmerksamkeit auf das Gehör gerichtet, so habe ich, ohne es zu wollen, doch gesehen, indem sich mir verschwommene Gesichtsempfindungen aufdrängten.

Diese Wahrnehmung, glaube ich, steht in einem engen Zusammenhang mit der physiologisch festgestellten Thatsache, dass, wenn einer der Sinne weniger ausgeprägt ist, von den übrigen der eine oder der andere eine das gewöhnliche Maass übersteigende Schärfe zeigt.

Mag nun auch die Schärfe des Gehörorganes von Beobachter zu Beobachter wechseln, die relativen Ergebnisse der oben angestellten Versuche können dadurch nur unwesentlich geändert werden.

Die aus den Beobachtungsreihen berechneten Fehler lassen erkennen, dass die Genauigkeit im Resultat wesentlich von der Güte sowohl der Telephone, als auch der Mikrophone abhängt, dass aber die mit dem Telephon allein angestellten Untersuchungen stets grössere Fehler aufweisen, als bei Anwendung desselben Telephons mit einem Mikrophon, schliesslich dass bei den Mikrophonen mit Inductionsrolle die Schaltungsweise des Hughes-Mikrophons keineswegs vortheilhaft ist. Dass die in der Tabelle angegebenen Fehler zum grössten Theil von den Instrumenten herrühren und zum geringsten von dem Beobachter, lehrt die nähere Betrachtung der Versuchsreihen. Wenn z. B. in Reihe 2 der Fehler für die fünf linksseitigen Einstellungen des Contactröllchens berechnet wird, so ergibt sich dafür $\pm$ 0,078, für die fünf rechtsseitigen dagegen $\pm$ 0,071. Diese so berechneten Fehler würden sich noch verringern, wenn die Einstellungen von fünf auf zehn ausgedehnt worden wären.

Eigenthümlich ist der Tonabfall im Blake-Mikrophon, was für die Einstellung sehr störend ist. Ob dieses Verhalten bei allen Blake-Mikrophonen oder nur bei dem von mir verwendeten Exemplar zutrifft und ob dies dem federnden Contact zuzuschreiben ist, konnte ich nicht näher feststellen, da die Blake-Mikrophone bei der hiesigen Telegraphenverwaltung nicht eingeführt sind. Wie dem nun auch sein mag, ein Schluss auf die Brauchbarkeit dieses Mikrophons zu anderen Zwecken z. B. für den Fernsprechverkehr und dergl. darf daraus nicht gezogen werden. Diese Bemerkung übrigens ist bei allen Mikrophonen zutreffend; z. B. eignet sich das Hughes-Mikrophon in seiner einfachsten Form gar nicht zur Uebermittlung der Sprache, während es bezüglich der Wiedergabe von Geräuschen und den schwachen Erschütterungen, hervorgebracht durch feine Bewegungen, von den mir zugänglichen Mikrophonen neuerer Construction keineswegs übertroffen wird, auch die in dieser Arbeit niedergelegten Untersuchungen sprechen sehr für seine Güte in dieser Hinsicht.

Der Ton im Telephon bei der II. Serie war durchgehends stärker, als der bei der I. Serie, was durch den geänderten äusseren Widerstand bedingt ist.

Stuttgart, Techn. Hochschule, Mai 1888.

Ueber den normalen irregulären Astigmatismus[1]).

Von

Sigmund Exner.

Das emmetropische Auge sieht einen Stern nicht als Punkt, sondern eben als Stern, und das mässig myopische, übrigens normale, Auge sieht des Nachts um jede Strassenlaterne eine complicirte strahlige Scheibe. Ich habe eine analoge Scheibe in Fig. 1 dargestellt, wie ich sie mit meinem rechten Auge beim Anblicke eines 1,05 cm weiten

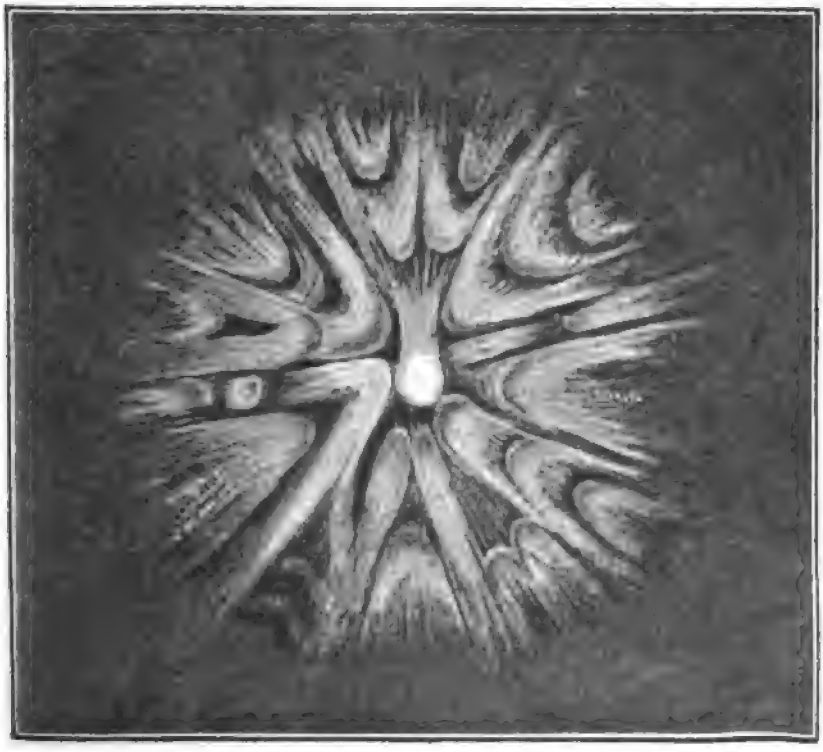


Fig. 1.

1) Zum grossen Theile nach einer Abhandlung gleichen Titels in v. Graefe's Archiv für Ophthalmologie Bd: 34 S. 1.

kreisförmigen Ausschnittes sehe, der im Blechcylinder eines Gasrundbrenners angebracht ist. Der Blechcylinder ist innen mit weissem Thon ausgekleidet und die Lampe befindet sich in einem dunklen Zimmer 11,4 m von mir entfernt. Der scheinbare Durchmesser der ganzen Figur beträgt um 54 Winkelminuten.

Diese und ähnliche Erscheinungen sind es, die allgemein als der Ausdruck des bei normalen Augen vorkommenden „irregulären Astigmatismus" betrachtet werden, und ebenso werden als Grund desselben Unregelmässigkeiten in den brechenden Medien des Auges, der Cornea und insbesondere der Linse, angenommen[1]). Auch darüber, dass wenigstens gewisse Formen der Diplopia und Polyopia monocularis auf den irregulären Astigmatismus zurückzuführen sind, scheint Alles einig zu sein. Doch eine auf die Einzelheiten der Erscheinung eingehende Erklärung vermissen wir noch; ob die Unregelmässigkeiten der optischen Medien jene strahlige Figur und ihr Farbenspiel durch Brechung und Dispersion oder durch Beugung und Interferenz erzeugt, welcher Art die Unregelmässigkeiten sein müssen, um jenen Effect hervorzurufen, warum sie das Sehen des corrigirten Auges so wenig beeinträchtigen und dergl., das sind noch offene Fragen.

Gelegentlich eines Vortrages, den vor etwa zwei Jahren mein Bruder, Prof. Karl Exner, in der Wiener chemisch-physikalischen

---

1) H. v. Helmholtz spricht von „Unregelmässigkeiten der Linse" (Phys. Optik 2. Aufl. S. 172). A. Fick äussert sich in ähnlichem Sinne und bemerkt, dass „eine strenge Erklärung der Einzelheiten" der Erscheinung noch nicht gegeben ist. (Hermann's Handbuch d. Physiol. Bd. 3 (1) S. 119.) Letzteres hebt auch Donders hervor, der die einschlägigen Erscheinungen am genauesten studirt hat und ihre Ursache in dem strahligen Bau der Linse fand. (Die Anomalien der Refraction und Accomodation übersetzt von O. Becker. Wien, 1866 S. 461.) Nach einem daselbst angeführten Citat bezog Thom. Young die auch schon von ihm untersuchte Erscheinung auf Unebenheiten an der Oberfläche der Linse. Aubert hingegen erklärt „undurchsichtige oder durchsichtige, aber mit einem anderen Brechungsexponenten versehene Partikelchen" als die Ursache des unregelmässigen Ganges der Strahlen. (Handb. d. ges. Augenheilkunde von Graefe und Sämisch. Bd 2 Th. 2 S. 467.) Cadiat (Soc. de biologie, 13. Jan. 1877; Michel's Jahresbr. f. Ophthalmologie 1877 S. 380) führt die Erscheinungen auf Polarisation des Lichtes in den einzelnen Sectoren der Linse zurück. Gegen diese Deutung spricht, dass die Erscheinungen durch Vorsetzen eines Nikol'schen Prismas, sowie durch dessen Drehung vor dem Auge nicht verändert werden. — In neuerer Zeit hat Berlin (Tagblatt der Berliner Naturforscherversammlung 1886 S. 387) eine Form des Linsenastigmatismuses von ganz eigenthümlicher Art bei Thieren beschrieben. Es wäre sehr interessant, die Zerstreuungskreise solcher Linsen kennen zu lernen. — A. Fick hat analoge Erscheinungen an den Bildern von Glaslinsen hervorgerufen, indem er diese mit Wassertropfen belegte. (Vergl. Helmholtz Phys. Optik 2. Aufl. S. 172. Es soll dieser Versuch in der ersten Auflage von Fick's Med. Physik enthalten sein, leider ist mir diese unzugänglich; in der zweiten Auflage finde ich nichts davon.)

Gesellschaft über die Scintillation der Sterne[1]) hielt, gewann ich die Ueberzeugung, dass eine von ihm gebrachte Darstellung des Durchganges der Lichtstrahlen durch die Atmosphäre, und seine Erklärung der durch die wechselnden Unregelmässigkeiten der Atmosphäre bedingten Ablenkungen, mutatis mutandis geeignet sein müsse, die Erscheinungen des irregulären Astigmatismus in ein klareres Licht zu stellen. Eine genauere Ueberlegung und Beschäftigung mit dem Gegenstande führten mich zu den im folgenden niedergelegten Anschauungen. Als Ausgangspunkt diene mir das in Fig. 1 abgebildete strahlige Netzhautbild eines hellen Punktes.

1. Der irreguläre Zerstreuungskreis. Es kann kein Zweifel darüber obwalten, dass diese Figur nichts Anderes darstellt, als den durch die Kurzsichtigkeit des Auges bedingten Zerstreuungskreis des hellen Punktes. Donders hat sich auf die verschiedenste Weise davon überzeugt, und ich wüsste nicht, dass Jemand eine andere Ansicht geäussert hätte. Wo sollte auch der Zerstreuungskreis, den ein kurzsichtiges Auge von dem hellen Punkte haben muss, sein, wenn diese Figur es nicht selbst wäre? Sie unterscheidet sich aber von dem analogen Zerstreuungskreis einer Convexlinse aus Glas dadurch, dass innerhalb des Kreises vielfach Hell und Dunkel abwechseln. Ich will demnach diese Figur, die das myopische und das hypermetropische Auge, sowie jedes auf die Entfernung des hellen Punktes nicht eingestellte Auge sieht, als den irregulären Zerstreuungskreis des menschlichen Auges bezeichnen. Deckt man die Pupille von rechts her zu, so beginnt der Zerstreuungskreis scheinbar auf derselben Seite zu verschwinden, wenn das Auge myopisch ist; auf der entgegengesetzten, wenn es durch ein Brillenglas zum hypermetropischen gemacht wird. Er wird kleiner, wenn man die Pupille künstlich verengert, er wird zu einem Streifen, wenn man durch eine Spalte blickt und dreht sich mit der Drehung der letzteren. Führt man eine kleine Lücke, wie dies Donders that, vor der Pupille herum, so tauchen die einzelnen Theile des irregulären Zerstreuungskreises nacheinander auf.

A. Fick wirft die Frage auf, warum nach dem Rande des Zerstreuungskreises die scheinbare Helligkeit immer geringer wird, wenn das Auge als myopisches wirkt. In der That nimmt der Zerstreuungskreis einen anderen Charakter an, wenn ich ein, mein Auge übercorrigirendes Concavglas vornehme. Die Aenderung liegt theils in dem Farbenspiel, von dem später die Rede sein soll, hauptsächlich aber in der Lichtvertheilung. Es ist jetzt der Rand des Zerstreuungskreises

1) Vergl. K. Exner, Ueber das Funkeln der Sterne und die Scintillation überhaupt (Sitzungsber. der Wiener Akad. der Wissensch. Bd. 84 Abth. 2). Vergl. auch diese Zeitschrift Bd. 23 S. 371.

durchschnittlich sogar heller als die inneren Antheile, sodass die Figur eine scharfe Begrenzung bekommt. Die Erklärung liegt wohl in der Abweichung der Lichtstrahlen wegen der Kugelgestalt. Die entfernter von der optischen Axe auf die Cornea fallenden Strahlen haben ihren Vereinigungspunkt weiter vorne, die Folge davon ist, dass sich ein grosser Theil der Strahlen in bekannter Weise vor dem sog. Brennpunkt in einer kaustischen Fläche schneidet, welche näherungsweise Kegelgestalt hat. Liegt die Netzhaut also vor dem eigentlichen Brennpunkt, so trifft sie jener Lichtkegel, dessen Mantel, die kaustische Fläche, nun die helle Begrenzung des Zerstreuungskreises bilden wird. Anders ist es, wenn die Netzhaut den Lichtkegel hinter dem Brennpunkte auffängt. Da ist derselbe nicht durch eine kaustische Fläche begrenzt, sondern seine Helligkeit nimmt nach aussen allmählich ab. Man kann dieses Verhalten an jeder Convexlinse, durch die man das Bild eines hellen Punktes entwirft, demonstriren, worauf schon Donders hingewiesen hat.

2. Die Lage der Unregelmässigkeiten in den optischen Medien, denen der Zerstreuungskreis seine Eigenthümlichkeiten verdankt, muss in der Nähe der Pupille vermuthet werden, aus Gründen, die Donders klar gelegt hat. Schon die Thatsache, dass die einzelnen hellen und dunklen Flecken ihre Lage nicht ändern, wenn man den leuchtenden Punkt in das indirecte Sehen bringt (soweit dies der Deutlichkeit der Wahrnehmung wegen geht) zeugt dafür. Wenn man aber die Unregelmässigkeiten in der Nähe der Pupillarebene zu suchen hat, so wird man sie wohl nur in die Linse verlegen können. Donders sah die Strahlenfigur des Zerstreuungskreises bei Annäherung des leuchtenden Punktes bis zum vorderen Brennpunkte des Auges in die Strahlenfigur übergehen, welche als entoptisches Linsenbild bekannt ist.

Ich nahm eine menschliche Linse einige Stunden nach dem Tode, gab sie in ein kleines Gefäss, dessen Boden eine planparallele Glasplatte bildete, und das mit 1 % iger Kochsalzlösung gefüllt war. Dasselbe stellte ich auf den Objecttisch eines Mikroskopes; an die Stelle der Blendung hatte ich (zum Ersatz der Cornea) eine Convexlinse eingeschaltet, statt des Mikroskopspiegels einen Spiegel aus schwarzem Glas (um die mehrfache Reflexion zu vermeiden).

So konnte ich mit einer schwachen Linse (Hartnack I) das Bildchen meines Lampencylinderausschnittes bei verschiedenen Einstellungen betrachten, das die Linsencombination entwarf. Ich bekam Bilder, die in allen wesentlichen Punkten mit dem irregulären Zerstreuungskreis übereinstimmten. Auch habe ich die Linse in situ gelassen, den Bulbus im Aequator durchschnitten, die Cornea in die Kochsalzlösung getaucht und auf den Humor vitreus ein Deckgläschen gesetzt, sodass

die Strahlen das Präparat durch eine ebene Fläche verliessen [1]). Durch allmähliches Verschieben der Objectivlinse nach unten konnte man die Unregelmässigkeiten im Zerstreuungskreise in die eigenthümliche Zeichnung übergehen sehen, die an der hinteren Linsenfläche unter diesen Umständen sichtbar wird.

Diese Zeichnung ist eine ganz scharfe und besteht aus hellen Linien, die, wie die Grenzen einzelner Wülste aussehend, dunklere Felder voneinander abtrennen. Die Linien dürften, wenigstens zum Theile, der Ausdruck jener aus der mikroskopischen Anatomie bekannten blasigen Gebilde sein, die der Linsenkapsel nach innen anliegen und im Laufe der Jahre so mannigfaltige Deutung erfahren haben.

Man kann also einen irregulären Zerstreuungskreis am menschlichen Auge objectiv demonstriren, und sein Verhalten bei wechselnder Einstellung leitet auch zu der allgemeinen Anschauung hin, nach welcher die Unregelmässigkeiten in der Linse zu suchen sind.

3. Die Ursachen der Irregularität des Zerstreuungskreises. Geht von einem hellen Punkte eine Lichtwelle aus, so bildet sie, solange sie sich in einem homogenen Medium fortpflanzt, eine Kugeloberfläche. Ist sie von ihrem Ausgangspunkt hinlänglich weit fortgeschritten, so ist ein endlich grosses Stück dieser Kugelwelle als ebene Fläche zu betrachten. Es sei mn (Fig. 2) ein Stück einer solchen ebenen Lichtwellenfläche, oq die Richtung ihrer Fortpflanzung und zugleich die Axe eines Auges. Dringt die Lichtwelle in die Cornea ein, so erleidet sie in derselben eine Deformation, indem die op näher gelegenen Wellen-Antheile schon früher einer Verlangsamung ihres Fortschreitens unterworfen sind, als die entfernteren. Die Lichtwelle passirt demnach als gekrümmte Fläche $m_1 n_1$ die vordere Augenkammer und erleidet bei ihrem Durchtritt durch die Linse eine neue Deformation im selben Sinne, indem die der Axe nahe gelegenen Theile der Wellenoberfläche eine dickere

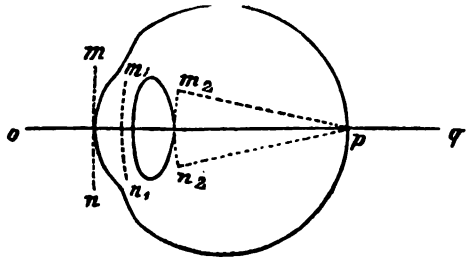


Fig. 2.

1) Ich gehe auf diese und ähnliche Versuche nicht näher ein, weil sie mir theils überflüssig, theils nicht hinlänglich beweiskräftig erscheinen. Letzteres deshalb, weil bei isolirter Linse kleine Antheile von noch anhaftendem Humor vitreus auch Unregelmässigkeiten des Zerstreuungskreises bedingen können, und wenn die Linse in situ gelassen wurde, dieselben im aufgesetzten Glase oder in Verunreinigungen an der Vorderfläche der Cornea gesucht werden könnten.

(Linsen-) Schichte von geringerer Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu durchlaufen haben, als die anderen; diese Deformation wird in der thierischen Linse noch dadurch erhöht, dass auch der Brechungsindex in der Nähe der Axe und des Mittelpunktes der Linse grösser (also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner) ist als an den Seitentheilen. Die Wellenoberfläche tritt also mit starker Krümmung ($m_2 n_2$) aus der Linse aus. Da die Fortpflanzungsrichtung der Lichtstrahlen immer senkrecht auf der Lichtwellen-Oberfläche steht, so sind $m_2 p$, $n_2 p$ und $o p$ die Richtungen von austretenden Strahlen, und wenn, wie es in der Zeichnung vorausgesetzt ist und für das Auge im allgemeinen zutrifft, sich diese Strahlen in einem Punkte (p, dem zweiten Brennpunkte des Auges) schneiden, so ist $n_2 m_2$ eine Kugeloberfläche.

Die Helligkeitsdifferenzen im irregulären Zerstreuungskreis erklären sich nun aus der Annahme, dass die Welle $m_2 n_2$ zwar im ganzen Kugelgestalt besitzt, dass ihre Fläche aber kleine Einbiegungen und Ausbiegungen erlitten hat, etwa so wie eine Orange zwar Kugelform, aber dabei doch an ihrer Oberfläche Unebenheiten, wohl gar Andeutungen ihres Fachbaues zeigen kann. Solche Unebenheiten der Wellenoberfläche müssen die Folge davon sein, dass sich an zahlreichen enge benachbarten Linsenantheilen das Licht mit etwas ungleicher Geschwindigkeit fortgepflanzt hat. Es soll von der anatomischen Grundlage derselben später die Rede sein, und entschieden werden, ob da, wo eine Verzögerung der Lichtwelle stattgefunden hat, die Ursache in einer dickeren Schichte des stärker brechenden Mediums oder in einer localen Zunahme des Brechungsindex derselben zu suchen ist. Da, wo eine Beschleunigung der Lichtwelle stattgefunden hat, ist eine dünnere Schichte oder eine Abnahme des Brechungsvermögens vorauszusetzen. Ich will eine solche Ausbiegung der Wellenoberfläche nach der einen oder der anderen Richtung eine Delle nennen. Wie gross solche Dellen auf der Wellenoberfläche thatsächlich sind (senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Strahlen) und wie tief sie (in der Richtung der Strahlen) reichen, sowie die voraussichtliche Gestalt derselben soll alsbald erörtert werden. Vorerst will ich noch erläutern, wieso diese Dellen die Helligkeitsunterschiede im Zerstreuungskreise überhaupt erklären. Ich wähle der Einfachheit wegen den Zerstreuungskreis des hypermetropischen Auges.

Es sei $m n$ in Fig. 3 wieder ein grösster Kreis der eben aus der Linse ausgetretenen Lichtwellenoberfläche. Dann bildet f den Brennpunkt derselben. Befindet sich die Netzhaut in $r r$, so wird sie von einem gleichmässig hellen Kreise erleuchtet; als Maass dieser Helligkeit bei Verschiebungen von $r r$ zwischen f und $m n$ kann die Dichtigkeit der Strahlen dienen, welche auf $r r$ auffallen, wenn dieselben als

Radien in gleichen Abständen auf mn aufgetragen gedacht werden. Das ist der Grund, aus welchem der Zerstreuungskreis bei fortschreitender Correction des Auges immer heller wird, bis er im Focus sein Maximum erreicht.

Nun möge aber die Wellenoberfläche eine Delle erlitten haben. Dieselbe möge so gross sein, dass sie die ganze eine Hälfte von mn betrifft, und zwar möge hier in $m\mu m_1$ der Krümmungshalbmesser

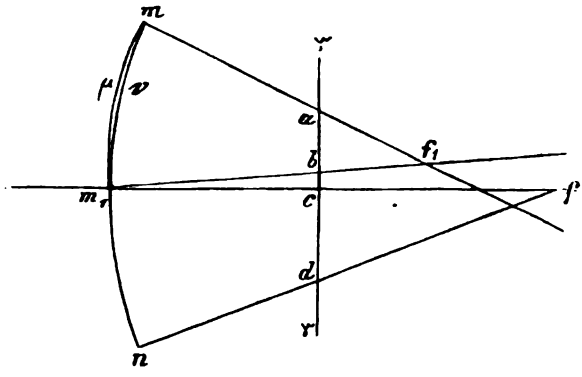


Fig. 3.

kleiner sein, als in $m_1 n$. Es werden jetzt die $m\mu m_1$ bildenden Strahlen ihren Brennpunkt in f_1 haben, vorausgesetzt, dass die Delle ihrer Form nach aufgefasst werden kann als ein auf die ursprüngliche Welle aufgesetztes Kugelsegment. Befindet sich jetzt die Netzhaut in rr, so wird sie von zwei ungleich dichten Strahlenbündeln getroffen, und es muss die Helligkeit in dem $m\mu m_1$ angehörigen Theil des Zerstreuungskreises doppelt so gross sein, wie in dem $m_1 n$ angehörigen, wenn die Entfernung von f nach rr doppelt so gross ist, wie von f_1 nach rr. Denn, wenigstens bei den im menschlichen Auge obwaltenden Verhältnissen können wegen der geringen Länge von mn und der grossen Länge von $m_1 f$ die Dreiecke $f_1 ab$ und fcd als ähnlich betrachtet werden, woraus, da

$$bf_1 = \frac{cf}{2} \text{ und } m\mu m_1 = m_1 n$$

vorausgesetzt wurde, sich die doppelte Dichtigkeit der Strahlen in ab gegen cd ergibt.

Würde die Delle der Kugelwelle die entgegengesetzte Richtung haben, d. h. durch eine Verminderung der Krümmung $m\nu m_1$ entstanden sein, so würde der Brennpunkt derselben hinter f fallen und rr würde in ab von Licht geringerer Intensität als in dem grössten Theile von cd getroffen.

Fig. 4 macht dieses Verhalten für zwei kleinere Dellen von entgegengesetzter Art anschaulich, deren eine ihren Brennpunkt in f_1, die andere in f_2 hat. Sie zeigt zugleich, wie sich die Lichtvertheilung im Zerstreuungskreise ändern muss, wenn die Netzhaut dem Focus mehr oder weniger genähert wird. Es rührt dieser Wechsel von der verschiedenartigen Durchschneidung der Strahlen her, und die durchschnittliche Abnahme der Helligkeitsdifferenzen bei Entfernung von den Brennpunkten wird durch die unvollkommene Trennung der einzelnen Strahlenbündel bedingt.

Selbstverständlich ist hier unter „Brennpunkt" einer Delle nicht ein regelrechter Brennpunkt, sondern nur der Punkt zu verstehen, wo

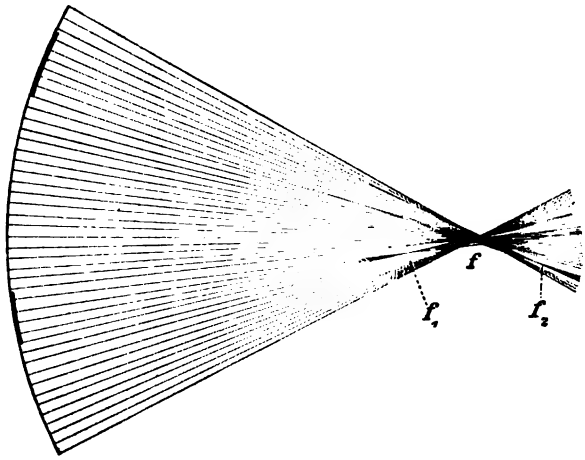


Fig. 4.

die von derselben ausgehenden Strahlen am dichtesten beisammen liegen. Man kann eben nur in erster Annäherung die Dellen als linsenförmige Ausbuchtungen betrachten, die auf der Kugelwelle aufsitzen. Karl Exner führt ein Beispiel aus dem täglichen Leben an, das die Wirkungen kleiner Unebenheiten, erzeugt an einer ebenen Wellenoberfläche, demonstrirt: Wenn Sonnenlicht durch Fensterscheiben fällt, so sieht man häufig an der das Licht auffangenden Wand oder dem Fussboden eine eigenthümliche wellenartige Zeichnung, wie der starr gewordene Reflex einer bewegten Wasseroberfläche. Hier haben sonst kaum bemerkbare Unregelmässigkeiten im Glase Verzögerungen oder Beschleunigungen des Lichtes hervorgerufen, sodass die Lichtwellenoberfläche buckelig geworden ist. Jede helle Stelle in der genannten Zeichnung kann als Brennpunkt, Brennlinie oder Zerstreuungskreis eines solchen Buckels betrachtet werden. Die Brennweiten sind natürlich sehr gross.

Nach diesen Auseinandersetzungen allgemeiner Art wende ich mich wieder der Linse zu, um zu zeigen, dass sie auf dieselbe wirklich anwendbar sind. Ich habe schon hervorgehoben, dass wir uns die Dellen, welche die Lichtwelle beim Durchtritt durch die Linse erhält, klein und zahlreich vorzustellen haben. Auch sind sie von sehr geringer Tiefe, wie eine Betrachtung ergibt, die ich hier folgen lasse. Ich setze bei derselben wie oben voraus, dass die Dellen auf einer den Brennpunkt enthaltenen Schnittebene kreisförmig gekrümmt erscheinen, indem ich darauf hinweise, dass jeder hinlänglich kleine Abschnitt einer stetig gekrümmten Curve als Kreisabschnitt betrachtet werden kann.

Wir können natürlich nur in erster Annäherung eine Berechnung von der Grösse und Tiefe der Delle, sowie daran anschliessend, von den Unregelmässigkeiten im optischen Bau der Linse ausführen, doch handelt es sich hier auch nur um Constatirung der Grössenordnung, mit der wir es zu thun haben, um zu beurtheilen, ob sie mit jener übereinstimmt, in welcher sich die uns bekannten, dem Bau der Linse angehörigen Grössen bewegen.

Um die positive oder negative Tiefe einer Delle zu bestimmen, ist es nöthig, ihren Krümmungshalbmesser und ihre Ausdehnung auf der Oberfläche der gegebenen Kugelwelle zu kennen. Letztere hat, wenn wir sie bei ihrem Austritt aus der Linse betrachten [1]) einen Krümmungshalbmesser, gleich der Entfernung des hinteren Linsenpols vom Brennpunkte, also:

$$R = 14{,}6470 \text{ mm}.$$

Um den Krümmungsradius einer Delle zu bestimmen, benutze ich den aus Fig. 2 und 3 ersichtlichen Umstand, dass die mehr oder weniger correcten Brennpunkte der Dellen in jener Entfernung vom Gesammtbrennpunkt zu suchen sind, in welcher die Helligkeitsdifferenzen im Zerstreuungskreise am grössten sind. Nun wird man zwar, indem man sein Auge mehr oder weniger corrigirt, diesen Punkt nur näherungsweise bestimmen können, was leicht begreiflich ist, wenn man erwägt, dass die Brennpunkte verschiedener Dellen recht ungleiche Entfernung vom Gesammtbrennpunkte haben dürften; doch genügt für unsere Betrachtungen ein Schätzungswerth. Ich finde die Helligkeitsdifferenzen am grössten, wenn der Zerstreuungskreis meines 2 mm grossen Ausschnittes im Blechcylinder der Gaslampe (derselbe aus der genannten Entfernung von 11,4 m betrachtet) die Grösse von 29,4 mm zu haben scheint (verglichen mit der Breite eines neben der Lampe angebrachten

1) Ich lege hier die Werthe aus v. Helmholtz Phys. Optik 2. Aufl. S. 89 zu Grunde.

Papierstreifens). Derselbe bildet dann einen Stern mit scharf gezeichneten Strahlen.

Aus der Grösse des Zerstreuungskreises und der Grösse meiner Pupille (deren Radius = 2 mm) lässt sich der Brennpunkt der Delle näherungsweise berechnen.

Derselbe liegt 0,192 mm hinter dem normalen Brennpunkt, sodass der Krümmungsradius dieses Stückes der Lichtwellenoberfläche

$$R_1 = 14{,}839 \text{ mm ist.}$$

Ueber die Flächenausdehnung einer Delle können wir uns auf Grund der Fig. 1 eine Vorstellung bilden. Ein Plus an Helligkeit an einer Stelle des Zerstreuungskreises (vergl. Fig. 3 *ab*) wird immer von einem Minus in seiner Umgebung begleitet sein (vergl. Fig. 3 *bc*). Wir können also im allgemeinen die Breite eines dunklen plus der eines hellen Antheiles als Ausdruck der Grösse einer Delle unserer Kugelwelle betrachten. Nun ist in Fig. 1 die genannte Breite etwa $^1/_8$ des ganzen Radius. Es wird also die Transversalausdehnung einer Delle der Lichtwelle, da wo sie die Linse verlässt, mit 0,25 mm geschätzt werden können.

Berechnet man nun, wie weit diese Delle an Stelle der tiefsten Einbiegung von der normalen Kugelwelle abweicht, so findet man den überaus geringen Werth von 1—2 Zehntausendstel eines Millimeters[1]).

Es genügt also zur Erklärung der Helligkeitsdifferenzen im irregulären Zerstreuungskreise anzunehmen, dass die Lichtwellenoberfläche nach ihrem Austritt aus der Linse Verbiegungen erhalten hat, deren Tiefe nur einen Bruchtheil einer Wellenlänge[2]) beträgt.

Es liegt nun sehr nahe, als anatomische Grundlage dieser Verbiegungen den strahligen Bau der Linse, insbesondere an ihren Polen zu betrachten. Ich habe schon bemerkt, dass die Dellen der Wellenoberfläche von einer Breite anzunehmen sind, die durch einige Zehntel eines Millimeters gemessen wird. Das stimmt recht gut mit der Breite von Spalträumen, die wir zwischen den Fasermassen der Linse an ihrem Pole vermuthen können, oder, präciser ausgedrückt, mit der jener dreikantig begrenzten Räume, die zwei Linsenfaserbündel mit der

1) Die einfache Berechnung besteht darin, dass man den „Pfeil" auf der Sehne von 0,25 mm Länge für die beiden genannten Krümmungshalbmesser bestimmt; ihre Differenz ist der gesuchte Werth und beträgt:

0,0001324 mm.

2) Die Wellenlänge für D. in Luft = 0,0005890 (nach Ditscheiner), und den Brechungsindex des Humor vitreus = 1,3365 (nach v. Helmholtz) angenommen, ergibt für die Wellenlänge der genannten Farbe in dieser Flüssigkeit

$\lambda = 0{,}00044$ mm.

Linsenkapsel einschliessen. In der That, denken wir uns eine Linse, die im präparirten Zustande die bekannte Sternfigur an ihrem Pole durch Dehiscenz der Fasermassen zeigt, glatt überspannt durch die Linsenkapsel, so entstehen diese Räume. Im Leben dürften sie freilich von geringerer Grösse sein, und sind jedenfalls wegen der in ihnen enthaltenen Flüssigkeit, die näherungsweise gleiches Brechungsvermögen mit den Linsenfasern hat, wenig oder gar nicht sichtbar.

Versuchen wir, ob die obige theoretische Betrachtung mit den anatomischen Thatsachen stimmt. Die Delle der Lichtwellenoberfläche fanden wir etwa $^1/_3$ einer Wellenlänge tief. Nehmen wir die Tiefe einer solchen Spalte zwischen den Fasermassen der Linse so gross an, wie die Breite (also ca. 0,25 mm), so muss, wenn der Brechungsindex der Linsenfasern

$$n_l = 1{,}4371$$

(nach v. Helmholtz) gesetzt wird, der Brechungsindex der den Spaltraum erfüllenden Substanz

$$n_f = 1{,}43729$$

sein, wenn jene Ausbiegung im angegebenen Ausmaasse und im Sinne einer Verzögerung der Lichtwellenoberfläche Platz greifen soll[1]).

Es ist aber klar, dass wir jene Spalträume ohne complicirtere Hilfsmittel kaum bemerken werden, wenn ihr Inhalt ein Brechungsvermögen hat, das sich nur um ein bis zwei Einheiten der vierten Decimale von dem der Umgebung unterscheidet. Hält man die Spalträume für tiefer als $^1/_4$ mm, so kann sich ihr Brechungsindex noch mehr dem der Linsenfasern nähern.

Im vorstehenden ist gezeigt worden, dass, und wie sich die Helligkeitsunterschiede in den verschiedenen Antheilen des irregulären Zerstreuungskreises aus minimalen optischen Unregelmässigkeiten der Linse qualitativ und quantitativ erklären lassen. Ich habe bei der Berechnung, wie schon hervorgehoben worden, angenommen, dass die Lichtwellenoberfläche in der Linse Dellen im Sinne stärkerer Krümmung erhalten hat. Es geschah dies der Anschaulichkeit und der Darstellung wegen. Man bekommt natürlich analoge Resultate für die Lichtvertheilung im Zerstreuungskreis, wenn man Dellen im Sinne schwächerer

1) Es ist nämlich die Länge einer Lichtwelle in der Linse

$$\lambda_l = 0{,}00041 \text{ mm}$$

und die in der fraglichen Flüssigkeit, entsprechend der genannten Verzögerung, und der Tiefe der Schichte

$$\lambda_f = 0{,}0004098 \text{ mm}$$

Daraus ergibt sich $n_f = 1{,}43729$.

Krümmung annimmt. Es frägt sich, welcher von beiden Fällen der richtigere ist, oder ob Dellen beider Arten thatsächlich vorkommen. Diese Frage kann natürlich nur bezüglich der ausgedehnteren Dellen gestellt werden, denn es ist selbstverständlich, dass jeder Uebergang der normalen Wellenoberfläche in eine Delle geringerer Krümmung wenigstens in jeder der Trennungsfläche der beiden Krümmungen nicht parallelen Schnittrichtung als Delle von kürzerem Krümmungshalbmesser wirkt. Umgekehrt an dem Uebergang der normalen Kugelwelle in eine Delle stärkerer Krümmung. Der Ausdruck hiervon sind die in Fig. 4 ersichtlichen Ueberschneidungen der Dellen-Strahlen mit den benachbarten Strahlen auch ausserhalb der daselbst angegebenen drei Brennpunkten und es können die Helligkeitsunterschiede im Zerstreuungskreise des hypermetropischen Auges sich auch auf diesem Wege erklären. Es handelt sich also darum, welcher Art sind die grössten Dellen, und hierauf lässt sich die Antwort aus dem Verhalten des Zerstreuungskreises entnehmen.

Ich habe wenigstens für mein Auge den Eindruck, als wären die Helligkeitsdifferenzen nennenswerth grössere, wenn sich meine Netzhaut hinter dem Brennpunkt befindet, als wenn ich mein Auge künstlich zu einem hypermetropischen gemacht habe — bei gleicher Grösse der Zerstreuungskreise [1]). Da, wie wir sahen, die Helligkeitsdifferenzen am stärksten da sind, wo die mehr oder weniger correcten Brennpunkte der Dellen liegen, so dürfen dieselben hinter dem Brennpunkte des Auges gesucht werden, d. h. die Dellen der Lichtwellenfläche haben im allgemeinen oder in der Mehrzahl geringere Krümmungshalbmesser als die Total-Wellenoberfläche selbst. Wir haben also jene Spalträume zwischen den Fasermassen der Linse mit Substanz erfüllt zu denken, deren Brechungsvermögen um jene wenigen Einheiten der vierten Decimale kleiner ist, als das der Linse. Damit stimmt ganz wohl unsere Vorstellung, dass eine die Spalträume ausfüllende Linsenflüssigkeit kaum die Höhe des Brechungsindex erreichen wird, welche die mit derselben Flüssigkeit getränkten Fasern haben.

Dafür, dass es in der That die anatomischen Bildungen des Linsenpoles und seiner Umgebung sind, welche den irregulären Zerstreuungskreis bedingen, möge noch ein Umstand angeführt sein.

Es ist: 4. Die strahlige Anordnung von Hell und Dunkel im Zerstreuungskreis. Sie gemahnt auf den ersten Blick an das Bild des Linsenpoles. Es sind im allgemeinen radiäre

1) Geht man mit der Stärke der vorgesetzten Convexgläser über ein gewisses Maass, d. h. macht man sein Auge nennenswerth kurzsichtiger als meines ohnehin schon ist ($^1/_{14}$—$^1/_{16}$), so bemerkt man sehr deutlich die Abnahme der Helligkeitsdifferenzen im Zerstreuungskreise auch im kurzsichtigen Auge.

Strahlen, welche in grösserer oder geringerer Entfernung vom Centrum durch hyperbolische Curven miteinander in Verbindung treten. Ich möchte behaupten, es müsse sich in der Linse meines rechten Auges gerade am Pole ein Faserbündel finden, welches zwischen zwei Spalträumen durchzieht und so zu dem zweigetheilten Centrum der Fig. 1 Veranlassung gibt.

Die Strahlen dieser Figur sagen aus, dass die Dellen der Lichtwellenoberfläche im allgemeinen nicht runde Buckeln sind, sondern dass sie Striemen ganz besonderer Art in die Kugeloberfläche schneiden, Striemen, welche wenigstens in den wesentlichsten Zügen die Gestalt nachahmen, welche eine von ihrer Kapsel entblösste und etwas eingetrocknete Linse an ihrer Oberfläche zeigt.

Die radiären Strahlen der Figur kann man sich, entsprechend dem oben Mitgetheilten, auch dadurch entstanden denken, dass schmale, radiär um die Augenaxe gestellte Cylinderlinsen (die Spalträume zwischen den Fasern), deren Cylinderaxen senkrecht auf der Augenaxe stehen, von der Lichtwelle durchsetzt werden. So wird es klar, dass diese Unregelmässigkeiten nicht so sehr in den Meridionalebenen, als vielmehr hauptsächlich in jenen Ebenen Platz greifen, die senkrecht auf den meridionalen Strahlen der Figur, und damit den Linsenfurchen stehen. (Es ist das jene Dimension, die ich oben als den transversalen Durchmesser einer Delle in Rechnung gebracht habe.)

Ich möchte hier bemerken, dass es durchaus nicht nothwendig ist, die oben vorausgesetzten Spalträume zwischen Linse und Kapsel als im Leben vorhanden anzunehmen. Auch wenn der ganze Raum unterhalb der Kapsel mit Linsenfasern erfüllt ist, können diese selbst, wenn sie stellenweise, etwa durch stärkere Durchtränkung mit Linsenflüssigkeit, einen um weniges kleineren Brechungsindex haben, das Phänomen hervorrufen. Denn auch ein, durch parallele ebene Flächen begrenzter durchsichtiger Körper wirkt wie eine Cylinderlinse, wenn sein Brechungsindex nach zwei entgegengesetzten und auf den auffallenden Lichtstrahlen senkrecht stehenden Richtungen zu- oder abnimmt [1]). Alle Dellen der Lichtwellenoberfläche können auch nach diesem Principe, also ohne scharfe Grenze zwischen zwei Medien von verschiedenem Brechungsvermögen, als entstanden gedacht werden.

5. Die Farben des irregulären Zerstreuungskreises erklären sich in einfacher Weise aus der gewöhnlichen Chromasie des Auges. Die aus der Linse austretende Lichtwellenoberfläche hat, sofern sie aus rothem Lichte besteht, einen grösseren Krümmungshalb-

1) Vergl. Sigmund Exner, Ueber Cylinder, welche optische Bilder entwerfen. Pflüger's Arch. f. d. ges. Phys. Bd. 38 S. 274.

messer (*m r n* in Fig. 5), als, sofern sie aus violettem besteht (*m v n*). Sind *f* und f_1 die beiden entsprechenden Brennpunkte, und befindet sich bei *d* in jeder der Lichtwellenoberflächen eine in der Linsenstructur bedingte Delle, so wird der Brennpunkt derselben für rothes Licht irgendwo auf der Strecke $d\varrho$ zu suchen sein, der für violettes Licht auf der Strecke $d\varphi$. Im myopischen Zerstreuungskreise (vergl. *k k*) wird dann der durch die Delle verursachte lichte Fleck auf seiner der Augenaxe zugewendeten Seite hauptsächlich langwellige, im Zerstreuungskreise des hypermetropischen Auges (vergl. *h h*) hauptsächlich kurzwellige Strahlen haben. Auf der anderen Seite natürlich jedesmal die Strahlen des entgegengesetzten Endes des Spectrums. In der That hat schon Donders auf diese Chromasie der einzelnen hellen Flecke hingewiesen, und darauf aufmerksam gemacht, dass sich jeder derselben in der Farbenvertheilung bei verschiedener Einstellung des Auges so verhält, wie der ganze Zerstreuungskreis eines hellen Punktes.

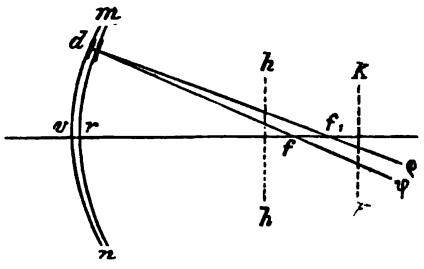


Fig. 5.

Die Farben sieht man wegen der ausserordentlichen Schmalheit der Brennlinien nicht in diesen selbst am deutlichsten, sondern da, wo die Brennlinie selbst schon einen Zerstreuungskreis bildet. Denkt man sich die Netzhaut von dieser Stelle aus nach vorne oder nach hinten verschoben, so werden die Farben, sowie die Helligkeitsunterschiede wieder allmählich schwinden, indem sie mit den Farben anderer Dellen und mit anderen Strahlen überhaupt zur Deckung kommen.

6. Beziehung des irregulären Astigmatismus zur Sehschärfe. Es ist aus dem Mitgetheilten ersichtlich, dass der irreguläre Astigmatismus zum mindesten einen der Gründe bildet, aus welchen wir einen sehr kleinen hellen Punkt, auch bei vollkommenster Correction des Auges immer grösser sehen, als er thatsächlich ist. Da der Brennpunkt einer Delle eben nicht im allgemeinen Brennpunkte liegt, so sind die von derselben ausgehend gedachten Strahlen im Brennpunkte des Auges noch nicht, oder nicht mehr in einem Punkte vereinigt (vergl. Fig. 3 und 4). Die kreisförmige Oeffnung im Blechschirm meines Gasbrenners von 2 mm Durchmesser erscheint mir in einer Entfernung von 11,4 m 1,8 cm breit (verglichen mit einem danebengehaltenen und schwach beleuchteten Papierstreifen, dessen Breite ich so lange änderte, bis er mir der der Oeffnung gleich schien). Dabei war mein Auge so vollkommen als möglich corrigirt, und vermochte

ich durch schwache Accomodation den Uebergang von zu wenig bis zu viel der Correction zu verfolgen. Es erscheint also der hinlänglich kleine Punkt 9 mal so gross, als er ist. Es wird das nicht überraschen, wenn man bedenkt, dass und wie wir die Sterne sehen. Setzt man nun eine passend berusste Glasplatte vor das Auge, so erkennt man, dass innerhalb des Netzhautbildes noch sehr nennenswerthe Helligkeitsdifferenzen obwalten, denn nun wird der helle Fleck sehr bedeutend kleiner, indem sich in seinem Centrum der wahre Brennpunkt durch bedeutendere Helligkeit auszeichnet. Nichtsdestoweniger wird man nicht daran zweifeln, dass von dem Grade des irregulären Astigmatismus, d. h. der transversalen Ausdehnung der Dellen und der Entfernung ihrer Brennpunkte von dem Brennpunkte des Auges, die Sehschärfe mit abhänge, wenigstens insofern sie eine Function der Schärfe des Netzhautbildes, nicht der Leistungen der Retina ist.

Bei unvollkommener Einstellung der Augen hingegen werden die mehr oder weniger correcten Brennpunkte der einzelnen Dellen zur Diplopia oder Polyopia monocularis Veranlassung geben. Der Charakter derselben muss von der Grösse, Tiefe und Zahl der Dellen abhängen, welche die Lichtwellenoberfläche bei ihrem Durchtritt durch die optischen Medien des Auges erlitten hat. So habe ich rechterseits eine Diplopie, deren Erklärung sich beim Anblick der Fig. 1 von selbst ergibt. Sie liegt in den zwei auffallend hellen Stellen in der Nähe des Centrums des Zerstreuungskreises. Jede derartige Diplopie oder Polyopie ist aber dadurch charakterisirt, dass sie bei Correction des Auges schwindet.

Die durch die Linsenstructur bedingten Beugungserscheinungen.

Wenn zwischen zwei aneinandergrenzenden optischen Medien ein solcher Unterschied des Brechungsvermögens herrscht, dass eine dieselben durchdringende Lichtwellenoberfläche in einem der Medien um Bruchtheile einer Welle gegen den durch das andere Medium passirenden Antheil verzögert wird, so sind dadurch die Bedingungen zu Beugungsphänomenen gegeben [1]). Es ist also zu erwarten, dass der geschilderte optische Bau der Linse solche hervorrufen wird. Im gewöhnlichen irregulären Zerstreuungskreise ist hiervon nichts, oder doch nur weniges zu sehen. Der Grund hiervon liegt aber, falls der helle Punkt klein genug gewählt wurde, nur in der geringen Lichtstärke der Beugungsbilder. Steigert man die Lichtstärke, so treten anscheinende Verlängerungen der Strahlen des irregulären Zerstreuungskreises auf,

1) Vergl. Sigmund Exner, Ueber optische Eigenschaften lebender Muskelfasern. Pflüger's Arch. f. d. ges. Phys. Bd. 40 S. 360.

welche sich bei Anwendung sehr intensiver Lichtpunkte (elektrisches Bogenlicht, kleine Sonnenbildchen etc.) zu dem von Helmholtz mit dem Namen des Haarstrahlenkranzes belegten Phänomen umgestalten. Die ersten Anfänge dieser Beugungserscheinungen sehe ich schon bei meinem kleinen Ausschnitte (2 mm Durchmesser in einer Entfernung von 10—12 m) im Cylinder des Gasrundbrenners, und bei mässig ausgeruhtem Auge. Man kann sich da überzeugen, dass diese lichtstärksten Antheile des Beugungsphänomens in der That radiär stehende Strahlen bilden; sie müssen also ihre Entstehung tangential verlaufenden Structurelementen der Linse verdanken. Es sind das jene Scheitel der hyperbolischen Curven, durch welche je zwei radiär gestellte Spalten zwischen den Linsenfasermassen in der Nähe des Poles ineinander übergehen. Es war zu erwarten, dass sich diese Stellen, da sie dioptrisch am schärfsten hervortreten, auch im Beugungsbilde am meisten bemerkbar machen, wenn man bedenkt, dass die Gangunterschiede der beiden Strahlenantheile nur nach Bruchtheilen einer Wellenlänge zählen, und an diesen Stellen unzweifelhaft am grössten sind.

Man kann an der genannten Vorrichtung auch beobachten, dass, wie nothwendig erwartet werden muss, der Ort des Beugungsstrahles auf der Retina sich ändert, je nach den, dem Auge vorgesetzten Brillengläsern, d. i. nach der Grösse des irregulären Zerstreuungskreises, indem sich das Beugungsphänomen immer direct den Strahlen des Zerstreuungskreises anschliesst. Endlich bemerkt man, dass ein solcher Strahl nicht continuirlich, sondern unterbrochen ist, entsprechend den einzelnen Beugungsspectren, aus denen er der Länge nach zusammengesetzt ist.

Steigt die Intensität des Lichtpunktes, so werden die Beugungsbilder intensiv genug, um die Farben zu zeigen. Die Spectren, aus denen jeder Strahl des nun schön ausgebildeten Haarstrahlenkranzes besteht, nehmen jetzt entsprechend der Form der beugenden Structur selbst hyperbolische Gestalt an, eine grosse Menge von Beugungsspectren höherer Ordnung umgeben nun den irregulären Zerstreuungskreis, in welchem selbst wegen zu grosser Intensität feinere Details nicht mehr gesehen werden können, zum Theile wohl auch durch die sich mit ihnen deckenden Beugungsphänomene unkenntlich werden, die in den Zerstreuungskreis hineinfallen. Auch nehmen die Farben wieder an Deutlichkeit ab, da sich die zahlreichen Beugungsspectren zum grossen Theile decken und jenen bekannten weisslichen Lichtschimmer erzeugen, der die Lichtquelle auf eine gewisse Strecke weit zu umgeben scheint.

Ueber das elektrische Verhalten des Quarzes. I.[1])

Von

Dr. **Paul Czermak.**

Die durch Gaugain, Hankel u. A. als pyro-, thermo-, actino- und piëzoelektrische Phänomene bekannten Erscheinungen an hemimorphen Krystallen, wurden durch die Untersuchungen von J. und P. Curie[2]), Friedl[3]), Röntgen[4]) und Kundt[5]) auf eine einheitliche Ursache zurückgeführt, nämlich auf die durch verschiedene Ursachen hervorgerufene Aenderung der inneren Polarität oder dielektrischen Momente der Volumelemente des Krystalles. Innig damit zusammenhängend sind die von Röntgen und Kundt am Quarze studirten elektro-optischen Phänomene.

Da bisher diese verschiedenen Erscheinungen nur getrennt und an verschiedenen Krystallindividuen untersucht wurden, so sollte es der Zweck der vorliegenden Arbeit sein, alle diese Erscheinungen an demselben Objecte und womöglich in quantitativen absoluten Messungen durchzuführen. Auf diesem Wege, glaube ich, ist am meisten zu hoffen, den gemeinsamen Zusammenhang und vielleicht auch schliesslich das Wesen selbst dieser Phänomene zu ergründen.

Die Untersuchung zerfällt dadurch naturgemäss in drei Abschnitte: 1. In die piëzoelektrischen Versuche, welche den Verlauf und die Orientirung der elektrischen Erscheinungen am Quarze beim Drucke ergeben. 2. In die elektro-optischen Versuche, welche die durch äussere elektrische Kräfte erzeugten optischen Veränderungen in demselben Krystalle bewirken und 3. als vermittelndes Bindeglied reihen sich die piëzo-optischen Versuche daran, welche durch me-

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 96 S. 1217.

2) Compt. rend. vol. XCI p. 294, 383; vol. XCII p. 186, 350; vol. XCIII p. 117, 204.

3) Compt. rend. vol. XCI p. 383.

4) Wied. Ann. Bd. 18 S. 213, 534.

5) Wied. Ann. Bd. 18 S. 228.

chanische Deformation dieselben optischen Veränderungen im Krystalle hervorbringen, wie die äusseren elektrischen Kräfte.

I. Piëzo-elektrische Versuche.

a) Relative Messungen.

Ein wohlausgebildeter von Verwachsungen freier Quarzkrystall zeigt bekanntlich folgende piëzoelektrischen Erscheinungen. Drückt man einen solchen Krystall senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe in der Richtung einer der drei Nebenaxen, so zeigen sich metallische, an den Druckstellen befindliche Elektroden elektrisch. Und zwar mit abwechselndem Vorzeichen, sodass sich dieselben für zunehmenden Druck folgendermaassen bezeichnen lassen (Fig. 1). Bei Entlastung oder Dilatation kehren sich alle Vorzeichen um. Genau in der Mitte zwischen diesen drei Richtungen (piëzoelektrische Axen nach Röntgen) erhält man beim Drücken gar keine Wirkung. Röntgen nennt daher auch diese Richtungen Axen fehlender Piëzoelektricität. Bei gleichmässiger Erwärmung oder Abkühlung verhält sich der Krystall natürlich ebenso, als ob er einer gleichmässigen Dilatation oder Compression unterworfen wäre. Wird er in einem solchen Zustande nach der Kundt'schen Methode mit einem Gemenge von Mennige und Schwefel bestäubt, so zeigen sich die Kanten des sechsseitigen Prismas abwechselnd roth und gelb gefärbt, ein Zeichen, dass dieselben positiv und negativ elektrische Theilchen anziehen.

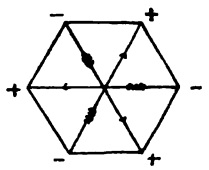


Fig. 1.

Um nun aber den ganzen Verlauf der elektrischen Spannungen besser studiren zu können, liess ich mir zwei Quarzcylinder schleifen, deren geometrische Axe mit der krystallographischen Hauptaxe oder optischen Axe zusammenfiel. Diese Cylinder wurden nun parallel zu den Erzeugenden ihrer Mantelflächen, genau radial gepresst und die auftretende Spannung an einem Elektrometer gemessen.

Die Cylinder hatten eine Länge von ungefähr 2 cm und einen Durchmesser von 1,5 cm. Ihre Mantelflächen waren in 24 Theile getheilt, also von 15 zu 15 Graden und dies durch Linien, welche längs der ganzen Mantelfläche geführt waren, angezeichnet.

Die Presse, welche zu den Druckversuchen verwendet wurde, hatte folgende Einrichtung (Fig 2). Eine starke U-förmige Klammer A aus Messingguss trug an ihrem unteren, etwas vorstehenden Ende eine halbirte Stahlschneide S. Jede dieser Schneidenhälften war mit Schrauben r verstellbar und fest zu klemmen. Auf diesen Schneiden ruhte ein Hebel H mit Laufgewicht L und einem Taragewichte T,

welches den Hebel, wenn das Laufgewicht entfernt war, vollkommen ausbalancirte.

In das kürzere und verbreiterte Hebelende war eine schmale Stahlbacke b_1 eingelassen. Genau gegenüber derselben trug die U-förmige Klammer eine zweite, aber durch Hartgummi isolirte Stahlbacke b_2, welche man mittels der Schraube c etwas verschieben konnte. Zwischen

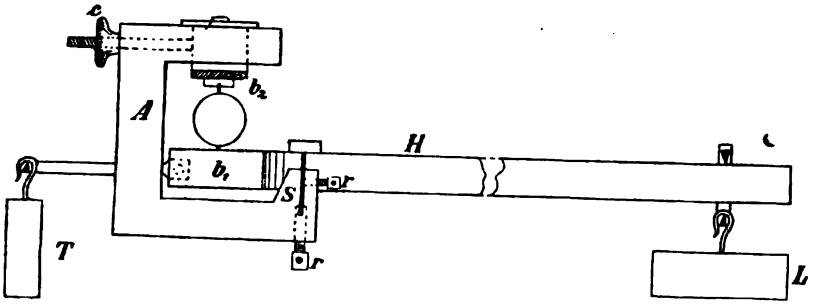


Fig. 2.

diese Stahlbacken wurde nun der Quarzcylinder eingelegt. Die Schneiden und die bewegliche Backe wurden so corrigirt, dass der Cylinder genau diametral und längs zweier Erzeugender seiner Mantelfläche gedrückt wurde.

Die Backen wurden entweder genau auf einen vorgezeichneten Strich der Theilung gesetzt oder in die Mitte zwischen zwei solche Striche, sodass der Cylinder von 7,5 zu 7,5 Graden abgedrückt wurde. Die Presse hatte natürlich eine solche Breite, dass die Backen zu beiden Seiten des Quarzes noch einige Millimeter vorstanden.

Von der isolirten Backe b_2 ging eine Leitung zu einem Hankel'schen Goldblattelektrometer. Dieses empfiehlt sich sehr zu solchen Messungen, da es eine sehr kleine Capacität besitzt. Die Ablesung geschieht mit einem Mikroskope mit Ocularmikrometer und sind die Ausschläge des Goldblattes bei passender Justirung den Spannungen fast genau proportional. Ich verwendete es in der Art, dass ich die beiden Conductorplatten desselben mit den Polen einer Zink-Kupferbatterie in Wasser von 100 Elementen verband. Die Mitte dieser Batterie war zur Erde abgeleitet. Ebenso war die zweite Backe mit den übrigen Metalltheilen der Presse zur Erde abgeleitet, während das Goldblatt mit der isolirten Backe in Verbindung stand.

War die Luft im Zimmer trocken, der Quarz vor dem Einlegen gut gereinigt und mit einem Leinentuche gut abgerieben, so schlug das Elektrometer beim Auflegen des Gewichtes, welches vermittelst einer Winde ganz ohne Erschütterung auf- und abgesetzt wurde, aus

und blieb ruhig auf einem bestimmten Theilstriche stehen, bis die isolirten Theile wieder zur Erde abgeleitet wurden. Nach Abtrennung der Erdleitung wurde dann das Laufgewicht wieder abgehoben, worauf das Elektrometer einen gleich grossen aber entgegengesetzten Ausschlag zeigte.

Vor und nach jedem vollständigen Druckversuche wurde das Elektrometer mit Daniell'schen Elementen geaicht und aus beiden Beobachtungen das Mittel genommen. Die am Quarze aufgetretenen Spannungen wurden dann nach dieser Aichung interpolirt und in Volts ausgedrückt. Die zur Aichung verwandten Elemente hatten, wie ein Vergleich mit Calomelelementen ergab, und welchen Vergleich Herr Lindeck die Liebenswürdigkeit hatte, an einem sehr empfindlichen Capillarelektrometer vorzunehmen, eine elektromotorische Kraft von 1,12 Volt im Mittel.

Wurde der Quarzcylinder längs seiner ganzen Peripherie herum gedrückt, so ergaben sich sechs Stellen, wo kein Ausschlag erfolgte. Zwischen denselben befanden sich abwechselnd drei positive und drei negative Maxima und das Anwachsen und Abnehmen ging in ganz stetiger Weise vor sich. Trägt man die Spannungen als Ordinaten zu den zugehörigen Druckstellen, auf der längs einer Geraden abgewickelten Peripherie des Cylinders, als Abscissen auf, so bekommt man eine sich dreimal wiederholende Curve, welche mit einer Sinuscurve grosse Aehnlichkeit hat. Die Werthe der um 120° auseinanderliegenden Ordinaten sind, wie spätere Tabellen zeigen werden, auch soweit gleich, als es die Genauigkeit der Einstellung des Cylinders in der Presse und des Elektrometers zuliess. Man kann daher mit Recht aus je drei dieser Werthe das Mittel nehmen. Fig. 3 stellt den Verlauf dieser Curve schematisch dar.

Es wurde an einer und derselben Stelle natürlich nicht bloss ein bestimmt gemessener Druck verwendet, sondern das Laufgewicht jedesmal an drei verschiedenen Stellen aufgesetzt, so dass nach Abschluss

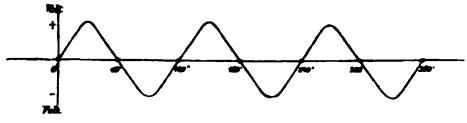


Fig. 3.

eines vollständigen Druckversuches immer drei solche Curven zugleich erhalten wurden.

Die Grösse der angewandten Drucke wurde direct durch Anhängen von Gewichten an der Stahlbacke bestimmt und zwar wurde gefunden, wenn das gewöhnliche Laufgewicht angehängt war:

$$Q_1 = 6{,}1375 \text{ kg}$$
$$Q_2 = 9{,}9875 \text{ „}$$
$$Q_3 = 11{,}8995 \text{ „}$$

Wurde ein leichteres Laufgewicht an dieselben drei Stellen aufgesetzt, so ergaben sich:

$$q_1 = 1{,}7795 \text{ kg}$$
$$q_2 = 2{,}9095 \text{ „}$$
$$q_3 = 3{,}4785 \text{ „}$$

Die Verhältnisse der drei Drucke sind daher:
aus Versuch 1:

$$\frac{Q_3}{Q_1} = 1{,}923, \quad \frac{Q_3}{Q_2} = 1{,}191, \quad \frac{Q_2}{Q_1} = 1{,}614,$$

aus Versuch 2:

$$\frac{Q_3}{Q_1} = 1{,}954, \quad \frac{Q_3}{Q_2} = 1{,}199, \quad \frac{Q_2}{Q_1} = 1{,}630,$$

also im Mittel: 1,938, 1,195, 1,622.

Ist die auftretende Spannung beim Drücken dem Drucke proportional, so müssen die entsprechenden Ordinaten der drei Curven dasselbe Verhältnis zeigen wie die Drucke.

Tabelle I und II (S. 516—517) geben nun den Verlauf der an den zwei Quarzcylindern gefundenen Spannungen, und zwar sind die um 120° voneinander abstehenden Druckstellen der Cylindermantelfläche untereinander geschrieben und aus ihnen das Mittel genommen.

Die mit V_1, V_2 und V_3 überschriebenen Rubriken enthalten die den drei verschiedenen Drucken entsprechenden Spannungen, welche direct in den beobachteten Ausschlägen angegeben sind.

Aus diesen Tabellen folgt: 1. dass sich die Curve auf der Peripherie dreimal wiederholt; 2. dass die positiven und negativen äquidistanten Ordinaten fast gleich gross sind, was bei Quarz II besonders gut stimmt.

Zu diesen Versuchen ist aber Folgendes zu bemerken. Wenn die Luft trocken, der Quarz gut gereinigt und das Elektrometer sammt Leitung gut isolirt ist, so gehen dieselben mit grosser Präcision vor sich. Bei etwas feuchtem Wetter jedoch hat es grosse Schwierigkeit, den Quarz, wenn man ihn auch bei jeder neuen Einstellung frisch reinigt und mit einer eigens hierzu verfertigten Holzzange anfasst, da sich auf dessen Oberfläche sofort Wasserdampf niederschlägt und auch das Elektrometer genügend zu isoliren. Die erhaltenen Ausschläge sind dann immer zu klein und halten sich auch nicht, sondern gehen mehr oder minder rasch zu Null herab. Dies und die Ungenauigkeit der Einstellung des Quarzes in der Presse bedingen die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen.

Tabelle I.

Quarz I.							
	V_1	V_2	V_3		V_1	V_2	V_3
0°	— 1,7	— 2,5	— 2,8	60°	+ 2,3	+ 3,4	+ 4,0
120	— 1,3	— 2,0	— 2,3	180	+ 1,6	+ 2,2	+ 2,4
240	— 1,9	— 3,0	— 3,4	300	+ 2,0	+ 3,4	+ 4,4
	— 1,63	— 2,50	— 2,83		+ 1,97	+ 3,00	+ 3,60
7,5°	— 6,1	— 10,1	— 12,0	67,5°	+ 6,2	+ 9,1	+ 12,0
127,5	— 5,4	— 8,7	— 10,4	187,5	+ 6,5	+ 10,7	+ 12,8
247,5	— 5,7	— 9,7	— 11,3	307,5	+ 6,3	+ 9,9	+ 12,1
	— 5,73	— 9,50	— 11,23		+ 6,33	+ 9,90	+ 12,30
15°	— 9,7	— 15,6	— 18,7	75°	+ 10,0	+ 16,0	+ 19,3
135	— 9,7	— 15,4	— 18,8	195	+ 10,7	+ 17,4	+ 21,0
255	— 10,0	— 15,3	— 19,3	315	+ 9,9	+ 16,2	+ 18,7
	— 9,80	— 15,43	— 18,93		+ 10,20	+ 16,57	+ 19,70
22,5°	— 11,8	— 19,4	— 23,1	82,5°	+ 12,6	+ 20,3	+ 24,3
142,5	— 11,8	— 19,3	— 23,1	202,5	+ 12,8	+ 21,4	+ 25,3
262,5	— 11,7	— 19,4	— 23,3	322,5	+ 11,9	+ 19,4	+ 23,4
	— 11,77	— 19,37	— 23,17		+ 12,43	+ 20,33	+ 24,33
30°	— 12,8	— 20,9	— 25,0	90°	+ 12,1	+ 20,1	+ 24,5
150	— 12,5	— 20,7	— 25,1	210	+ 12,9	+ 21,1	+ 25,4
270	— 12,1	— 20,0	— 24,4	330	+ 13,5	+ 22,4	+ 26,7
	— 12,47	— 20,53	— 24,83		+ 12,83	+ 21,20	+ 25,53
37,5°	— 11,2	— 18,1	— 21,6	97,5°	+ 11,9	+ 19,3	+ 23,1
157,5	— 11,8	— 19,5	— 23,4	217,5	+ 11,6	+ 19,2	+ 23,0
277,5	— 10,9	— 17,9	— 21,5	337,5	+ 12,1	+ 19,5	+ 23,4
	— 11,30	— 18,50	— 22,17		+ 11,87	+ 19,33	+ 23,17
45°	— 8,2	— 13,2	— 15,8	105°	+ 7,9	+ 12,7	+ 18,4
165	— 8,2	— 13,1	— 15,6	225	+ 8,7	+ 14,0	+ 16,8
285	— 7,6	— 12,4	— 14,7	345	+ 7,1	+ 11,4	+ 13,7
	— 8,00	— 12,90	— 15,37		+ 7,90	+ 12,70	+ 16,30
52,5°	— 3,4	— 5,0	— 6,0	112,5°	+ 4,0	+ 6,6	+ 7,9
172,5	— 3,8	— 6,1	— 7,0	232,5	+ 3,1	+ 5,8	+ 6,9
292,5	— 3,4	— 5,3	— 6,4	352,5	+ 3,3	+ 5,3	+ 6,6
	— 3,53	— 5,47	— 6,47		+ 3,47	+ 5,92	+ 7,13

Tabelle II.

Quarz II.

	V_1	V_2	V_3		V_1	V_2	V_3
0°	— 2,3	— 3,8	— 4,6	60°	+ 2,2	+ 3,2	+ 3,5
120	— 2,0	— 2,9	— 3,8	180	+ 2,3	+ 3,5	+ 4,2
240	— 2,2	— 3,4	— 4,0	300	+ 2,3	+ 3,4	+ 4,0
	— 2,16	— 3,33	— 4,13		+ 2,27	+ 3,38	+ 3,90
7,5°	— 7,9	— 12,7	— 14,9	67,5°	+ 6,7	+ 10,6	+ 12,9
127,5	— 6,7	— 10,6	— 12,7	187,5	+ 7,0	+ 11,3	+ 13,2
247,5	— 6,0	— 9,8	— 12,1	307,5	+ 7,0	+ 11,2	+ 13,5
	— 6,88	— 11,05	— 13,23		+ 6,90	+ 11,03	+ 13,20
15°	— 11,2	— 17,9	— 21,1	75°	+ 9,7	+ 14,5	+ 18,8
135	— 10,4	— 16,8	— 19,9	195	+ 10,1	+ 16,7	+ 20,3
255	— 10,3	— 17,0	— 20,7	315	+ 10,2	+ 16,6	+ 19,7
	— 10,63	— 17,23	— 20,57		+ 10,00	+ 15,93	+ 19,60
22,5°	— 12,0	— 19,4	— 22,9	82,5°	+ 12,5	+ 20,3	+ 23,7
142,5	— 12,2	— 20,0	— 24,0	202,5	+ 12,0	+ 19,8	+ 23,4
262,5	— 12,3	— 20,4	— 24,7	322,5	+ 11,8	+ 19,4	+ 23,2
	— 12,17	— 19,93	— 23,87		+ 12,10	+ 19,83	+ 23,43
30°	— 13,3	— 21,3	— 24,7	90°	+ 12,8	+ 21,0	+ 24,6
150	— 13,2	— 20,9	— 24,4	210	+ 12,8	+ 21,0	+ 25,1
270	— 12,7	— 21,0	— 25,8	330	+ 12,5	+ 20,4	+ 24,1
	— 13,07	— 21,07	— 24,80		+ 12,70	+ 20,80	+ 24,60
37,5°	— 10,6	— 16,7	— 19,9	97,5°	+ 10,4	+ 16,8	+ 19,9
157,5	— 11,1	— 17,9	— 21,4	217,5	+ 10,9	+ 17,5	+ 20,9
277,5	— 11,0	— 17,8	— 21,4	337,5	+ 10,8	+ 17,7	+ 21,1
	— 10,90	— 17,47	— 20,90		+ 10,70	+ 17,30	+ 20,63
45°	— 7,8	— 12,7	— 15,3	105°	+ 7,1	+ 12,0	+ 14,8
165	— 8,0	— 12,8	— 15,3	225	+ 7,6	+ 12,3	+ 14,7
285	— 7,8	— 12,7	— 15,2	345	+ 7,5	+ 12,4	+ 14,1
	— 7,87	— 12,73	— 15,27		+ 7,40	+ 12,23	+ 14,53
52,5°	— 3,5	— 5,6	— 6,4	112,5°	+ 3,5	+ 5,3	+ 6,3
172,5	— 2,9	— 5,0	— 5,8	232,5	+ 3,6	+ 5,5	+ 6,5
292,5	— 3,0	— 5,5	— 6,7	352,5	+ 2,8	+ 4,4	+ 5,0
	— 3,13	— 5,33	— 6,30		+ 3,30	+ 5,07	+ 6,00

Die in Tabelle I und II gewonnenen Mittelwerthe sind in Tabelle III und IV in Volt ausgedrückt und in einer dritten Rubrik das Mittel aus den positiven und negativen Ordinaten genommen. Da zufälliger Weise die Theilungen auf beiden Quarzen fast dieselbe Orientirung gegen die elektrischen Axen hatten, so sind die erhaltenen Werthe fast ohne Interpolation vergleichbar. Man sieht, dass beide Quarze, bis auf kleine individuelle Unterschiede, ziemlich gleiche Werthe ergeben. Bei einer späteren optischen Untersuchung zeigte sich auch Quarz I mehr verwachsen als Quarz II, der aber auch nicht fehlerfrei war.

Tabelle III.

Quarz I.								Mittelwerth			
	V_1	V_2	V_3		V_1	V_2	V_3		V_1	V_2	V_3
0°	— 0,50	— 0,76	— 0,86	60°	+ 0,59	+ 0,92	+ 1,10	0°	0,54	0,89	0,98
7,5	— 1,72	— 2,75	— 3,22	67,5	+ 1,89	+ 2,86	+ 3,45	7,5	1,80	2,80	3,33
15	— 2,84	— 4,45	— 5,48	75	+ 2,95	+ 4,77	+ 5,71	15	2,89	4,61	5,59
22,5	— 3,36	— 5,60	— 6,73	82,5	+ 3,55	+ 5,90	+ 7,04	22,5	3,45	5,75	6,89
30	— 3,56	— 5,96	— 7,17	90	+ 3,67	+ 6,15	+ 7,37	30	3,61	6,05	7,27
37,5	— 3,23	— 5,34	— 6,42	97,5	+ 3,39	+ 5,59	+ 6,72	37,5	3,31	5,46	6,57
45	— 2,35	— 3,69	— 4,42	105	+ 2,33	+ 3,64	+ 4,69	45	2,34	3,66	4,55
52,5	— 1,07	— 1,64	— 1,93	112,5	+ 1,06	+ 1,76	+ 2,12	52,5	1,06	1,70	2,02

Tabelle IV.

Quarz II.								Mittelwerth			
	V_1	V_2	V_3		V_1	V_2	V_3		V_1	V_2	V_3
0°	— 0,62	— 0,98	— 1,21	60	+ 0,65	+ 0,98	+ 1,14	0°	0,63	0,98	1,17
7,5	— 2,02	— 3,23	— 3,91	67,5	+ 2,03	+ 3,22	+ 3,89	7,5	2,02	3,23	3,90
15	— 3,11	— 5,10	— 6,12	75	+ 2,93	+ 4,72	+ 5,83	15	3,02	4,91	5,97
22,5	— 3,57	— 5,93	— 7,07	82,5	+ 3,55	+ 5,90	+ 6,96	22,5	3,56	5,91	7,01
30	— 3,85	— 6,28	— 7,34	90	+ 3,74	+ 6,19	+ 7,28	30	3,79	6,23	7,31
37,5	— 3,18	— 5,17	— 6,22	97,5	+ 3,12	+ 5,13	+ 6,15	37,5	3,15	5,15	6,18
45	— 2,32	— 3,75	— 4,53	105	+ 2,18	+ 3,59	+ 4,31	45	2,25	3,67	4,42
52,5	— 0,92	— 1,56	— 1,81	112,5°	+ 0,96	+ 1,49	+ 1,77	52,5	0,94	1,52	1,79

Die Mittelwerthe der Verhältnisse aus den drei Spannungen, welche den drei Drucken Q_1, Q_2 und Q_3 entsprechen, sind:

für Quarz I:

$$\frac{V_3}{V_1} = 1{,}930, \quad \frac{V_3}{V_2} = 1{,}192, \quad \frac{V_2}{V_1} = 1{,}612,$$

für Quarz II:

$$\frac{V_3}{V_1} = 1{,}937, \quad \frac{V_3}{V_2} = 1{,}194, \quad \frac{V_2}{V_1} = 1{,}621,$$

während die Verhältnisse für die angewandten Drucke waren:

$$\frac{Q_3}{Q_1} = 1{,}938, \quad \frac{Q_3}{Q_2} = 1{,}195, \quad \frac{Q_2}{Q_1} = 1{,}622.$$

Man kann also die Proportionalität der Spannungen mit den Drucken als vollkommen, innerhalb dieser Grenzen, annehmen, wie es auch die Versuche von J. und P. Curie ergaben.

Durch eine mehr geometrische Betrachtung ist man im Stande, die Curve, welche den Verlauf der Spannungen darstellt, mit einer ziemlich grossen Uebereinstimmung wiederzugeben. Um die Herleitung besser zu motiviren, will ich auf einen einfacheren Fall zurückgehen, als es die Verhältnisse beim Quarze bieten.

Der Turmalin hat bekanntlich nur eine einzige Richtung, nämlich die der krystallographischen Hauptaxe, in welcher er gedrückt ein Maximum der elektrischen Spannung zeigt. Dies ist also die Richtung der elektrischen Polarität der Moleküle oder eine piëzoelektrische Axe.

Nach Thomson sind die Moleküle eines solchen polaren Krystalles alle nach einer Richtung polarisirt und ihre Wirkung nach aussen durch eine an der Oberfläche des Krystalles befindliche Ladung compensirt. Wird nun durch irgendwelche Ursachen das dielektrische Moment der Moleküle geändert, so ändert sich auch die Gesammtwirkung der inneren Polarität nach aussen und es zeigt sich an der Oberfläche des Krystalles freie Elektricität.

In neuerer Zeit ist in einer Arbeit von Schedtler über den Turmalin die elektrische Wirkung als reine Influenzwirkung der polaren Moleküle nach aussen dargestellt.

Auf welche Art durch Erwärmung und Abkühlung, Dilatation und Compression die Aenderung des dielektrischen Momentes der Moleküle hervorgebracht wird, ist in verschiedenen Hypothesen ausgesprochen und ist man von der Erkenntnis des wahren Sachverhaltes gewiss noch ferne. Zur Einkleidung jedoch der experimentellen Thatsachen in Formeln genügt es, eine dem Sachverhalte entsprechende und anschauliche Annahme zu machen. Nimmt man an, dass beim Drucke oder Abkühlung nur die Distanzen der polaren Moleküle geändert

werden, so wird ebenfalls das dielektrische Moment derselben geändert. J. und P. Curie[1]) vergleichen direct als anschauliches Analogon einen Turmalinkrystall mit einer Zambonischen Säule, wo die einzelnen Elemente durch Luftstrecken getrennt sind. Sie zeigen, dass, wenn diese Distanzen geändert werden, die dadurch hervorgebrachte Aenderung der elektromotorischen Kraft dieser Distanzänderung proportional ist. Aus der folgenden Darstellung wird es auch sofort ersichtlich sein, dass dieselbe auch mit Zugrundelegung des allgemeineren Begriffes des dielektrischen Momentes die gleichen Resultate geliefert hätte und ebenso die auf thermoelektrischen Ursachen beruhende Hypothese von P. Duhem[2]) dieselbe Behandlung erlaubt. Die hier gemachte Darstellung wurde aber der grösseren Anschaulichkeit und Uebersicht wegen gewählt und ist durchaus nicht an eine bestimmte Hypothese gebunden.

Die grösste elektrische Wirkung erhält man an einem Turmaline, wenn man ihn in der Richtung seiner krystallographischen Hauptaxe drückt. Die Distanzänderung, welche die Moleküle dadurch in dieser Richtung erleiden, wird man innerhalb gewisser Grenzen, dem Drucke proportional setzen können. Drückt man in einer Richtung, welche mit dieser Axe einen bestimmten Winkel einschliesst, so wird man in erster Annäherung, ohne auf die elastischen Verhältnisse genauer einzugehen, die Distanzänderung der Moleküle, welche dadurch in der polaren Axe hervorgerufen wird, der Projection des ausgeübten Druckes in dieser Richtung proportional setzen können.

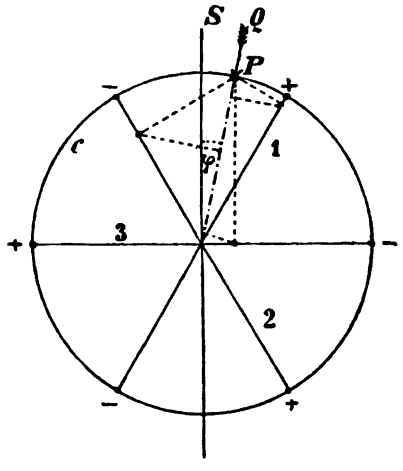


Fig. 4.

Beim Quarze haben wir nun nicht eine, sondern drei solche polare Richtungen uns zu denken, deren positive Richtungen Winkel von 120° miteinander einschliessen. Denken wir uns in Fig. 4 unter C den Querschnitt eines Quarzcylinders, dessen Endflächen senkrecht zur Axe geschliffen sind. Die drei mit + und — bezeichneten Durchmesser geben die drei polaren Richtungen an. Q stellt die Richtung eines radial von aussen ausgeübten Druckes

1) Compt. rend. vol. XCII p. 350.
2) Journ. de Phys. série 12 tome VI.

dar, welchen wir uns aus drei Theilen zusammengesetzt denken. Auf jede der drei polaren Axen beziehen wir einen dieser Theile des Druckes und nehmen die in der Axe erzeugte Polarität der Projection dieses Druckes in diese Axe als proportional an.

Befindet sich nun an der Druckstelle eine metallische Elektrode, so wird die in ihr influencirte Elektricitätsmenge auch proportional sein der in der polaren Axe erzeugten Polarität, und zwar muss man ebenfalls, wenn die Richtung der polaren Axe mit dem Radius, welcher zur Elektrode gezogen ist, einen Winkel einschliesst, nur die in diesen Radius fallende Componente nehmen.

Zählen wir den Winkel φ, welchen die Druckrichtung mit den polaren Axen bildet, von S aus, d. i. die Normale einer polaren Axe, so drückt sich die gesammte in der Elektrode P influencirte Elektricitätsmenge folgendermaassen aus.

In die Polaraxe 1 entfällt ein Druck:

$$p_1 = a \cos (30 - \varphi).$$

Die dadurch in P influencirte Elektricitätsmenge ist:

$$v_1 = b p_1 \cos (30 - \varphi) = A \cos^2 (30 - \varphi).$$

Die Polaraxe 2 liefert ebenso

$$v_2 = - A \cos^2 (30 + \varphi)$$

und die Axe 3 liefert:

$$v_3 = - A \cos^2 (90 - \varphi).$$

Daher ist:

$$V = v_1 + v_2 + v_3 = A [\cos^2 (30 - \varphi) - \cos^2 (30 + \varphi) \cos^2 (90 - \varphi)]$$

oder ausgeführt:

$$V = A \left[\sqrt{\frac{3}{4}} \sin 2\varphi - \sin^2 \varphi \right]. \qquad (1$$

Es ist manchesmal bequemer, den Winkel φ von der Polaraxe 1 aus zu zählen; es ist dann in Formel 1 für φ der Winkel $30 - \varphi$ zu setzen, dadurch bekommt sie die Gestalt:

$$V = \frac{A}{2} (1 - 4 \sin^2 \varphi). \qquad (2$$

Da in Wirklichkeit, wenn φ den Winkel von 60^0 überschreitet, die eine Componente das Zeichen wechselt, $\cos^2$ dies aber nicht thut, so ist Formel 1 nur anwendbar für $0 \leqq \varphi \leqq 60^0$ und Formel 2 für $- 30^0 \leqq \varphi \leqq + 30^0$, was für die Darstellung aber vollkommen genügt.

Um nun diese Formel auf die Beobachtungen anwenden zu können, musste zuerst die Stelle bestimmt werden, wo die Curve die Abscissenaxe schneidet. Diese ergibt sich aus Tabelle III und IV für die drei Drucke durch Interpolation.

Bei Quarz I findet sich:

2,53°
2,58
2,45

also im Mittel: 2,52°.

Bei Quarz II findet sich:

3,01°
2,94
2,93

also im Mittel: 2,96°.

Um soviel liegt die an der Mantelfläche der Cylinder angebrachte Theilung gegen die Richtung der Polaraxen verschoben. Auf diese Nullpunkte wurden alle beobachteten Ordinaten bezogen und zuerst aus jeder Ordinate und dem entsprechenden Werth von φ die Constante A der Formel berechnet und aus allen diesen Werthen das Mittel genommen. So ergaben sich

für Quarz I die Constanten:

$$A_1 = 7{,}233,\ A_2 = 11{,}720,\ A_3 = 13{,}968,$$

für Quarz II die Constanten:

$$A_1 = 7{,}323,\ A_2 = 11{,}871,\ A_3 = 14{,}182.$$

Die Verhältnisse derselben ergeben

für Quarz I:

$$\frac{A_3}{A_1} = 1{,}936,\ \frac{A_3}{A_2} = 1{,}195,\ \frac{A_2}{A_1} = 1{,}610,$$

für Quarz II:

$$\frac{A_3}{A_1} = 1{,}931,\ \frac{A_3}{A_2} = 1{,}192,\ \frac{A_2}{A_1} = 1{,}620.$$

Die Verhältnisse der angewandten Drucke waren aber:

$$\frac{Q_3}{Q_1} = 1{,}938,\ \frac{Q_3}{Q_2} = 1{,}195,\ \frac{Q_2}{Q_1} = 1{,}622.$$

Die Verhältnisse der berechneten Constanten stimmen sogar noch besser mit den Verhältnissen der drei angewandten Drucke überein als das Mittel aus den beobachteten Ordinatenverhältnissen.

Die mit diesen Constanten berechneten Spannungen sind in Tabelle V (S. 523) den beobachteten gegenübergestellt.

Auch hier ist die Uebereinstimmung bei Quarz II eine bessere. Um den Verlauf der Werthe besser überblicken zu können, sind dieselben auf Fig. 5 und 6 graphisch dargestellt. Obwohl die hier angewandte Darstellung einer eigentlichen exacten theoretischen Deduction

entbehrt und mehr als eine erste rohe Annäherung aufgefasst sein will, so stellt dieselbe die Vorgänge im Quarze doch so dar, dass auch andere Versuche, welche in der Art am Quarze gemacht wurden, durch dieselbe sehr übereinstimmend wiedergegeben werden.

Betrachtet man zum Beispiele die Versuche, welche Röntgen[1]) an einer kleinen Quarzkugel gemacht hat.

Tabelle V.

Quarz I						
	V_1		V_2		V_3	
	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
0°	0,00	—	0,00	—	0,00	—
2,52	0,54	0,54	0,87	0,89	1,03	0,98
10,02	1,93	1,80	3,12	2,80	3,81	3,33
17,52	2,94	2,89	4,77	4,61	5,68	5,59
25,02	3,51	3,45	5,68	5,75	6,62	6,89
30,00	3,62	—	5,86	—	6,98	—
32,52	3,59	3,61	5,81	6,05	6,93	7,27
40,02	3,18	3,31	5,15	5,46	6,14	6,57
47,52	2,31	2,34	3,74	3,66	4,45	4,55
55,02	1,03	1,06	1,67	1,70	1,99	2,02
60,00	0,00	—	0,00	—	2,02	—

Quarz II						
	V_1		V_2		V_3	
	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
0,00°	0,00	—	0,00	—	0,00	—
2,96	0,63	0,63	1,03	0,98	1,23	1,17
10,46	2,02	2,02	3,28	3,23	3,92	3,90
17,96	3,02	3,02	4,90	4,91	5,86	5,97
25,46	3,57	3,56	5,79	5,91	6,91	7,01
30,00	3,66	—	5,94	—	7,09	—
32,96	3,62	3,79	5,87	6,23	7,02	7,31
40,46	3,18	3,15	5,15	5,15	6,16	6,18
47,96	2,27	2,25	3,68	3,67	4,39	4,42
55,46	0,96	0,94	1,55	1,52	1,85	1,79
60,00	0,00	—	0,00	—	0,00	—

1) Wied. Ann. Bd. 18 S. 534.

Versuch 1. „Wurde die Kugel senkrecht zur optischen Axe in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelektricität gedrückt, so theilte sich dieselbe in zwei Hälften, die in ihrer ganzen Ausdehnung elektrisch waren, positiv und resp. negativ. Das Zeichen richtet sich nach den Zeichen der auf der betreffenden Hälfte liegenden, der Druckrichtung benachbarten Feldern. Die Maxima der Entwicklung liegen an den

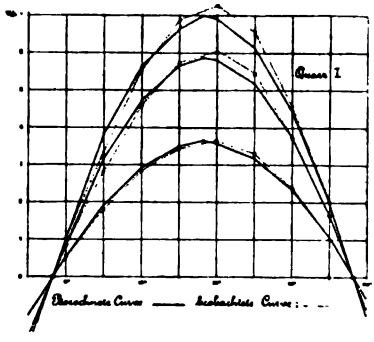


Fig. 5.

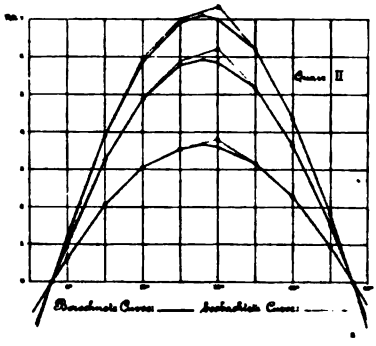


Fig. 6.

Enden einer Axe maximaler Piëzoelektricität, die senkrecht steht zur Druckrichtung."

In Fig. 7 ist Q die Druckrichtung, 1, 2, 3 die drei Polaraxen und Axe 3 ist dann jene zur Druckrichtung senkrechte.

Versuch 2. „Die Kugel wurde in der Richtung einer Axe maximaler Piëzoelektricität gedrückt. Sie theilte sich wieder in eine positiv und negativ elektrische Hälfte, und zwar waren die Maxima der Entwicklung an den Enden der

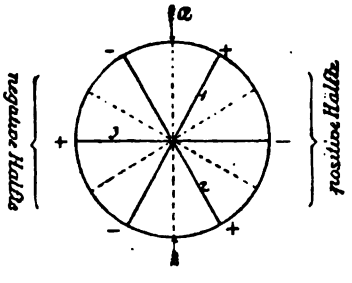


Fig. 7.

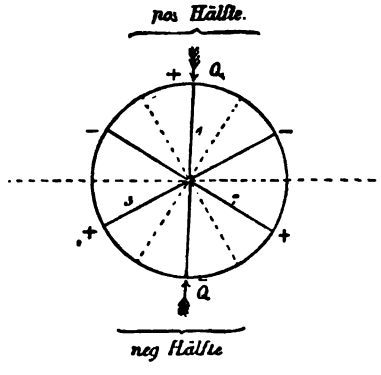


Fig. 8.

gedrückten Axe und die Theilung geschah in einer zur Druckrichtung senkrechten Ebene."

Fig. 8 stellt diesen Versuch dar.

Versuch 3. „Die Kugel wurde in einer Richtung gepresst, welche zwischen einer Axe fehlender Piëzoelektricität und der piëzo-

elektrischen Axe lag. Auch dann war die Kugel durch eine durch die Hauptaxe gehende Ebene in zwei entgegengesetzte elektrische Hälften getheilt. Dieselbe war jedoch nicht mehr parallel, wie im Versuch 1, oder senkrecht, wie im Versuch 2 zur Druckrichtung, sondern lag immer in dem spitzen Winkel, welchen die Druckrichtung mit der zweitfolgenden Axe fehlender Piëzoelektricität bildet. Der spitze Winkel zwischen der Druckrichtung und der Halbirungsebene war desto kleiner, je näher die Druckrichtung der Axe fehlender Piëzoelektricität lag. Aenderte man von einem Versuche zum andern die Druckrichtung in der Weise, dass man mit der Richtung der Axe maximaler Piëzoelektricität anfing und mit der Richtung der nächsten Axe fehlender Piëzoelektricität aufhört, so änderte sich die Lage der die Kugel halbirenden Ebene durch Drehung um die Hauptaxe um einen Winkel von 90°.

Wirkte der Druck in einer Richtung, welche den Winkel zwischen einer Axe maximaler und fehlender Piëzoelektricität gerade halbirte, so machte die Halbirungsebene mit der Druckrichtung einen Winkel, der von 45° nicht viel abwich. Eine genaue Bestimmung desselben war mit den angewandten Apparaten nicht möglich."

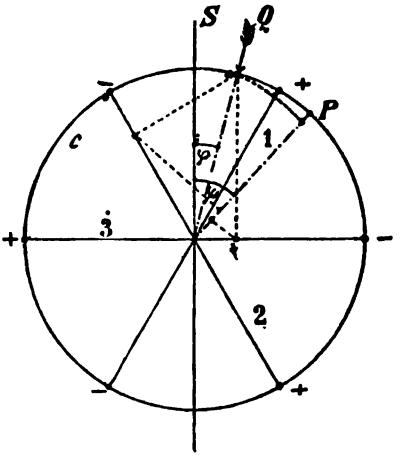


Fig. 9.

Um die obige Ableitung auf diese Versuche anwenden zu können, muss eine kleine Erweiterung gemacht werden. Es war vorausgesetzt, dass die influencirte Metallelektrode sich auch an der Druckstelle befinde. Nun soll dieselbe an einer beliebigen Stelle liegen.

Der Einfachheit halber betrachten wir nur einen Schnitt der Kugel senkrecht zur Hauptaxe. Es sei dies wieder C (Fig. 9) 1, 2, 3 die drei Richtungen der polaren Axen (an der Kugel drei Ebenen) φ der Winkel der Druckrichtung mit S und ψ der Winkel, um welchen die Elektrode von S absteht.

Dann ist wieder die in der Richtung 1 zur Geltung kommende Druckcomponente:

$$p_1 = a \cos (30 - \varphi)$$

und die in P hervorgerufene Elektricität:

$$\begin{aligned} v_1 &= b p_1 \cos (\psi - 30) \\ &= A \cos (30 - \varphi) \cos (\psi - 30) \end{aligned}$$

von 2 wird ebenso geliefert:

$$v_2 = -A \cos(30 + \varphi) \cos(\psi + 30)$$

und von 3 kommt:

$$v_3 = -A \cos(90 - \varphi) \cos(90 - \psi),$$

daher die Summe:

$$V = v_1 + v_2 + v_3$$

$$= A[\cos(30 - \varphi)\cos(\psi - 30) - \cos(30 + \varphi)\cos(\varphi + 30) - \sin\varphi \sin\psi]$$

oder ausgeführt:

$$V = A\left[\sqrt{\frac{3}{4}} \sin(\varphi + \psi) - \sin\varphi \sin\psi\right]. \quad (3$$

Befindet sich die Elektrode an der Druckstelle, so ist $\psi = \varphi$ und die Formel geht in Formel 1 über.

Wenden wir nun Formel 3 auf die vorstehenden drei Versuche an.

Versuch 1. Hier ist $\varphi = 0^0$ zu setzen. Dann ist:

$$V = \sqrt{\frac{3}{4}} A \sin\psi. \quad (4$$

Die Spannung verläuft also von der Druckstelle aus, wo $\psi = 0$ ist, dem $\sin\psi$ proportional, erreicht für $\psi = 90^0$, das ist am Endpunkte der polaren Axe 3 ihren Maximalwerth, und nimmt dann wieder bis $\psi = 180^0$ bis zur Null ab. Auch das Zeichen der positiven und negativen Hälfte ist in der Formel gegeben.

Versuch 2. Hier ist $\varphi = 30^0$ zu setzen. Dadurch wird:

$$V = \frac{A}{2} \cos(\psi - 30^0). \quad (5$$

Zählen wir den Winkel ψ nicht von S aus, sondern von der Druckrichtung selbst, so haben wir für ψ zu setzen $\psi + 30^0$, dadurch wird Formel 5 zu:

$$V = \frac{A}{2} \cos\psi. \quad (6$$

Die Maximalwerthe liegen also an den Druckstellen und nehmen von da an stetig ab. Es wird ferners, wie verlangt, die obere Hälfte der Kugel positiv, die untere negativ und die Halbirungsebene steht senkrecht zur Druckrichtung.

Versuch 3. Die Kugel wird an einem beliebigen zwischen S und der Axe 1 gelegenen Punkt gedrückt, $\varphi = \varphi_0$.

$$V = A\left[\sqrt{\frac{3}{4}} \sin(\varphi_0 + \psi) - \sin\varphi_0 \sin\psi)\right]. \quad (6$$

Um die Lage der Halbirungsebene zu bestimmen, hat man den Werth von ψ zu suchen, für welchen $V = 0$ ist.

Dies tritt ein, wenn:

$$\sqrt{\frac{3}{4}} \sin(\varphi_0 + \psi) = \sin\varphi_0 \sin\psi$$

daraus folgt:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}} \cos\varphi_0}{\sin\varphi_0 - \sqrt{\frac{3}{4}} \cos\varphi_0}. \qquad (7$$

Die in Versuch 1 und 2 enthaltenen Fälle folgen natürlich auch aus Formel 7. Sie gibt für $\varphi_0 = 0$ und $\psi = 0$ für $\varphi_0 = 30$; $\psi = -60^0$ und $+120^0$. Um die Lage der Halbirungsebene von der Druckrichtung aus gezählt zu haben, ist von ψ der Winkel φ_0 abzuziehen. Sei dieser Winkel α, so ist $\alpha = \psi - \varphi_0$. Also für Versuch 1 ist $\alpha = 0$, für Versuch 2 ist $\alpha = -90$ und $+90$. Hat φ wie in Versuch 3 einen Werth zwischen 0 und 30^0, so liegt α zwischen 0 und -90^0 oder resp. zwischen $+180^0$ und $+90^0$. Folgende Tabelle gibt den Verlauf der Lage dieser Halbirungsebene für mehrere Werthe von φ_0:

φ_0	ψ	α
0°	0,00° + 180,00°	0,00° + 180,00
5	− 5,56 + 174,44	− 10,56 + 169,44
10	− 12,50 + 167,50	− 22,50 + 157,50
15	− 21,30 + 158,70	− 36,30 + 143,70
20	− 32,10 + 147,90	− 52,10 + 127,90
25	− 45,37 + 134,63	− 70,37 + 109,63
30	− 60,00 + 120,00	− 90,00 + 90,00

Es fällt auf, dass für $\varphi_0 = 15^0$ nicht, wie es ungefähr aus den Versuchen folgte, $\alpha = -45^0$ oder 135^0 sich ergibt, sondern ein um $8{,}7^0$ verschiedener Werth. Um soviel könnte der Versuch nicht unsicher sein, wohl aber kann die Einstellung des Winkels φ_0 unsicher genug sein, um eine so grosse Differenz hervorzubringen. Man kann ja aus der Formel sehr leicht umgekehrt rechnen, unter welchem Werthe φ_0 muss man drücken, damit α den Werth -45^0 oder 135^0 annimmt.

Es muss also sein:

$$\alpha = \psi - \varphi_0 = 135^0 \text{ oder } \psi = 135^0 + \varphi_0$$

daher:

$$\operatorname{tg}(135^0 + \varphi_0) = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 - \sqrt{\frac{3}{4}} \cos \varphi_0}.$$

Wenn man dies ausführt, so erhält man eine Gleichung für φ_0 und zwar ist:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 - \frac{2+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 0 \qquad (8$$

daraus folgen zwei Werthe für φ_0 und zwar $\varphi_0 = 17{,}85^0$ und $\varphi_0 = 87{,}15^0$. Es ist der erste Werth zu wählen, da φ überhaupt zwischen 0 und 60^0 liegen muss. Dieser weicht um nicht ganz 3^0 von der Mitte zwischen der Axe fehlender Piëzoelektricität und der nächsten Polaraxe ab. Da die bei den Versuchen verwendete Kugel einen Radius von 1,5 cm hatte, so betragen 3^0 nicht einmal ganz 0,8 mm, um wieviel die Einstellung der Druckstellen sehr leicht unsicher gewesen sein kann.

Man kann also mit ziemlicher Sicherheit sagen, dass die Versuche von Röntgen durch diese Formel sehr gut wiedergegeben werden.

b) Absolute Messungen.

Durch die bisherigen Versuche war der Verlauf der Spannungen, wie sie auf den zwei Quarzcylindern auftraten und dadurch die Lage der drei Axen maximaler Piëzoelektricität festgestellt. Nun sollte die Elektricitätsmenge, welche eine bestimmt orientirte, gedrückte Quarzplatte zu liefern im Stande ist, absolut bestimmt werden.

Dazu wurden die beiden Cylinder in ganz bestimmter Weise zu quadratischen Prismen abgeschliffen und zwar Quarz I so, dass das eine Seitenflächenpaar senkrecht zu einer Axe maximaler Piëzoelektricität stand, daher war das andere Flächenpaar senkrecht zu einer Richtung fehlender Piëzoelektricität. Quarz II hingegen wurde so abgeschliffen, dass seine Seitenflächen gegen die Orientirung von Quarz I um 15^0 gedreht erscheinen. Fig. 10 stellt diese beiden Lagen dar.

Wäre diese Orientirung beim Schleifen wirklich genau getroffen worden, so hätte Quarz I den Maximal- und Nullwerth, Quarz II aber auf allen Flächen denselben Werth geben müssen, da für die Stelle von 15^0, 105^0, 195^0 und 285^0 die Curve gleich grosse Ordinaten hat. In Wirklichkeit war dies aber nicht erreicht und wäre es auch sehr schwierig gewesen, diese Orientirung nach der auf den Cylindermantelflächen angezeichneten Graduirung so genau zu treffen. Mit Hilfe aber der vorherbestimmten Spannungscurve und der theoretischen

Formel hat es keine Schwierigkeit, die wirklich eingetroffene Orientirung ziemlich genau zu bestimmen.

An der Presse wurden nun die schmalen Stahlbacken gegen ebengeschliffene breite Stahlplatten ausgetauscht. Die obere war wieder isolirt, während die untere zur Erde abgeleitet wurde und längs ihrer Mitte auf einer Stahlschneide, die im Hebelarme an der Stelle der

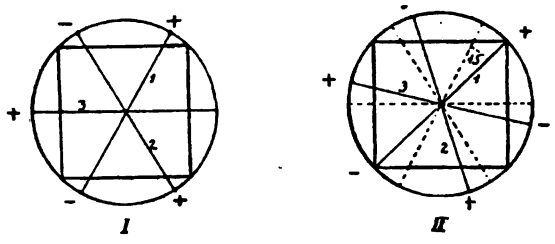


Fig. 10.

früheren Stahlbacke eingelassen war, sass, so dass der Druck, der sich auf der ganzen gedrückten Fläche vertheilt, genau gemessen werden konnte. Durch diese Aenderung an der Presse war das Verhältnis der Hebelarme etwas geändert worden. Es wurden daher die von der Presse ausgeübten Drucke neu gemessen und fand sich:

$$\frac{Q_3}{Q_1} = 1{,}947, \quad \frac{Q_3}{Q_2} = 1{,}195, \quad \frac{Q_2}{Q_1} = 1{,}633.$$

Quarz I zeigte sich bei der Untersuchung als gut orientirt, denn das zu einer Axe fehlender Piëzoelektricität senkrecht stehende Flächenpaar gab unsicher positive, bald negative kleine Ausschläge, je nachdem der Quarz etwas schief gezogen oder gespannt in der Presse lag.

Es war daher zu erwarten, dass das andere Flächenpaar den positiven und negativen Maximalwerth ergeben werde. Vier Versuche, die an verschiedenen Tagen mit jedesmal neu geaichtem Elektrometer und unter sehr verschiedenen Feuchtigkeitsgraden der Luft gemacht wurden, ergaben folgende Werthe:

	V_1	V_2	V_3
1. Fläche des + Max.	+ 14,82	+ 24,82	+ 30,30
„ „ − Max.	− 14,75	+ 25,00	− 30,20
Mittel	14,75	24,91	30,25 Scalenth.
oder	5,07	8,27	9,81 Volt.
2. Fläche des + Max.	+ 12,55	+ 21,06	+ 26,13
„ „ − Max.	− 12,65	− 21,80	− 26,40
Mittel	12,60	21,43	26,26 Scalenth.
oder	4,63	7,74	9,35 Volt.

	V_1	V_2	V_3
3. Fläche des + Max.	+ 14,60	+ 24,55	+ 29,90
" " — Max.	— 14,05	— 23,50	— 28,50
Mittel	14,32	24,02	29,20 Scalenth.
oder	4,94	7,91	9,33 Volt.
4. Fläche des + Max.	+ 14,60	+ 24,75	+ 30,35
" " — Max.	— 14,45	— 24,80	— 30,20
Mittel	14,52	24,77	30,27 Scalenth.
oder	4,87	7,93	9,44 Volt.

Das Gesammtmittel aus diesen vier Versuchen ergibt:

$$V_1 = 4{,}88, \quad V_2 = 7{,}96, \quad V_3 = 9{,}48.$$

Das Verhältnis dieser Spannungen ist dann:

$$\frac{V_3}{V_2} = 1{,}943, \quad \frac{V_3}{V_1} = 1{,}191, \quad \frac{V_2}{V_1} = 1{,}631$$

und das der Drucke war:

$$\frac{Q_3}{Q_1} = 1{,}947, \quad \frac{Q_3}{Q_2} = 1{,}194, \quad \frac{Q_2}{Q_1} = 1{,}633.$$

Also wieder vollkommene Proportionalität der Spannungen mit dem Drucke.

Nicht so gut orientirt zeigte sich Quarz II, denn die beiden Flächenpaare ergaben stark differirende Werthe. Jedoch aus dem Verhältnisse dieser beiden Werthe und mit Hilfe der Spannungscurve kann man bestimmen, um wieviel die Orientirung von der vorausgesetzten abweicht.

Die Mittel aus drei Versuchen ergaben:

für das Flächenpaar a: $V_1 = 4{,}09$, $V_2 = 6{,}59$, $V_3 = 7{,}92$ Volt,
" " " b: $V_1 = 2{,}91$, $V_2 = 4{,}65$, $V_3 = 5{,}54$ Volt.

Das Mittel aus den Verhältnissen der Spannungen ist dann:

$$\frac{V_3}{V_1} = 1{,}922, \quad \frac{V_3}{V_2} = 1{,}197, \quad \frac{V_2}{V_1} = 1{,}605.$$

Hier stimmen die Werthe etwas weniger gut mit den Druckverhältnissen.

Da die beiden gedrückten Flächenpaare aufeinander senkrecht stehen, so liegen die Werthe der zugehörigen Spannungen in der Spannungscurve immer um 90° von einander entfernt.

Ist

$$V_3 = A\left[\sqrt{\frac{3}{4}}\sin 2\varphi - \sin^2\varphi\right]$$

die im absteigenden Theile der Curve gelegene Spannung, welche z. B. zum Flächenpaare b gehört, so ist die dem Flächenpaare a zugehörige Spannung bei $\varphi - 90^0$ zu finden. Dies ist aber dem absoluten Werthe

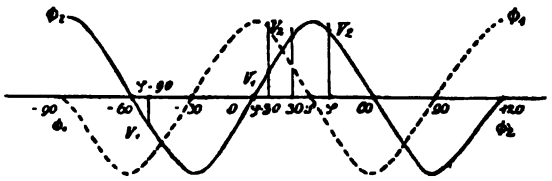


Fig. 11.

nach auch die in $\varphi - 30^0$ befindliche Spannung. Wir erhalten dieselbe daher, wenn wir in V_2 statt φ, $\varphi - 30^0$ einsetzen. Dies ergibt, wie früher erwähnt, Formel 2.

Also ist:

$$V_1 = \frac{A}{2}(1 - 4 \sin^2\varphi).$$

Aus dem beobachteten Verhältnisse

$$v = \frac{V_1}{V_2}$$

dieser beiden Spannungen der Flächenpaare a und b kann man daher den zugehörigen Werth von φ rechnen.

Es ist also:

$$v = \frac{1 - 4 \sin^2\varphi}{\sqrt{3} \sin 2\varphi - 2 \sin^2\varphi}. \qquad (9$$

Dies ergibt für φ eine Gleichung vierten Grades:

$$16 (v^2 - v + 1) \sin^4\varphi - 4 (3 v^2 - v + 2) \sin^2\varphi + 1 = 0. \qquad (10$$

Nach $\sin\varphi$ aufgelöst erhält man:

$$\sin\varphi = \pm \sqrt{\frac{3 v^2 - v + 2 \pm \sqrt{3 v^2 (3 v^2 - 2 v + 3)}}{8 (v^2 - v + 1)}}. \qquad (11$$

Da φ an die Bedingung geknüpft ist, dass es wegen Formel 1 und 2 zwischen 0 und $+ 30^0$ liegen muss, so ist von den doppelten Vorzeichen beim ersten Paare das $+$, beim zweiten Paare das $-$ Zeichen zu nehmen.

Aus der graphischen Darstellung ist es sehr übersichtlich, welche Werthe v durchläuft, wenn φ von 0 bis 30^0 wächst. Denn in Fig. 11 stellt sich Φ_2, welches die Werthe von V_2 enthält, als Curve dar, die im Nullpunkte beginnt, während Φ_1, welches die Werthe von V_1 dar-

stellt, um 30° gegen die negative Seite verschoben erscheint. Die zu demselben Werthe φ gehörigen Ordinaten liegen dann übereinander.

Für $\varphi = 0$ ist $\Phi_1 =$ Maximum, $\Phi_2 = 0$ daher $v = +\infty$
„ $\varphi = 15^0$ „ $\Phi_1 = \Phi_2$ $\Phi_2 = \Phi_1$ „ $v = 1$
„ $\varphi = 30^0$ „ $\Phi_1 = 0$ $\Phi_2 =$ Maximum, daher $v = 0$.

Diese Werthe erhält man auch für φ, wenn man in Formel 11 für v die entsprechenden Werthe setzt.

Im vorliegenden Falle war nun das Verhältnis der von den zwei Flächenpaaren gelieferten Spannungen für die drei angewandten Drucke:

$$\frac{V_{1a}}{V_{1b}} = 1{,}406, \quad \frac{V_{2a}}{V_{2b}} = 1{,}417, \quad \frac{V_{3a}}{V_{3b}} = 1{,}430,$$

also im Mittel: $v = 1{,}418$.

Dazu liefert Formel 11 den Werth $\varphi = 11^0\,40'\,12''$.

Also eine Abweichung von der verlangten Orientirung um $3^0\,19'\,48''$. Da der Cylinder einen Durchmesser von ungefähr 1,5 cm hatte, so war dies ein Fehler an der Peripherie von ca. 0,4 mm, was bei der Ungenauigkeit der Theilung selbst sehr leicht möglich war.

Wenn das Flächenpaar b die Ordinaten an der Stelle $\varphi_b = 11^0\,40'\,12''$ lieferte, so finden sich dem absoluten Werthe nach Ordinaten des Flächenpaares a an der von $\varphi = 15^0$ nach rechts liegenden Seite ebenso weit abstehenden Stelle $\varphi_a = 18^0\,19'\,48''$ als φ_b von $\varphi = 15^0$ nach links absteht.

Wir können daher die von Quarz I erhaltenen Maximalwerthe auch an Quarz II berechnen, denn zu $\varphi_b = 11^0\,40'\,12''$ gehören die Spannungen: V_1 2,91, $V_2 = 4{,}65$, $V_3 = 5{,}54$ und zu $\varphi_a = 18^0\,19'\,48''$ gehören: $V_1 = 4{,}09$, $V_1 = 6{,}59$, $V_3 = 7{,}92$.

Aus Formel:

$$V = A\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\sin 2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

folgt, indem man aus φ_a und φ_b mit den zugehörigen V die Constante A gerechnet hat, für $\varphi = 30^0$ der Maximalwerth, und zwar:

	V_1	V_2	V_3
aus a	4,89	7,88	9,47
aus b	4,82	7,69	9,17
Quarz I gab . . .	4,88	7,96	9,48

also eine sehr gute Uebereinstimmung. Das Mittel ist:

$$V_1 = 4{,}863, \quad V_2 = 7{,}847, \quad V_3 = 9{,}373.$$

Dividirt man die erhaltenen Spannungen durch den jedesmal angewandten Druck in Kilogrammen, so erhält man die pro Kilo gelieferte Spannung.

Es ergibt sich dann:

$$\frac{V_1}{Q_1} = 0{,}7920$$

$$\frac{V_2}{Q_2} = 0{,}7855$$

$$\frac{V_3}{Q_3} = 0{,}7878$$

also im Mittel: $= 0{,}78843$ Volt.

Um aus diesen Messungen die wirklich gelieferte Elektricitätsmenge berechnen zu können, muss noch die Capacität jener Metalltheile bekannt sein, auf welchen diese Spannung geherrscht hat. Es waren dies die isolirte obere Stahlplatte der Presse, der Knopf des Elektrometers mit daran hängendem Goldblatte und der Verbindungsdraht zwischen Presse und Elektrometer. Diese Capacität wurde mit der eines Plattencondensators verglichen, dessen Capacität gerechnet werden konnte. Zu diesem Vergleiche wurde das Goldblattelektrometer selbst verwendet und wurden Versuche mit zwei verschiedenen Distanzen der Platten des Condensators gemacht.

Der Condensator hatte kreisrunde gleichgrosse Platten und wurde daher die Kirchhoff'sche Formel:

$$q = \frac{R^2}{4a} + \frac{R}{4\pi}\left[\log\frac{16\pi(a+b)}{ea^2} + \frac{b}{a}\log\frac{a+b}{b} + 2\right]$$

angewandt.

Darin bedeutet:

$R = 8{,}0058$ cm den Radius
$b = 0{,}3$ cm die Dicke und
$a = 0{,}3741$ cm und $0{,}5147$ cm den Abstand

} der Platten.

Daraus folgt die Capacität des Condensators für die zwei verschiedenen Abstände zu:

$$q_1 = 43{,}269 \text{ cm und}$$
$$q_2 = 31{,}712 \text{ cm.}$$

Der Vergleich der gesuchten Capacität C mit diesen zwei berechneten ergab die Verhältnisse:

$$\frac{q_1}{C} = 1{,}8, \text{ daraus folgt: } C = 24{,}05 \text{ cm}$$

und

$$\frac{q_2}{C} = 1{,}4, \text{ daraus folgt: } C = 22{,}70 \text{ cm}$$

also im Mittel: $C = 23{,}37$ cm.

Da die Capacität in elektrostatischem Maasse gemessen ist, so muss noch das Potential in diesem Maasse ausgedrückt werden, also die 0,78843 Volt durch 3×10^{10} dividirt werden. Das Product aus Potential und Capacität gibt dann die gesuchte Elektricitätsmenge, im elektrostatischen Maasse gemessen.

Die von dem Quarze in der Richtung einer piëzoelektrischen Axe beim Drucke von 1 kg gelieferte Elektricitätsmenge ergibt sich daher zu:

$$E = 0{,}06142 \ (C.\ G.\ S.).$$

In den Versuchen von J. und P. Curie ist angegeben, dass die von einer von einem Kilo gedrückten Quarzplatte gelieferte Elektricitätsmenge im Stande war, eine Kugel von 16,6 cm Radius auf das Potential eines Daniells zu laden, d. h. $E = 0{,}062$ gefunden wurde, was mit obigem Resultate sehr gut übereinstimmt.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 15. Mai 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Prof. Dr. S. Exner hält den angekündigten Vortrag: „Ueber irregulären Astigmatismus".

Hierauf spricht Herr Prof. Dr. E. Lippmann: „Ueber die Einwirkung von xanthogensaurem Kali auf Phenole" und Herr Dr. C. Pomeranz: „Ueber Cubebin".

Herr J. Klimetschek demonstrirt und erläutert die Zulkowsky'sche Mineralmühle.

Wien, 29. Mai 1888.

Der Secretär.

Eingesendete Bücher.

Samuelson A., Das wahre Gesetz der Dampfexpansion und die Berechnung der dreistufigen Expansionsdampfmaschine. Leipzig bei L. Voss. 1888. 125 S. mit vielen Tabellen. 5 Mk. Das Buch ist eine Zusammenstellung von vier Vorträgen des Autors über die Theorie der Tripel-Compound-Maschine; ausserdem sind in demselben neue physikalische Principien in Bezug auf die Natur des Wasserdampfes niedergelegt. Der Autor belegt seine Ansichten durch zahlreiche Experimente.

Beetz W. v., Leitfaden der Physik. Neunte Auflage. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von J. Henrici. Leipzig, Grieben's Verlag 1888. 354 S. mit 339 Abbildungen. 3 Mk. 60. Schon die grosse Zahl von Auflagen spricht für die Güte des Buches, das namentlich für die mittleren Lehranstalten sich besonders eignet. Durch die jüngste Bearbeitung ist auch den Neuerungen thunlichst Rechnung getragen worden.

Marggraff H. Carl August Steinheil und sein Wirken auf telegraphischem Gebiete. Eine Gedenkschrift. München bei Th. Riedel. 1888. 45 S. 2 Mk. Die Schrift schildert in sehr anregender Weise die Verdienste des grossen Gelehrten um die Einführung und Verbesserung der Telegraphie.

Uppenborn F., Geschichte der Transformatoren. München bei R. Oldenbourg. 1888. 44 S. 2 Mk. Der Zweck der kleinen Schrift ist hauptsächlich der durch directes Studium der Patente den einem jeden Erfinder wirklich gebührenden Antheil an der Entdeckung der Transformatoren zu bestimmen. Ausserdem werden die Anfänge derselben bis auf Faraday zurückverfolgt.

Mielberg, Meteorologische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums im Jahre 1886. Tiflis 1888.

netische Maschine. Von Josef Popper. — Ueber die Messung nicht inductionsfreier Widerstände mittels des Telephons. Von Josef Popper. — Die einfachste Methode zur Erzielung gleichgerichteter, galvanometrisch messbarer Inductionsströme. Von R.-A. Dr. Rudolf Lewandowski, k. k. Professor. — **Kleinere Mittheilungen.** Telephonie. „Telephonische Abhörung" der Vorstellung der Pariser Oper im Hauptpavillon der Weltausstellung zu Brüssel. — Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung in Bayreuth. — Elektr. Strassenbeleuchtung in Berlin. — Elektr. Beleuchtung der Strasse „Unter den Linden" und der Kaiser Wilhelmsstrasse zu Berlin. — Elektr. Beleuchtung in Eberstadt. — Verschiedenes. Transformatoren von Prof. M. Doubrava. — **Finanzielle und industrielle Nachrichten. — Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, Verlagsbuchhandlung.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (12a;8)

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Soeben erschienen:

Ueber den gegenwärtigen Stand

der

elektrischen Beleuchtung.

Bericht

an den Verein der Gas- und Wasserfachmänner Deutschlands

erstattet von

Dr. Schilling sen.

Octav. 45 Seiten. *Brochirt Preis 70 Pf.*

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale

Elektrische Maasssystem

im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis M. 1.—.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg. (13a/8)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin.
Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Die

Fortschritte der Physik

im Jahre 1882.

Dargestellt von

der physikalischen Gesellschaft in Berlin.

XXXVIII. Jahrgang.

Zweite Abtheilung, enthaltend: Physik des Aethers.

Redigirt von **Prof. Dr. F. Neesen**
und **Dr. E. Rosochatius.**

Preis: 15 Mark.

Dritte Abtheilung, enthaltend: Physik der Erde.

Redigirt von **Prof. Dr. B. Schwalbe.**

Preis: 16 Mark. (8/8)

Verlag von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig.**

Die elektrischen

NATURKRAEFTE,

der Magnetismus, die Elektricität und der galvanische Strom mit ihren hauptsächlichsten Anwendungen.

Inhalt. Der Magnetismus. — Die elektrischen Fundamentalerscheinungen. — Der Blitz u. die Blitzableiter. — Der galvanische Strom. — Die Telegraphie. — Inductionsströme u. Inductionsapparate. — Das elektrische Licht. — Der Elektromagnetismus als Triebkraft. — Die Galvanoplastik. — Elektr. Zündungen.

Gemeinfasslich dargestellt von

Dr. Ph. Carl,

Professor an der kgl. Kriegsakademie in München.

Zweite Auflage. 1879. 8. 276 Seiten Text mit 113 Holzschn. Geh. 3 M., eleg. in Ganzlwd. geb. 4 M.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdriefsen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden."

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 9. Heftes.

Ueber die Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen. Von Ludwig Gartenschläger. S. 537.
Die Bestimmung der Durchschnittstemperatur durch das Gewicht von verdampftem Wasser und die Messung des relativen Dampfdrucks. Von W. Müller-Erzbach. S. 575.
Ueber eine merkwürdige Aufreissung des Kupfers durch den elektrischen Strom. Von Dr. B. Nebel. S. 586.
Der Elasticitätsmodul und die Schallgeschwindigkeit. Von A. Kurz. S. 592.
Entgegengekuppelte Fadenwagen zur absoluten Kraftmessung. Von G. Jaumann. S. 600.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,

Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschichte der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 8).

Jahrgang 1888 Nr. 23 enthält:

Rundschau. — Ueber eine Beziehung zwischen der Helligkeit einer Glühlampe und der entsprechenden Stromstärke. Von K. F. Slotte. — Elektrotechnische Briefe. Von J. Zacharias. — Das Ampère-étalon von M. Pellat. — Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens. Die Quadruplextelegraphie in Amerika. — Auszüge aus Patentschriften. — Kleinere Mittheilungen. Telephonie. Fernsprechverbindung zwischen Berlin und Breslau. — Elektrische Kraftübertragung. Elektrische Bahn in Richmond. — Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung in Wien. — Elektrische Fernleitung in Wien. — Elektr. Beleuchtung in Temesvar und Norderney. — Verschiedenes. Elektrische Zeitregulirung in Berlin. — Elektrisches Gerben. — Der Kupferring. — Einschlagen des Blitzes in die Leitung der elektrischen Bahn in Offenbach. — Feuer infolge Kurzschlusses einer Lichtleitung in der Rotunde in Wien. — Dynamo von Paterson & Cooper. — Patente.

Jahrgang 1888 Nr. 24 enthält:

Rundschau. — Transportable elektrische Beleuchtungseinrichtungen. Von W. E. Fein. — Ueber die Verwendung des Mikrophons (Transmitters) bei elektrischen Widerstandsmessungen mit dem Telephon und über den Einfluss des Gesichtsorganes auf den Gehörsinn. Von Dr. B. Nebel. — Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens. Bells Wasserstrahl-Telephon. — Apparat zur Prüfung von Telephontransmittern und Inductionsrollen. — Das System van Rysselberghe. — Auszüge aus Patentschriften. — Kleinere Mittheilungen. Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung in Rostock. — Elektrische Centralstation für die westlichen Bezirke Wiens. — Verschiedenes. Dauerleistung von Dynamos. — Blitzableiterstationen in dem Riesengebirge. — Patent für einen »Telautographen«. — Patente.

Jahrgang 1888 Nr. 25 enthält:

Rundschau. — Eine mechanische Regulirung der Dynamomaschinen. Von Paul Müller. — Beitrag zur unipolaren Induction. Von Prof. J. Puluj. — Bestimmungen der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten. Von Theodor Wähner. — Ueber die Elektrolyse durch Wechselströme. Von C. F. — Fortschritte der Physik. Untersuchungen über Trockenelemente. Von Hrch. v. Billing. — Auszüge aus Patentschriften. — Kleinere Mittheilungen. Personalnachricht. Rudolf Clausius †. — Telephonie. Fernsprechverbindung zwischen Berlin und Breslau. — Elektrische Beleuchtung. Elektrische Bahnbeleuchtung. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinen-Ausstellung in München 1888. — Versuche der Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft zu Berlin. — Patente.

Ueber die Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen.

Von

Ludwig Gartenschläger.

Einleitung.

Die gewöhnlichen dioptrischen Formeln für sphärische Flächen gelten nur dann, wenn die auffallenden Strahlen mit den Einfallsloten sehr kleine Winkel bilden, so dass man sin und tg der Bogen mit den Bogen selbst, cos derselben mit der Einheit vertauschen kann. Für ein centrirtes System brechender Flächen erfordert diese Bedingung, dass die Strahlen mit dem allen Flächen gemeinsamen Einfallslote, nämlich der Centrale, sehr kleine Winkel bilden, und es gelten daher die dioptrischen Formeln, wie sie in den Lehrbüchern der Physik entwickelt sind, in aller Strenge nur für unendlich dünne Strahlenbündel, welche in und neben der Richtung der Centrale (paraxial) einfallen. Gauss hat in seinen klassischen „Dioptrischen Untersuchungen" (1841) diese Beschränkungen bekanntlich zu Grunde gelegt. Sind sie erfüllt, so schneiden sich die von einem Punkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung an beliebig vielen sphärischen Flächen wieder in einem Punkte, d. h. sie bleiben homocentrisch.

In Wirklichkeit aber haben die Strahlenbündel erstens eine gewisse Dicke, zweitens bilden sie grössere Winkel mit der Axe.

Der ganze Complex des von einem Punkte ausgehenden Strahlenkegels erfährt nach der Brechung an einer sphärischen Fläche eine Modification, bildet eine Brennfläche, gebildet von den Schnittpunkten benachbarter gebrochener Strahlen. Dieselbe ist identisch mit der Krümmungsmittelpunktsfläche der Wellenfläche und besitzt im Haupttheil nach einmaliger Brechung die Form des sog. Sturm'schen Conoids [1]). Die Brennfläche leuchtet, da sich in ihr Lichtstrahlen schneiden; helleres Leuchten findet aber nur an den Stellen statt, wo die Schnittpunkte eng zusammen liegen — Brennlinien resp. Brennpunkte.

1) Sturm, Compt. rend. (1845). Uebersetzt in Pogg. Ann. Bd. 65 (1845).

Fällt ein unendlich dünnes Bündel auf die Fläche, so besteht das Bild auch nur aus unendlich kleinen Theilen der Brennfläche, nämlich aus den beiden Brennlinien.

Sind mehrere brechende Flächen vorhanden, so ist die Lage der Brennlinien auch für peripherische Lage des leuchtenden Punktes noch leicht zu bestimmen, falls ein unendlich dünnes Strahlenbündel vorgelegt ist. Für ein solches Strahlenbündel gilt nämlich das Gesetz, dass alle Strahlen nach der Brechung durch zwei unendlich kleine, gerade Brennlinien hindurchgehen, wie Sturm, der Begründer der Theorie des Astigmatismus, gezeigt hat.

Sturm und Kummer haben ausserdem den Satz aufgestellt, dass die beiden Brennlinien immer auf dem Hauptstrahle des Bündels senkrecht stehen. Dies Theorem hat jedoch streng keine allgemeine Giltigkeit; seine Unzulänglichkeit für die geometrische Optik ist mehrfach mathematisch unzweideutig nachgewiesen worden [1]).

Solange die brechenden sphärischen Flächen centrirt sind, steht die erste Brennlinie noch auf dem Hauptstrahle senkrecht. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so kann auch die erste Brennlinie eine Neigung gegen den Hauptstrahl erhalten [2]).

Das Bild eines von der Centrale entfernten leuchtenden Punktes besteht also bei genügender Dünne des auffallenden Strahlenbündels aus zwei getrennten Brennlinien, und zwar liegen diese in den beiden Hauptnormalschnitten der Wellenfläche.

Für die vorliegende Arbeit habe ich mir als Hauptaufgabe das Problem gestellt, die für die Abbildung eines solchen Punktes geltenden mathematischen Gesetze zu erweitern für ein sehr kleines astigmatisches, peripherisch gelegenes Quadrat, dessen Seiten senkrecht zum einfallenden Strahle sind und ein beliebiges Azimuth gegen den Axenschnitt bilden, und zwar für den Fall des parallelen Durchgangs der Strahlen durch eine homogene, sphärische, ungleichseitige Linse.

Um dies Problem zu lösen, d. h. um die dioptrischen Elemente für das austretende Strahlenbündel zu bestimmen, theilen wir die Aufgabe in mehrere Theile, indem wir:

I. Die Bedingungen feststellen, die für das auffallende Strahlenbündel erfüllt sein müssen, damit der Durchgang der Strahlen parallel sei.

---

1) Man vergl. Reusch, Reflexion und Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen etc. Pogg. Ann. Bd. 130 S. 497 (1867).

L. Matthiessen, Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels etc. Acta mathem. Cah. IV. II. (1884).

2) Man vergl. unten II. § 2 in fine. Ausserdem: L. Matthiessen, Münchener Sitzungsberichte Bd. 13 S. 44 ff. (1883).

II. Die Gleichungen ableiten, die für den zu betrachtenden Fall den Ort der Bilder, die Azimuthe der Seiten der letzteren und die Bildgrössen finden lassen.

III. Zur Bestätigung der Theorie die Resultate einer Reihe von praktisch ausgeführten Versuchen angeben.

I. Theil.

Bedingung des parallelen Durchgangs.

§ 1.

Beweis, dass nur ein Axenschnitt der Linse betrachtet zu werden braucht.

Es lässt sich zeigen, dass für die Brechung an einer beliebigen Fläche Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen. Nimmt man dies zunächst als richtig an, so folgt unmittelbar, dass bei einer Linse der parallele Durchgang in einem Axenschnitt stattfinden muss.

Nämlich, soll die Bedingung des parallelen Durchgangs erfüllt sein, so muss auch der an der zweiten Fläche gebrochene Strahl in der Einfallsebene des auf die erste Fläche auffallenden Strahles gelegen sein. Diese Ebene geht nun durch den Mittelpunkt der ersten Linsenfläche, d. h. durch einen Punkt der Centrale hindurch. Könnte gezeigt werden, dass sie noch durch einen zweiten Punkt der Centrale gehen muss, so wäre der Beweis geliefert. Dies folgt aber daraus, dass bei der Brechung an der zweiten Fläche Einfallslot, auffallender und gebrochener Strahl wiederum laut Voraussetzung eine und dieselbe Ebene bilden, denn dies ist nur so möglich, dass das Einfallslot der zweiten Fläche in die ursprüngliche Einfallsebene hineinfällt, d. h. dass letztere auch durch den Mittelpunkt der zweiten Linsenfläche geht.

Denjenigen Punkt, in welchem der innerhalb der Linse verlaufende Strahl die Centrale schneidet, nennt man den „optischen Mittelpunkt".

Es erübrigt, die Richtigkeit obiger Annahme nachzuweisen.

Betrachtet man eine beliebige Fläche als Trennungsfläche zweier brechender Medien, und ist in dem einen Medium ein leuchtender Punkt L gegeben, der einen Lichtstrahl aussendet, welcher nach der Brechung durch den Punkt L' geht, so tritt der Fermat'sche Satz in Kraft:

„Die optische Länge (Gangzeit) eines Strahles zwischen zwei Punkten ist ein Minimum".

Ist die Gleichung der trennenden Fläche, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem:

$$F(x\,y\,z) = 0,$$

bedeutet ferner:

v die Geschwindigkeit des Lichtes in dem vorderen Medium,

v_1 diejenige in dem hinteren Medium,

und sind schliesslich:

$x_1\, y_1\, z_1$ die Coordinaten des Punktes L,

$x_1'\, y_1'\, z_1'$ diejenigen des Punktes L',

so ist nach dem Bemerkten die Aufgabe, den Weg des Lichtstrahls zwischen den beiden Punkten zu bestimmen, ein Problem der Maxima und Minima einer Function von mehreren Veränderlichen.

In einem und demselben Medium kann der Weg nur ein geradliniger sein. Sei derselbe im ersten Medium $L\,X$, im zweiten Medium $X\,L'$, und bezeichne T die Zeit, welche das Licht gebraucht, um den Weg $L\,X\,L'$ zurückzulegen, so besteht die Gleichung:

$$T = \frac{L\,X}{v} + \frac{X\,L'}{v_1},$$

oder, wenn $x\,y\,z$ die Coordinaten des Punktes X sind:

$$T = \frac{1}{v}\sqrt{\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\}} + \frac{1}{v_1}\sqrt{\{(x_1'-x)^2 + (y_1'-y)^2 + (z_1'-z)^2\}}.$$

Die Coordinaten von X müssen der Flächengleichung:

$$F(x\,y\,z) = 0 \qquad (1$$

genügen, sodass T als Function von x und y aufzufassen ist.

Bildet man jetzt die partiellen Ableitungen von T nach x und y und setzt diese der Null gleich, so ergibt sich:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{v}\cdot\frac{x - x_1 + (z-z_1)\frac{\partial z}{\partial x}}{L\,X} - \frac{1}{v_1}\cdot\frac{x_1' - x + (z_1'-z)\frac{\partial z}{\partial x}}{X\,L'} = 0 \qquad (2$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{v}\cdot\frac{y - y_1 + (z-z_1)\frac{\partial z}{\partial y}}{L\,X} - \frac{1}{v_1}\cdot\frac{y_1' - y + (z_1'-z)\frac{\partial z}{\partial x}}{X\,L'} = 0. \qquad (3$$

Auflösbar nach x, y und z sind die drei Gleichungen 1, 2 und 3 in diesem ganz allgemeinen Falle nicht. Sie lassen sich jedoch so verwerthen, dass obige Behauptung einleuchtend wird.

Dazu formen wir die Gleichungen etwas um und setzen zunächst die Winkel, welche $L\,X$ mit den Coordinatenaxen bildet, resp.

$$= \alpha,\ \beta,\ \gamma;$$

diejenigen, welche $X\,L'$ mit ihnen bildet, resp.

$$= \alpha',\ \beta',\ \gamma'.$$

Dann nehmen die Gleichungen 2 und 3 die Form an:

$$\frac{1}{v}\left(\cos\alpha + \cos\gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{1}{v_1}\left(\cos\alpha' + \cos\gamma' \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{1}{v}\left(\cos\beta + \cos\gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{1}{v_1}\left(\cos\beta' + \cos\gamma' \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Setzen wir noch den relativen Brechungsindex:

$$\frac{v}{v_1} = n,$$

so folgt unmittelbar:

$$\cos\alpha - n \cdot \cos\alpha' + (\cos\gamma - n \cdot \cos\gamma')\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (4$$

$$\cos\beta - n \cdot \cos\beta' + (\cos\gamma - n \cdot \cos\gamma')\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (5$$

Diese Bedingungen sind geometrisch auszuwerthen.

Wir legen eine Ebene durch LX und XL', deren Gleichung die Form gegeben werden kann:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + \zeta - z = 0.$$

Dabei sind dann die Gleichungen von LX:

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta - z)$$

$$\eta - y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta - z),$$

diejenigen von XL':

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}(\zeta - z)$$

$$\eta - y = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}(\zeta - z),$$

und dies ergibt durch Einsetzung der Werthe in die Gleichung der Ebene:

$$A \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + B \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + 1 = 0$$

$$A \cdot \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'} + B \cdot \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'} + 1 = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$A = \frac{\cos\beta \cdot \cos\gamma' - \cos\beta' \cdot \cos\gamma}{\cos\alpha \cdot \cos\beta' - \cos\alpha' \cdot \cos\beta}$$

$$B = \frac{\cos\gamma \cdot \cos\alpha' - \cos\gamma' \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta' - \cos\alpha' \cdot \cos\beta'}$$

sodass die Gleichung der Ebene LXL' lautet:

$$\begin{aligned}&(\cos\beta\cdot\cos\gamma'-\cos\beta'\cdot\cos\gamma)(\xi-x)+\\&(\cos\gamma\cdot\cos\alpha'-\cos\gamma'\cdot\cos\alpha)(\eta-y)+\\&(\cos\alpha\cdot\cos\beta'-\cos\alpha'\cdot\cos\beta)(\zeta-z)=0.\end{aligned}\qquad(6$$

Weiter: Die Gleichungen der Normale zur Fläche im Einfallspunkte X haben die Form:

$$\xi-x=-\frac{\partial z}{\partial x}(\zeta-z)$$

$$\eta-y=-\frac{\partial z}{\partial y}(\zeta-z).$$

Hierin sind die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ einzusetzen, welche sich aus den Gleichungen 4 und 5 ergeben, nämlich:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos\alpha-n\cdot\cos\alpha'}{\cos\gamma-n\cdot\cos\gamma'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos\beta-n\cdot\cos\beta'}{\cos\gamma-n\cdot\cos\gamma'},$$

sodass die Gleichungen der Normale werden:

$$\xi-x=\frac{\cos\alpha-n\cdot\cos\alpha'}{\cos\gamma-n\cdot\cos\gamma'}(\zeta-z)$$

$$\eta-y=\frac{\cos\beta-n\cdot\cos\beta'}{\cos\gamma-n\cdot\cos\gamma'}(\zeta-z).$$

Nun zeigt sich, dass, wenn man diese Werthe von $\xi-x$ und $\eta-y$ in die Gleichung der Ebene (6) einsetzt, man nach einigen Transformationen die identische Gleichung erhält:

$$\begin{aligned}&n\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\gamma'-n\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\gamma'+\\&n\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\beta'-n\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\beta'+\\&n\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta'\cdot\cos\gamma'-n\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta'\cdot\cos\gamma'+\\&\cos\alpha\ \cos\beta\cdot\cos\gamma'-\ \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma'+\\&\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\cos\beta'-\ \cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\cos\beta'+\\&\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha'-\ \cos\beta\ \cos\gamma\cdot\cos\alpha'=0.\end{aligned}$$

Einfalls- und Brechungsebene fallen also in der That zusammen. Dasselbe gilt, wenn das Object von beliebiger endlicher Grösse ist. Es ist dann der Hauptstrahl des Strahlenbündels zu Grunde zu legen.

§ 2.

Bestimmung der Coordinaten des Einfallspunktes.

Es sei ein leuchtender Punkt L und eine Linse vorgelegt. Um dann die Coordinaten desjenigen Punktes zu finden, in welchem der von dem Objecte ausgesandte und parallel durchgehende Strahl die

vordere Fläche der Linse trifft, kann man sich nach dem Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf Betrachtungen in einer durch L und die Centrale gelegten Ebene beschränken (Fig. 1).

Im folgenden möge bedeuten:

H und G die Mittelpunkte resp. der ersten und zweiten Linsenfläche,

r_1 und r_2 die Radien der genannten sphärischen Flächen,

A den gesuchten Punkt mit den Coordinaten x und y,

d die Dicke der Linse, schliesslich

$L\,A\,B\,M$ den zu betrachtenden Lichtstrahl.

$G\,H$ sehen wir als Abscissen-Axe eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems an, dessen Anfangspunkt H sein soll.

Für parallelen Durchgang der Strahlen sind die Winkel, welche die Radien $A\,H$ und $G\,B$ mit der Centrale bilden, bekanntlich einander gleich, d. h. es ist:

$$\sphericalangle\,\vartheta = \lambda.$$

Bei parallelem Durchgange werden also $A\,B$, d, sowie die Centrale $D = G\,H$ durch den optischen Mittelpunkt C in Theile getheilt, welche

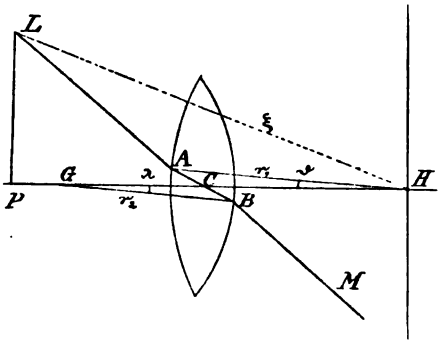


Fig. 1.

den Radien proportional sind. Daraus folgt zunächst, dass C ein fester Punkt ist. Ferner ergeben sich daraus die Coordinaten dieses festen Punktes. Aus der Proportion:

$$G\,C : C\,H = r_2 : r_1 \text{ oder}$$

$$(G\,C + C\,H) : C\,H = (r_2 + r_1) : r_1$$

folgt nämlich:

$$C\,H = \frac{(G\,C + C\,H)\,r_1}{r_1 + r_2}$$

$$= \frac{D \cdot r_1}{r_1 + r_2}.$$

worin:

$$D = r_1 + r_2 - d.$$

Diesen für CH gefundenen Werth wollen wir z. A. $= c$ setzen. Das Problem lässt sich dann folgendermaassen aussprechen:

Es sind zwei Punkte fest gegeben:

$$L: x_1\ y_1$$
$$C: c\ \ 0,$$

und ein Kreis:

$$x^2 + y^2 = r_1^2.$$

Es soll der Weg eines Lichtstrahls LAC so bestimmt werden, dass auf ihm das Licht in der kürzesten Zeit von L nach C gelangt.

In diesem Falle ist

$$T = \frac{1}{v}\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}} + \frac{1}{v_1}\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}$$

oder

$$T = n\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}} + n_1\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}},$$

wenn n und n_1 die Brechungsindices der beiden Medien bedeuten.

Wir wenden das Verfahren von Lagrange an, indem wir setzen:

$$F = n\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}} + n_1\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}} - \lambda(x^2 + y^2 - r_1^2)$$

und bilden

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{n(x_1 - x)}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} + \frac{n_1(x - c)}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{n(y_1 - y)}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} + \frac{n_1 y}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} - 2\lambda y = 0.$$

Diese beiden Gleichungen, in Verbindung mit der Flächengleichung:

$$x^2 + y^2 - r_1^2 = 0,$$

sind hinreichend und nothwendig zur Bestimmung von x, y und λ. Dabei ist λ ein unbekannter Factor, der wieder herauszuschaffen ist.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$-\frac{n(x_1 - x)y}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} + \frac{n_1(x - c)y}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} + \frac{n(y_1 - y)x}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} - \frac{n_1 xy}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} = 0$$

oder

$$\frac{n(y_1 x - x_1 y)}{\sqrt{(\alpha^2 - 2x_1 x - 2y_1 y)}} = \frac{n_1 cy}{\sqrt{\{\beta^2 - 2cx\}}},$$

worin z. A. gesetzt ist:

$$x_1^2 + y_1^2 + r_1^2 = \alpha^2$$
$$c^2 + r_1^2 = \beta^2.$$

Erhebt man beide Seiten der Gleichung ins Quadrat, so resultirt:

$$\frac{n^2 (y_1^2 x^2 + x_1^2 y^2 - 2 x_1 y_1 x y)}{\alpha^2 - 2 x_1 x - 2 y_1 y} = \frac{n_1^2 c^2 y^2}{\beta^2 - 2 c x}$$

oder

$$n^2 (\beta^2 - 2 c x)(y_1^2 x^2 + x_1^2 y^2) - n_1^2 c^2 y^2 (\alpha^2 - 2 x_1 x)$$
$$= 2 n^2 (\beta^2 - 2 c x) x_1 y_1 x y - 2 n_1^2 c^2 y_1 y^2.$$

Setzt man hierin für y seinen Werth ein:

$$y = \sqrt{r_1^2 - x^2},$$

und setzt man zugleich z. A.:

$$y_1^2 - x_1^2 = \eta^2,$$

so bekommt man die Gleichung:

$$n^2 (\beta^2 - 2 c x)(\eta^2 x^2 + r_1^2 x_1^2) - n_1^2 c^2 (r_1^2 - x^2)(\alpha^2 - 2 x_1 x)$$
$$= 2 n^2 x_1 y_1 x \sqrt{r_1^2 - x^2} - 2 n_1^2 c^2 y_1 (r_1^2 - x^2) \cdot \sqrt{r_1^2 - x^2}.$$

Erhebt man schliesslich nochmals beide Seiten ins Quadrat, um die Irrationalitäten fortzuschaffen, so erhält man:

$$n^4 (\beta^4 - 4 \beta^2 c x + 4 c^2 x^2)(\eta^4 x^4 + 2 x_1^2 r_1^2 \eta^2 x^2 + x_1^4 r_1^4)$$
$$+ n_1^4 c^4 (r_1^4 - 2 r_1^2 x^2 + x^4)(\alpha^4 - 4 \alpha^2 x_1 x + 4 x_1^2 x^2)$$
$$- 2 n^2 n_1^2 c^2 (\beta^2 - 2 c x)(\eta^2 x^2 + x_1^2 r_1^2)(r_1^2 - x^2)(\alpha^2 - 2 x_1 x)$$
$$= 4 n^4 x_1^2 y_1^2 x^2 (r_1^2 - x^2)$$
$$+ 4 n_1^4 c^4 y_1^2 (r_1^4 - 2 r_1^2 x^2 + x^4)(r_1^2 - x^2)$$
$$- 8 n^2 n_1^2 c^2 x_1 y_1^2 x (r_1^4 - 2 r_1^2 x^2 + x^4).$$

Dies ergibt für die Bestimmung von x eine bikubische Gleichung von deren Aufstellung abgesehen werden soll. Hat man für einen speciellen Fall x hieraus berechnet, so findet man das zugehörige y mit Hilfe der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = r_1^2.$$

Hiermit ist die Bedingung, dass der Durchgang eines Lichtstrahls der parallele sei, analytisch ausgedrückt, indem die Coordinaten des Einfallspunktes bestimmt sind.

Für praktische Messungen ist die bikubische Gleichung allerdings kaum zu verwenden. Man kann aber auch davon absehen, denn im Verlaufe dieser Arbeit — im III. Theile, § 1 — zeigt sich, dass der Winkel ϑ ($= \lambda$) immer sehr klein bleibt, kaum über $\frac{1}{2}^0$ hinausgeht, sodass also y sehr klein ist und x infolgedessen sich von r_1 sehr wenig unterscheidet.

II. Theil.

Ableitung der mathematischen Gesetze der Abbildung.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Ist das Object nicht ein leuchtender Punkt, sondern eine Strecke, so werden die Bilder theils Rechtecke, theils Rhomboide sein, je nach den Winkeln, welche die Strecke mit der Centrale und der Einfallsebene bildet[1]).

Ist aber ein leuchtendes Object vorhanden, welches nach zwei Dimensionen ausgedehnt ist, so erscheint das Bild allenthalben undeutlich und verzerrt, weil keine Bildpunkte, sondern Bildlinien entstehen. Verhältnismässig deutlich sind im Bilde noch solche Linien, deren Punkte in der Richtung der Linie selbst verzerrt sind. Von einem Quadrate erscheint also an der Stelle der ersten Brennlinie ein Bild mit scharfen Begrenzungslinien in der einen Richtung, verschwommenen Linien in der darauf senkrechten Richtung; dagegen an der Stelle der zweiten Brennlinie ein Bild mit scharfen Begrenzungslinien in der zweiten, verschwommenen Linien in der ersten Richtung.

Daraus folgt, dass bei einem leuchtenden Objecte von endlicher Grösse, z. B. einem Quadrate, dieselben Formeln anwendbar sind wie bei einem leuchtenden Punkte; der Unterschied besteht nur darin, dass man in diesem Falle in den beiden Brennlinien zwei scharfe, deutliche Bilder erhält, in jenem Falle dagegen nirgends deutliche Bilder entstehen, sondern ein sog. astigmatisches Quadrat.

Soll für die vorliegende Arbeit das Object von vorneherein ein astigmatisches Quadrat sein, so kann man sich den Vorgang so denken, dass ursprünglich ein sehr kleines Quadrat gegeben ist, welches Strahlen auf eine brechende sphärische Fläche aussendet und also durch diese zu einem astigmatischen Quadrate abgebildet wird, und dass schliesslich dahinter die Linse sich befindet.

In Fig. 2 sei $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_2 b_2 c_2 d_2$ ein solches sehr kleines astigmatisches Quadrat, von dem ein Strahlenbündel schief auf eine Linse auffällt, jedoch so, dass der Hauptstrahl nach der Brechung an der zweiten Fläche parallel mit seiner Einfallsrichtung ist. Dabei möge $a_2 b_2$ und $c_2 d_2$ den Strahlenfächern erster Art, $a_1 c_1$ und $b_1 d_1$ denjenigen zweiter Art angehören.

Im vorigen Paragraphen ist für einen leuchtenden Punkt die Richtung des auffallenden Strahles für parallelen Durchgang bestimmt.

---

1) L. Matthiessen, Ueber die Form astigmatischer Strahlenbündel etc. Münchener Sitzungsberichte Bd. 13 S. 49 ff. (1883).

Soll letztere Bedingung für das vom astigmatischen Quadrate ausgesandte dünne Strahlenbündel auch erfüllt sein, so muss der Hauptstrahl des letzteren dieselbe Richtung haben, wie der vorhin bestimmte Strahl, vorausgesetzt, dass der Auffallspunkt derselbe ist. Die Lage des Objects ist demnach bei fester Stellung der Linse keine willkürliche, sobald die Grösse des Einfallswinkels bestimmt ist. Mit dem Einfallswinkel ist nämlich zugleich der Auffallspunkt bekannt, wie später gezeigt wird.

Dabei liegt dann der Hauptstrahl auch stets mit der Centrale in einer Ebene, und dies ist nothwendig, wenn die Betrachtungen nicht ungemein complicirt werden sollen.

Wir wollen nun annehmen, dass das Object eine solche Lage habe, dass der Durchgang der Strahlen der parallele sei, wollen aber zunächst nicht direct von dem Quadrate ausgehen, sondern von zwei Brennlinien. Diese erhalten wir, indem wir durch diejenigen Punkte des Hauptstrahls, in welchen derselbe von den beiden Theilen des astigmatischen Quadrats getroffen wird, Parallele zu den jedesmaligen scharf begrenzten Seiten des Objects ziehen. Da die Seiten des letzteren nach Voraussetzung senkrecht zum Hauptstrahle sind, so sind es auch diese Parallelen. Durch diese Strecken legen wir ein astigmatisches Strahlenbündel, welches selbige als Brennlinien enthält, und sehen zu, wo dieselben durch die Linse abgebildet werden und wie ihr Azimuth zum Axenschnitt sich gedreht hat. An demselben Orte würde auch die Abbildung des vorgelegten Quadrats geschehen, mit denselben Azimuthen der Seiten.

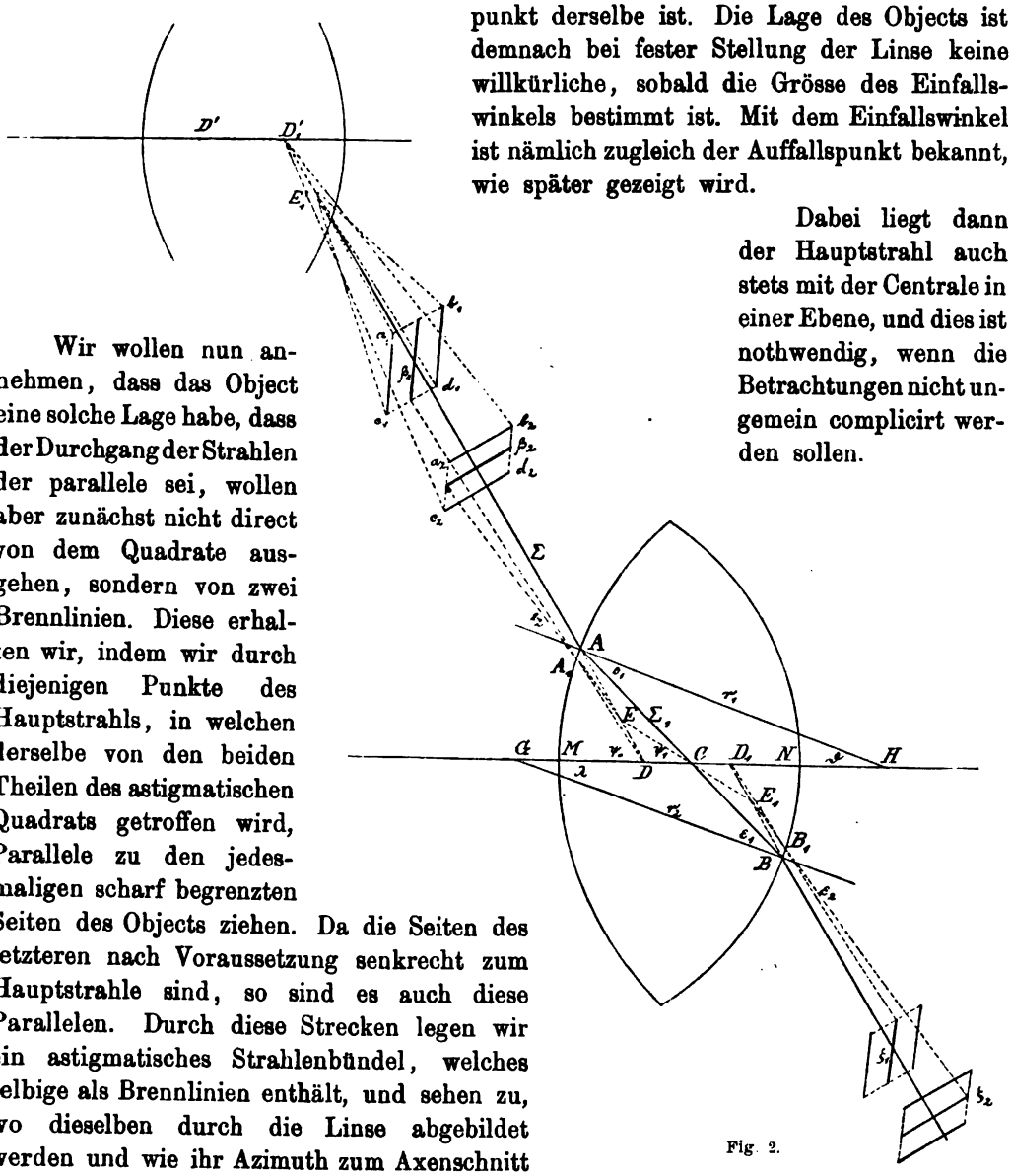


Fig. 2.

Sodann gehen wir wieder zum Quadrate über und ziehen auch seine Grösse, sowie die Grösse der Bilder in Betracht.

Da die Linse laut Voraussetzung homogen und auch unkrystallinisch ist, so gilt der Malus'sche Satz, d. h. so behalten die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen nach beliebig vielen Brechungen die Eigenschaft, ein orthogonales Flächensystem (Wellenflächen) zu besitzen. Damit ist aber gegeben, dass ein sehr dünnes astigmatisches Strahlenbündel, dessen Brennlinien zu einander und auch zum Hauptstrahl rechtwinklig stehen, nach der Brechung an beliebig vielen Flächen wenigstens zwei zu einander senkrechte Brennlinien behält, immer vorausgesetzt, dass die durchlaufenen Medien homogen und unkrystallinisch sind.

Lässt man das Strahlenbündel auf die Linse auffallen, so wird es durch die vordere Fläche derselben so gebrochen, dass es wieder zwei Brennlinien hat, die nun ihrerseits als Object für die hintere Fläche der Linse dienen, um hier denselben Process der Abbildung nochmals vor sich gehen zu lassen. Sämmtliche Strahlen, die von einer Brennlinie ausgehen und dem Strahlenbündel angehören, gehen auch durch beide Brennlinien des gebrochenen Strahlenbündels.

§ 2.

Ort der Bilder, sowie ihr Azimuth gegen den Axenschnitt.

C. Neumann[1]) hat den Fall der Brechung eines astigmatischen Strahlenbündels an einer beliebigen Fläche behandelt, wonach sich drei Formeln aufstellen lassen, die zur Bestimmung der Azimuthe der Brennlinien des gebrochenen Strahlenbündels und ihrer Abstände von der Fläche geeignet sind.

Erste Fläche.

Ist

$$f(x\,y\,z) = 0$$

die Gleichung einer brechenden Fläche, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, und sind zwei Punkte diesseits und jenseits der Fläche gegeben, so wird es unter allen von dem diesseitigen Punkte ausgehenden Strahlen einen geben, welcher nach der Brechung durch den zweiten Punkt geht. Es möge dieser Strahl in dem Punkte $(x\,y\,z)$ auf die Fläche treffen. Dann ist zunächst nach dem Fermat'schen Satze:

$$n\varrho + n_1\varrho_1 = u = \text{Minimum}, \qquad (1$$

wenn n und n_1 die Indices der beiden Medien, ϱ und ϱ_1 resp. die Object- und Bilddistanz von dem Einfallspunkte bedeuten. Vermittelst

1) C. Neumann, Ueber die Brechung eines unendlich dünnen regulären Strahlenbündels. Berichte d. kgl. sächs. Ges. d. Wissensch., Math.-Phys. Klasse (1880).

des Lagrange'schen Verfahrens ergeben sich ferner die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} - \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

worin λ einen unbestimmten Factor bedeutet. Hieraus folgt:

$$n \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} + n_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = n A - n_1 A_1$$
$$n \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} + n_1 \cdot \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = n B - n_1 B_1 \qquad (2$$
$$n \frac{\partial \varrho}{\partial z} + n_1 \cdot \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = n C - n_1 C_1,$$

wenn man die Richtungscosinus von ϱ und ϱ_1 resp. mit A, B, C und A_1, B_1, C_1 bezeichnet, und zwar in der Richtung des fortschreitenden Lichtes. Diese drei Gleichungen, verbunden mit der Gleichung der Fläche, reichen zur Bestimmung von A_1, B_1, C_1 aus.

Für einen Nachbarstrahl, der durch den Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ geht, ist:

$$n \cdot dA - n_1 \cdot dA_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial z} \cdot dz \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot d\lambda$$
$$n \cdot dB - n_1 \cdot dB_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial z} \cdot dz \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot d\lambda \quad (3$$
$$n \cdot dC - n_1 \cdot dC_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial y} \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot dz \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot d\lambda$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = 0.$$

Wir setzen nun

$$x = y = z = 0,$$

d. h. machen den Einfallspunkt zum Anfangspunkt des Coordinaten-Systems, und wählen die in diesem Punkte auf der Fläche errichtete Normale zur Z-Axe. Ein auf die Fläche auffallendes unendlich dünnes Strahlenbündel trifft nur ein unendlich kleines Element der Oberfläche, sodass man für letztere das osculirende Parabolid setzen kann, dessen Gleichung ist:

$$f = \frac{Mx^2 + Ny^2 + 2Oxy}{2} - z = 0,$$

worin M, N, O Constanten sind, die im Falle der Kugel folgende Werthe haben:

$$M = N = \frac{1}{r}, \quad O = 0.$$

Dann vereinfachen sich die Formeln 2 und 3 in folgender Weise:

$$\begin{aligned} nA - n_1 A_1 &= 0 \\ nB - n_1 B_1 &= 0 \\ nC - n_1 C_1 &= -\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

$$n \cdot dA - n_1 \cdot dA_1 = \lambda (M \cdot dx + O \cdot dy) = \lambda \cdot \frac{dx}{r}$$

$$n \cdot dB - n_1 \cdot dB_1 = \lambda (O \cdot dx + N \cdot dy) = \lambda \cdot \frac{dy}{r} \tag{5}$$

$$n \cdot dC - n_1 \cdot dC_1 = -d\lambda$$

und

$$dz = 0,$$

denn es ist

$$\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda (M \cdot x + O \cdot y) = 0,$$

und ebenso

$$\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

weil

$$x = y = z = 0.$$

Es lässt sich hier unmittelbar sehen, dass Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen. Da dies aber im Anfange schon auf einem anderen Wege nachgewiesen ist, so soll hier nicht noch einmal darauf eingegangen werden.

Ist der Einfallswinkel des auffallenden Lichtstrahls $= e_2$, der Brechungswinkel $= e_1$; ist ferner das Azimuth der Einfallsebene $= \varphi$, dasjenige der Brechungsebene $= \psi$, so hat man zunächst:

$$\begin{aligned} A &= \sin e_2 \cdot \cos \varphi \\ B &= \sin e_2 \cdot \sin \varphi \\ C &= \cos e_2 \\ dA &= \cos e_2 \cdot \cos \varphi \cdot de_2 - \sin e_2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \\ dB &= \cos e_2 \cdot \sin \varphi \cdot de_2 + \sin e_2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \\ dC &= -\sin e_2 \cdot de_2, \end{aligned}$$

und analoge Werthe für A_1, B_1, C_1, dA_1, dB_1, dC_1. Nun ist aber

$$\varphi = \psi,$$

und wählt man noch die Einfallsebene zur XZ-Ebene, so reduciren sich die Werthe von A, B, C etc., und die Gleichungen 4 und 5 nehmen, wenn man diese Werthe einsetzt, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} n \cdot \sin e_2 - n_1 \cdot \sin e_1 &= 0 \\ 0 &= 0 \qquad (6 \\ n \cdot \cos e_2 - n_1 \cdot \cos e_1 &= -\lambda \\ n \cdot \cos e_2 \cdot de_2 - n_1 \cdot \cos e_1 \cdot de_1 &= \lambda \cdot \frac{dx}{r} \\ n \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi - n_1 \cdot \sin e_1 \cdot d\psi &= \lambda \cdot \frac{dy}{r} \qquad (7 \\ -n \cdot \sin e_2 \cdot de_2 + n_1 \cdot \sin e_1 \cdot de_1 &= -d\lambda \end{aligned}$$

und $$dz = 0.$$

Bezeichnet man, wie es gewöhnlich geschieht, die Hauptstrahlen des einfallenden und des gebrochenen Bündels mit Σ und Σ_1 (Fig. 2); ferner die vorderen Brennlinien mit β_1 und β_2, die hinteren mit α_1 und α_2 (letztere sind in der Figur nicht gezeichnet); ihre Abscissen, von der Fläche ab in der positiven Richtung gerechnet, resp. mit ξ_0, x_0, x_1, x_2; die Azimuthe von $\Sigma\beta_1$ und $\Sigma\alpha_1$ gegen die Einfallsebene resp. mit ϑ_1 und ϑ_2; schliesslich die Richtungscosinus von β_2 und β_1 resp. mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1)$, so folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \cos e_2 \cdot \sin \vartheta_1 & \mathfrak{a}_1 &= -\cos e_2 \cdot \cos \vartheta_1 \\ \mathfrak{b} &= \cos \vartheta_1 & \mathfrak{b}_1 &= \sin \vartheta_1 \\ \mathfrak{c} &= -\sin e_2 \cdot \sin \vartheta_1 & \mathfrak{c}_1 &= \sin e_2 \cdot \cos \vartheta_1. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot dA + \mathfrak{b} \cdot dB + \mathfrak{c} \cdot dC &= \sin \vartheta_1 \cdot de_2 + \cos \vartheta_1 \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi \\ \mathfrak{a}_1 \cdot dA + \mathfrak{b}_1 \cdot dB + \mathfrak{c}_1 \cdot dC &= -\cos \vartheta_1 \cdot de_2 + \sin \vartheta_1 \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Ein unendlich naher Strahl (Nebenstrahl), dessen Einfallspunkt die Coordinaten dx, dy, dz hat, soll auch dem astigmatischen Strahlenbündel angehören. Dazu muss er durch die Brennlinien β_2 und β_1 gehen, etwa in den Punkten $(\xi\,\eta\,\zeta)$ und $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$. Man erhält dann einmal:

$$\xi = A \cdot x_0 + \mathfrak{a} \cdot d\beta_2,$$

und ein anderes Mal:

$$\xi = dx + (A + dA)(x_0 + dx_0),$$

je nachdem man bei der Projection von ξ auf die X-Axe entweder auf dem Hauptstrahl, oder auf dem Nebenstrahl fortschreitet (Fig. 3). Ganz analog folgt:

$$\begin{aligned} \eta &= Bx_0 + \mathfrak{b} \cdot d\beta_2 = dy + (B + dB)(x_0 + dx_0) \\ \zeta &= Cx_0 + \mathfrak{c} \cdot d\beta_2 = dz + (C + dC)(x_0 + dx_0). \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1 = 0$$
$$\mathfrak{a}_1 A + \mathfrak{b}_1 B + \mathfrak{c}_1 C = 0,$$

da die ersten Brennlinien zu einander und auch zum Hauptstrahle

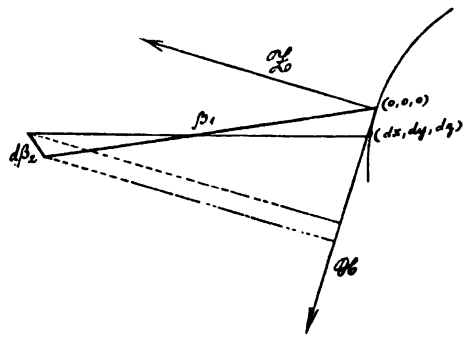


Fig. 8.

senkrecht sind. Multiplicirt man die drei Gleichungen für $\xi\eta\zeta$ der Reihe nach mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, so erhält man mithin:

$$\mathfrak{a}_1 \cdot dx + \mathfrak{b}_1 \cdot dy + \mathfrak{c}_1 \cdot dz + x_0(\mathfrak{a}_1 \cdot dA + \mathfrak{b}_1 \cdot dB + \mathfrak{c}_1 \cdot dC) = 0,$$

und ebenso:

$$\mathfrak{a} \cdot dx + \mathfrak{b} \cdot dy + \mathfrak{c} \cdot dz + \xi_0(\mathfrak{a} \cdot dA + \mathfrak{b} \cdot dB + \mathfrak{c} \cdot dC) = 0,$$

wenn man für ξ_1, η_1, ζ_1 dasselbe durchführt. Setzt man hierin die Werthe ein, so folgt:

$$\begin{aligned} &x_0(-\cos\vartheta_1 \cdot de_2 + \sin\vartheta_1 \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi) \\ &-\cos e_2 \cdot \cos\vartheta_1 \cdot dx + \sin\vartheta_1 \cdot dy \qquad = 0 \\ &\xi_0(\sin\vartheta_1 \cdot de_2 + \cos\vartheta_1 \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi) \\ &+\cos e_2 \cdot \sin\vartheta_1 \cdot dx + \cos\vartheta_1 \cdot dy \qquad = 0, \end{aligned}$$

und daraus wieder:

$$de_2 = -\left\{\left(\frac{\cos^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2\vartheta_1}{\xi_0}\right)\cos e_2 \cdot dx + \left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right)\sin\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_1 \cdot dy\right\}$$

$$\sin e_2 \cdot d\varphi = -\left\{\left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right)\sin\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_1 \cdot \cos e_2 \cdot dx + \left(\frac{\sin^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2\vartheta_1}{\xi_0}\right)dy\right\}.$$

Ist z. A.:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2\vartheta_1}{\xi_0} &= P \\ \frac{\sin^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2\vartheta_1}{\xi_0} &= Q \\ \left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right) \cdot \sin\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_1 &= R, \end{aligned}\right\} \quad (8$$

so werden die letzten beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} de_2 &= -(P \cdot \cos e_2 \cdot dx + R \cdot dy) \\ \sin e_2 \cdot d\varphi &= -(R \cdot \cos e_2 \cdot dx + Q \cdot dy). \end{aligned}\right\} \quad (9$$

Die Formeln für das gebrochene Strahlenbündel sind diesen für das einfallende Bündel geltenden ganz analog. Substituirt man nämlich die soeben gefundenen Werthe von de_2 und $\sin e_2 \cdot d\varphi$ in den beiden ersten Formeln von Gl. 7, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$\left.\begin{aligned} de_1 &= -(P_1 \cdot \cos e_1 \cdot dx + R_1 \cdot dy) \\ \sin e_1 \cdot d\varphi &= -(R_1 \cdot \cos e_1 \cdot dx + Q_1 \cdot dy). \end{aligned}\right\}$$

Hierin ist:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \cdot P_1 \cdot \cos^2 e_1 &= n \cdot P \cdot \cos^2 e_2 + \frac{\lambda}{r_1} \\ n_1 \cdot Q_1 &= n \cdot Q + \frac{\lambda}{r_1} \\ n_1 \cdot R_1 \cdot \cos e_1 &= n \cdot R \cdot \cos e_2. \end{aligned}\right\} \quad (10$$

Ferner werden aber auch folgende Beziehungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2\vartheta_2}{x_2} + \frac{\sin^2\vartheta_2}{x_1} &= P_1 \\ \frac{\sin^2\vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2\vartheta_2}{x_1} &= Q_1 \\ \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \sin\vartheta_2 \cdot \cos\vartheta_2 &= R_1. \end{aligned}\right\} \quad (11$$

Wir wollen die Formeln 10 noch etwas anders schreiben. Aus den Gleichungen 6 folgt sofort:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sin e_2}{\sin e_1},$$

und sodann:

$$\lambda = n \cdot \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1}.$$

Setzt man diesen Werth von λ ein, und setzt man ferner noch:

$$\frac{n_1}{n} = \nu,$$

so resultiren die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{r_1 \cdot P \cdot \cos^2 e_2 + \dfrac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1}}{\nu \cdot r_1 \cdot \cos^2 e_1} \\ Q_1 &= \frac{r_1 \cdot Q + \dfrac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1}}{\nu \cdot r_1} \\ R_1 &= \frac{R \cdot \cos e_2}{\nu \cdot \cos e_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (12$$

Diese bestimmen P_1, Q_1, R_1, denn auf den rechten Seiten stehen lauter bekannte Grössen. P_1, Q_1, R_1 ihrerseits lassen durch Vermittlung der Gleichungen 11 die drei Unbekannten ϑ_2, x_1, x_2 finden, und zwar ergibt sich:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_2 = \frac{2R_1}{Q_1 - P_1},$$

während x_1 und x_2 als Wurzeln der quadratischen Gleichung auftreten:

$$\left(\frac{1}{x} - P_1\right)\left(\frac{1}{x} - Q_1\right) = R_1^2.$$

Die Abscissen-Gleichungen nehmen hier folgende Form an [1]):

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \left(\frac{\sin^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2\vartheta_1}{\xi_0}\right) + \frac{n r_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\left(\frac{\sin^2\vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2\vartheta_2}{x_1}\right) = 1$$

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_2}{\sin(e_2 - e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2\vartheta_1}{\xi_0}\right) +$$

$$+ \frac{n \cdot r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_2}{x_2} + \frac{\sin^2\vartheta_2}{x_1}\right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right)\frac{\cos e_2}{\cos e_1} \cdot \sin 2\vartheta_1 = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \sin 2\vartheta_2.$$

Dieselben sind eine Verallgemeinerung der Fundamentalformel der Dioptrik:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1,$$

dagegen eine Specialisirung der für den Scheitel des elliptischen Berührungs-Paraboloides einer beliebigen Fläche geltenden Abscissen-Gleichungen [2]):

---

1) Matthiessen, Vorlesungen über die Dioptrik centrirter sphärischer Flächen für schiefe Incidenz. § 32.

2) Matthiessen, Ebendaselbst § 48.

$$\frac{-a^2b^2}{2c(b^2\cdot\sin^2\varepsilon+a^2\cdot\cos^2\varepsilon)}\cdot\frac{\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\sin^2\vartheta_1}{x_0}+\frac{\cos^2\vartheta_1}{\xi_0}\right)+$$
$$+\frac{n\cdot a^2b^2\cdot\sin e_1}{2c(b^2\cdot\sin^2\varepsilon+a^2\cdot\cos^2\varepsilon)\cdot\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\sin^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{\cos^2\vartheta_2}{x_1}\right)=1$$
$$\frac{-a^2b^2}{2c(b^2\cdot\cos^2\varepsilon+a^2\cdot\sin^2\varepsilon)}\cdot\frac{\sin e_1\cdot\cos^2 e_2}{\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_1}{x_0}+\frac{\sin^2\vartheta_1}{\xi_0}\right)+$$
$$+\frac{n\cdot a^2\cdot b^2}{2c(b^2\cdot\cos^2\varepsilon+a^2\cdot\sin^2\varepsilon)}\cdot\frac{\sin e_1\cdot\cos^2 e_1}{\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{\sin^2\vartheta_2}{x_1}\right)=1$$
$$\frac{-a^2b^2\cdot\sin e_1\cdot\cos e_2\cdot\sin 2\vartheta_1}{2c(a^2-b^2)\cdot\sin(e_2-e_1)\cdot\sin 2\varepsilon}\left(\frac{1}{\xi_0}-\frac{1}{x_0}\right)+$$
$$+\frac{na^2b^2\cdot\sin e_1\cdot\cos e_1\cdot\sin 2\vartheta_2}{2c(a^2-b^2)\cdot\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1}\right)=1.$$

Hierin ist ε das Azimuth der Einfallsebene gegen einen Hauptnormalschnitt, a und b sind die Halbaxen der elliptischen Basis des Paraboloides im Abstande c vom Scheitel, d. h. es ist:

$$M=2c\left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2}+\frac{\sin^2\varepsilon}{b^2}\right)$$
$$N=2c\left(\frac{\sin^2\varepsilon}{a^2}+\frac{\cos^2\varepsilon}{b^2}\right)$$
$$O=2c\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon.$$

Man erhält rückwärts die für sphärische Flächen entwickelten Formeln, wenn man diese Werthe von M und $N=\frac{1}{r_1}$, denjenigen von $O=0$ setzt.

Wir nehmen an, dass das auffallende Strahlenbündel divergire, das gebrochene dagegen convergent sei. Dann sind ξ_0, x_0, P, Q, R als wesentlich negativ anzusehen.

Zweite Fläche.

Die beiden Brennlinien α_1 und α_2, deren Abscissen und Azimuthe hiermit bestimmt sind, dienen jetzt als Objecte für die zweite brechende Fläche. Setzt man die Länge von Σ_1 innerhalb der Linse $= T$ ($AB = T$), so sind die neuen Objectweiten, die ja von der zweiten Fläche abgerechnet werden müssen:

$$\xi_{0,1}=x_1-T$$
$$\xi_{0,2}=x_2-T,$$

wobei zu beachten ist, dass $\xi_{0,1}$ und $\xi_{0,2}$ als wesentlich negativ anzusehen sind.

Haben d und D dieselbe Bedeutung wie oben, ist ferner ε_1 der Einfallswinkel, ε_2 der Brechungswinkel an der zweiten Fläche, so findet man leicht:

$$T = r_1 \cdot \cos e_1 + r_2 \cdot \cos \varepsilon_1 - \sqrt{[D^2 - (r_1 \cdot \sin e_1 + r_2 \cdot \sin \varepsilon_1)^2]}.$$

Der Durchgang der Strahlen soll aber der parallele sein, und demzufolge ist:

$$\varepsilon_1 = e_1$$
$$\varepsilon_2 = e_2,$$

also:

$$T = (r_1 + r_2) \cos e_1 - \sqrt{[D^2 - (r_1 + r_2)^2 \cdot \sin^2 e_1]}.$$

Der relative Brechungsindex ist hier $= \frac{1}{\nu}$. Für die gesuchten Abscissen ξ_1 und ξ_2, sowie das Azimuth ϑ_3 werden dann folgende Relationen gelten:

$$\frac{\cos^2 \vartheta_3}{\xi_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_3}{\xi_1} = P_3$$
$$\frac{\sin^2 \vartheta_3}{\xi_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_3}{\xi_1} = Q_3$$
$$\left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\right) \sin \vartheta_3 \cdot \cos \vartheta_3 = R_3,$$

und daneben:

$$\left.\begin{aligned} P_3 &= \frac{\nu \cdot r_2 \cdot P_2 \cdot \cos^2 e_1 + \nu \cdot \dfrac{\sin (e_1 - e_2)}{\sin e_2}}{r_2 \cdot \cos^2 e_2} \\ &= \frac{\nu \cdot r_2 \cdot P_2 \cdot \cos^2 e_1 - \dfrac{\sin (e_2 - e_1)}{\sin e_1}}{r_2 \cdot \cos^2 e_2}, \\ Q_3 &= \nu \cdot Q_2 + \frac{\nu \cdot \sin (e_1 - e_2)}{r_2 \cdot \sin e_2} \\ &= \nu \cdot Q_2 - \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\sin (e_2 - e_1)}{\sin e_1}, \\ R_3 &= \nu \cdot R_2 \cdot \frac{\cos e_1}{\cos e_2}, \end{aligned}\right\} \quad (13$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= \frac{\cos^2 \vartheta_2}{\xi_{0,2}} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{\xi_{0,1}} \\ Q_2 &= \frac{\sin^2 \vartheta_2}{\xi_{0,2}} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{\xi_{0,1}} \\ R_2 &= \left(\frac{1}{\xi_{0,1}} - \frac{1}{\xi_{0,2}}\right) \sin \vartheta_2 \cdot \cos \vartheta_2. \end{aligned}\right\} \quad (14$$

Hat man hiernach P_2, Q_2, R_2 berechnet, so folgt:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_2 = \frac{2R_2}{Q_2 - P_2},$$

während ξ_1 und ξ_2 als Wurzeln der quadratischen Gleichung auftreten:

$$\left(\frac{1}{\xi} - P_2\right)\left(\frac{1}{\xi} - Q_2\right) = R_2^2.$$

Diese beiden Formeln lassen die Lage der Bilder, sowie die Azimuthe der Brennebenen finden.

Ist ϑ_1 von 0^0 und von 90^0 verschieden, so ist bei schiefer Incidenz des astigmatischen Strahlenbündels auch $\vartheta_2 - \vartheta_1$ von 0^0 oder 90^0 verschieden, d. h. es tritt eine Drehung der Brennebene ein.

Bedeutend einfacher gestalten sich die Formeln für den speciellen Fall, dass von den Brennlinien des auffallenden Strahlenbündels die eine senkrecht zur Einfallsebene, die andere mithin in der Einfallsebene liegt. Dann ist nämlich:

$$\vartheta_1 = 90^0,$$

und daher:

$$P = \frac{1}{\xi_0},\ Q = \frac{1}{x_0},\ R = 0,$$

$$R_1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_2 = 0,\ \text{d. h. } \vartheta_2 = 0^0 \text{ oder } 90^0,$$

wobei es gleichgiltig ist, welchen von den beiden Werthen für ϑ_2 man wählt. Die Abscissen-Gleichungen lassen sich dann auf die von Reusch gegebene Form bringen:

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{n \cdot r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$$

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{\xi_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_1} = 1.$$

Analoge Formeln gelten natürlich für die Brechung an der zweiten Fläche.

Im Tageblatt der Naturforscherversammlung in Wien (1856) gibt Weierstrass eine Construction des durchgehenden Strahles an. Später geschah dies von Reusch[1]). Auch von Lippich[2]) haben wir für obigen speciellen Fall geometrische Constructionen des Ortes der Brennlinien. Die nähere Betrachtung dieses Falles liegt aber ausserhalb der Aufgabe.

1) Reusch, Pogg. Ann. (1867).

2) Lippich, Denkschriften d. kaiserl. Akad. der Wiss. zu Wien, math. Klasse (1867).

Bezüglich der Inclinationen der Brennlinien β_1 β_2, α_1 α_2 gilt folgendes: Wie die Azimuthe der Brennebenen $\Sigma_1\,\alpha_1(\vartheta_2)$, $\Sigma_1\,\alpha_2(90^0+\vartheta_2)$ gegen $\Sigma\beta_1(\vartheta_1)$ und $\Sigma\beta_2(90^0+\vartheta_1)$ variiren, so variiren auch die Inclinationen der Brennlinien $\beta_1(\psi')$, $\alpha_1(\psi'')$, $\beta_2(\psi_1)$, $\alpha_2(\psi_2)$ gegen den Hauptstrahl. Prof. Matthiessen [1]) hat gezeigt, dass, wenn $\vartheta_1 = 90^0$, also auch $\vartheta_2 = 90^0$ ist, folgende Relationen gelten:

$$\frac{\operatorname{cotg}\psi''\cdot\operatorname{cotg}e_1\cdot\cos e_1(x_2-x_1)}{x_1^2\cdot x_2} = \frac{\operatorname{cotg}\psi'\cdot\operatorname{cotg}e_2\cdot\cos e_2(x_0-\xi_0)}{\xi_0^2\,x_0}$$

$$\frac{\operatorname{cotg}\psi_2\cdot\operatorname{cotg}e_1\cdot\dfrac{x_2-x_1}{x_1}-1}{x_2^2} - \frac{\operatorname{cotg}\psi_1\cdot\operatorname{cotg}e_2\,\dfrac{x_0-\xi_0}{\xi_0}}{x_0^2} =$$

$$= \frac{1}{r_1}\left(\frac{\cos e_2}{\xi_0}-\frac{\cos e_1}{x_1}\right),$$

wozu noch die beiden folgenden kommen:

$$\frac{-r_1\cdot\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{x_0}+\frac{nr_1\cdot\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{x_2}=1$$

$$\frac{-r_1\cdot\sin e_1\cdot\cos^2 e_2}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{\xi_0}+\frac{nr_1\cdot\sin e_1\cdot\cos^2 e_1}{\sin(e_2-e_1)}\cdot\frac{1}{x_1}=1.$$

Sind also die Brennlinien vor dem Einfall senkrecht zum Hauptstrahl, d. h. $\psi' = 90^0$, $\psi_1 = 90^0$, so bleibt $\psi'' = 90^0$, nicht aber ψ_2. Denn aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\operatorname{cotg}\psi_2 = \frac{x_1x_2^2\left\{\dfrac{1}{r_1}\left(\dfrac{\cos e_2}{\xi_0}-\dfrac{\cos e_1}{x_1}\right)+\dfrac{1}{x_2^2}-\dfrac{1}{x_0^2}\right\}}{(x_2-x_1)\operatorname{cotg}e_1}.$$

Mithin ist die Ansicht verschiedener Physiker, dass stets die Brennlinien auch nach der Brechung zum Hauptstrahle senkrecht bleiben, wenn sie es vor der Brechung waren, irrig.

Ist das einfallende Strahlenbündel homocentrisch, also $\xi_0 = x_0$, so geht die Gleichung mit Einführung der beiden Abscissen-Gleichungen über in:

$$\operatorname{cotg}\psi_2 = \frac{x_2-x_0\cdot\cos(e_2-e_1)}{x_0\cdot\sin(e_2-e_1)}.$$

Der geometrische Sinn davon ist, dass die zweite Brennlinie in der Centrale liegt. (Reusch.)

Liegt eine neue brechende Fläche so, dass das Azimuth der neuen Einfallsebene mit der vorangehenden Brechungsebene 90^0 beträgt, so werden alle vier Inclinationen von 90^0 verschieden.

1) Matthiessen, Vorlesungen etc. § 32.

Nimmt man ein astigmatisches Quadrat statt der beiden Brennlinien als Object, so ändert das nichts an diesen Betrachtungen.

§ 3.
Grösse der Bilder.

Es erübrigt, das Verhältnis von Object- und Bildgrösse festzustellen.

Bei paraxialen Strahlen gilt bekanntlich der Satz, dass sich die Objectgrösse zur Bildgrösse verhält wie die Entfernungen des Objects und Bildes von den Knotenpunkten. Für schiefen Durchgang der Strahlen gilt nun etwas ganz ähnliches, wenn die Strahlen parallel durchgehen; auch hier lässt sich zeigen, dass Object- und Bildwinkel einander gleich sind.

Dabei spielen die Directions- und Seitenpunkte eine Rolle. Die Directionspunkte (D und D_1) sind die Schnittpunkte der Strahlen, welche dem Strahlenfächer zweiter Art angehören; die Seitenpunkte (E und E_1) die Schnittpunkte der Strahlen des Strahlenfächers erster Art (Fig. 2). Strahlenfächer erster Art also, die vom optischen Mittelpunkt ausgehen, werden durch die Fläche so gebrochen, als wenn sie von den Punkten E und E_1 ausgingen. Und analog die Strahlenfächer zweiter Art. Bei paraxialem Durchgange fallen Directions- und Seitenpunkte in die Knotenpunkte hinein. Je schiefer dagegen der Auffall der Strahlen ist, um so weiter rücken die Directions- und Seitenpunkte von den Knotenpunkten ab, und zwar erstere auf der Axe, hingegen letztere auf einer complicirten Curve, die sich von der Axe und von der Mitte zugleich entfernt.

Man kann die Directions- und Seitenpunkte als schiefwinklige Cardinalpunkte der Linse bezeichnen, da sie für den schiefen Durchgang der Strahlen dieselbe Function haben, wie die Haupt- und Knotenpunkte für paraxiale Strahlenbündel.

Setzt man fest, dass ist:

$\partial\gamma$	der halbe	Objectwinkel	von	β_2	bei	E
$\partial\delta$	„	„	„	β_1	„	D
$\partial\gamma_1$	„	Bildwinkel	„	ζ_2	„	E_1
$\partial\delta_1$	„	„	„	ζ_1	„	D_1,

so hat man folgende Gleichungen [1]):

$$AE \cdot \partial\gamma = r_1 \cdot \cos e_2 \cdot \partial\vartheta \quad (1$$

$$BE_1 \cdot \partial\gamma_1 = r_2 \cdot \cos e_2 \cdot \partial\lambda \quad (2$$

$$AC \cdot \partial\psi_1 = r_1 \cdot \cos e_1 \cdot \partial\vartheta \quad (3$$

$$BC \cdot \partial\psi_1 = r_2 \cdot \cos e_1 \cdot \partial\lambda \quad (4$$

1) Matthiessen, Vorlesungen etc. § 47.

$$A D \cdot \partial \delta = A C \cdot \partial \psi \qquad (5$$
$$B D_1 \cdot \partial \delta_1 = B C \cdot \partial \psi, \qquad (6$$

worin $\partial \psi$ den Winkel bezeichnet, welchen AB mit den Randstrahlen des Strahlenfächers zweiter Art bildet.

$$\frac{(1 \cdot (4}{(2 \cdot (3}$$

gibt:

$$\frac{A E \cdot B C}{B E_1 \cdot A C} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_1} = \frac{\cos e_2 \cdot \cos e_1}{\cos \varepsilon_2 \cdot \cos \varepsilon_1}.$$

Für parallelen Durchgang wird aber sein:

$$\frac{A E}{A E_1} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{B C}{A C} = \frac{r_2}{r_1},$$
$$\varepsilon_2 = e_2, \quad \varepsilon_1 = e_1,$$

also:

$$\partial \gamma = \partial \gamma_1.$$

Weiter folgt aus den Gleichungen 5 und 6:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \delta_1} = \frac{A C}{B C} \cdot \frac{B D_1}{A D} = 1,$$

also:

$$\partial \delta = \partial \delta_1.$$

Da nun offenbar folgende Proportionen bestehen:

$$\beta_1 : \zeta_1 = \beta_1 D \cdot \partial \delta : \zeta_1 D_1 \cdot \partial \delta_1$$
$$\beta_2 : \zeta_2 = \beta_2 E \cdot \partial \gamma : \zeta_2 E_1 \cdot \partial \gamma_1,$$

so erhält man schliesslich:

$$\beta_1 : \zeta_1 = \beta_1 D : \zeta_1 D_1$$
$$\beta_2 : \zeta_2 = \beta_2 E : \zeta_2 E_1.$$

Das heisst also: Die Objectgrösse verhält sich zur Bildgrösse wie die Entfernungen einmal von den Directionspunkten, ein anderes Mal von den Seitenpunkten. Dabei hat man die Abstände bei denjenigen Hälften der astigmatischen Objecte, die aus Strahlenfächern zweiter Art bestehen, von den Directionspunkten, bei den andern Hälften von den Seitenpunkten zu nehmen.

§ 4.

Ueber Periskopie von Linsen.

Die entwickelten Sätze gelten nur für homogene Linsen. Sobald die Bedingung der Homogeneität nicht erfüllt ist, werden die Verhältnisse ganz andere.

Betrachten wir z. B. das menschliche Auge. Auf dasselbe fallen Strahlen aus allen möglichen Richtungen auf, sodass nicht nur paraxiale,

sondern auch stark peripherische Strahlen zur Verwendung kommen. Wäre nun die Linsencombination des Auges aus homogenen Medien bestehend, so könnte nirgends ein deutliches Bild entstehen. Das Auge ist aber durch besonderen Bau der Krystalllinse in hohem Maasse periskopisch, d. h. es ist geeignet, auch schief auffallende Strahlen, zugleich mit paraxialen, auf der Retina zu vereinigen. Die Schichtung der Linse bewirkt für die peripherischen Strahlen einen hohen Grad von Aplanatismus. Der geringe Astigmatismus, der noch bleibt und die Accomodation wiederum erleichtert, wird durch günstige Lage und Krümmung der Retina ziemlich unschädlich gemacht. Vermag der Mensch doch noch Bilder von seitlichen Objecten wahrzunehmen, die von der Augenaxe schläfenwärts um 90°, nasalwärts um 60° abstehen[1]), sodass sein Gesichtsfeld in wagerechter Richtung 150° umfasst.

Mathematische Rechnungen ergeben, dass die geometrischen Oerter für beide Brennlinien im Durchschnitt Curven sind, welche in der Nähe der Retina verlaufen, so zwar, dass die eine innerhalb des Glaskörpers, die andere ausserhalb desselben verläuft. Ihre Entfernungen von der Retina wachsen von 0 bis zu 1,6 resp. 2,6 mm für das Auge *A* von Helmholtz. Die Retina befindet sich hiernach angenähert in der Mitte zwischen diesen beiden Curven, und dass diese Lage die günstigste ist, ist augenscheinlich.

Auch bei künstlichen Linsen kann man von Periskopie reden, indem man den Grad der Vollkommenheit derselben nach der sog. Bildgüte *B* bemisst.

Je kleiner die Brennstrecke, desto grösser ist die Güte eines astigmatischen Bildes, wobei allerdings die Grösse des letzteren ebenfalls in Rechnung gezogen werden muss. Für sehr dünne Linsen findet man leicht, dass die Güte eines Bildes allein vom Incidenzwinkel ψ_0 abhängt[2]). Darf die Dicke der Linse nicht vernachlässigt werden, so ist es schwer, allgemeine Ausdrücke aufzustellen. Beschränkt man sich jedoch auf solche Winkel, deren Sinus-Potenzen von der dritten ab vernachlässigt werden dürfen, so gilt für parallelen Durchgang der Strahlen das Gesetz, dass die Bildgüte dem Quadrate des Incidenzwinkels umgekehrt proportional ist.

---

1) Schön, Ueber die Brechung seitlich einfallender Strahlen in der Linse. Sitzungsberichte der Heidelberger ophthalmolog. Ges. (1877). — Matthiessen, Die Differentialgleichungen der Dioptrik der geschichteten Krystalllinse. Pflüger's Archiv f. d. ges. Physiologie Bd. 19 (1879). — Stammeshaus, Ueber die Lage der Netzhautschale zur Brennfläche des dioptrischen Systems des menschlichen Auges. Archiv f. Ophthalmologie Bd. 20 (1874).

2) L. Hermann, Ueber Brechung bei schiefer Incidenz, mit besonderer Berücksichtigung des Auges. Pflüger's Archiv f. d. ges. Physiologie Bd. 20 S. 371 (1879).

Zur Ableitung dieser Gesetze ist folgende von Hermann aufgestellte Formel zu verwenden:

$$\frac{1}{B} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2 + \alpha_2},$$

worin φ_1 und φ_2 die hinteren Brennweiten der Linse von der zweiten Fläche abgerechnet, und α_2 den Abstand des Austrittspunktes des dünnen Strahlenbündels von dem zweiten Directionspunkte bedeuten. (Fig. 2, worin $BD_1 = \alpha_2$, $BE_1 = \beta_2$; $AD = \alpha_1$, $AE = \beta_1$.)

Besser noch ist die von Matthiessen aufgestellte Formel:

$$\frac{1}{B} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \alpha_2},$$

weil in derselben keines der Bilder bevorzugt ist.

Die Werthe sind folgende:

$$\varphi_1 = \frac{-\cos^2 e_2 \cdot r_2}{A} \cdot \frac{n r_1 \cdot \cos^2 e_1 - AT}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - AT}$$

$$\varphi_2 = \frac{-r_2}{A} \cdot \frac{n r_1 - AT}{n(r_1 + r_2) - AT}$$

$$A = \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1} = n \cdot \cos e_1 - \sqrt{1 - n^2 \cdot \sin^2 e_1}$$

$$T = (r_1 + r_2) \cdot \cos e_1 - \sqrt{\left\{D^2 - (r_1 + r_2)^2 \cdot \sin^2 e_1\right\}}$$

$$\sin e_1 = \frac{D \cdot \sin \psi_1}{r_1 + r_2}$$

$$\sin \psi_0 = \left\{n(r_1 + r_2) - AT\right\} \sin e_1,$$

und zwar immer für parallelen Durchgang der Strahlen.

Im allgemeinen wird die Relation sehr complicirt, so dass man genöthigt ist, Näherungswerthe einzuführen.

Bedeutend einfacher wird der Ausdruck für die Bildgüte, wenn man die Bilddistanzen von den zugehörigen inneren Cardinalpunkten abrechnet, d. h. wenn man setzt:

$$\frac{1}{B} = \frac{(\varphi_2 + \alpha_2) - (\varphi_1 + \beta_2)}{\varphi_2 + \alpha_2}.$$

Hierin ist:

$$\beta_2 = \frac{-r_2 \cdot T \cdot \cos^2 e_2}{n(r_1 + r_2) \cdot \cos^2 e_1 - AT}$$

$$\alpha_2 = \frac{-r_2 \cdot T}{n(r_1 + r_2) - AT},$$

also:

$$\varphi_2 + \alpha_2 = -\frac{1}{A} \cdot \frac{n r_1 r_2}{n(r_1 + r_2) - AT}$$

$$\varphi_1 + \beta_2 = -\frac{\cos^2 e_2}{A} \cdot \frac{n r_1 r_2 \cdot \cos^2 e_1}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - AT}.$$

Beschränkt man sich auch hier auf solche Winkel, deren Sinus-Potenzen von der dritten ab vernachlässigt werden dürfen, so ist es zunächst einerlei, ob im Nenner $\varphi_2 + \alpha_2$ oder $\varphi_1 + \beta_2$ steht. Ferner ist es gleichgiltig, welche Seite der Linse dem Objecte zugekehrt ist, da r_1 und r_2 symmetrisch vorkommen, während dies bei der vorigen Bemessung der Bildgüte nicht der Fall war. Man erhält angenähert:

$$A = (n-1)\left(1 + \frac{n}{2} \cdot \sin^2 e_1\right)$$

$$T = d\left(1 + \frac{r_1 + r_2}{D} \cdot \sin^2 e_1\right)$$

$$AT = (n-1)\,d\left\{1 + \frac{1}{2}\left(n + \frac{r_1 + r_2}{D}\right) \cdot \sin^2 e_1\right\}.$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für $\varphi_2 + \alpha_2$ und $\varphi_1 + \beta_2$ ein, so resultirt:

$$\frac{1}{B} = \left\{n^2 - \frac{(n-1)\,d}{n(r_1 + r_2) - (n-1)\,d}\right\} \cdot \sin^2 e_1$$

oder

$$\frac{1}{B} = \frac{D^2}{\{n(r_1 + r_2) - (n-1)\,d\}^2}\left\{n^2 - \frac{(n-1)\,d}{n(r_1 + r_2) - (n-1)\,d}\right\} \sin^2 \psi_0$$

da angenähert:

$$\sin e_1 = \frac{D}{n(r_1 + r_2) - (n-1)\,d} \cdot \sin \psi_0.$$

Der Ausdruck:

$$B \cdot \sin^2 \psi_0 = P$$

ist dann ein Maass für die Periskopie einer Linse, indem derselbe vom Incidenzwinkel unabhängig ist.

Sobald die Constanten einer Linse bekannt sind, lässt sich also dieser Werth für die Bildgüte bei gegebenem Incidenzwinkel unmittelbar berechnen.

Es zeigt sich hier noch eine Merkwürdigkeit: Bei schiefer Incidenz auf eine sphärische Fläche gelten, wie oben gezeigt, folgende Abscissen-Gleichungen [1]):

1) Vergl. auch: L. Hermann, Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen etc. S. 8 ff. Zürich 1874.

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$$
$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos^2 e_2}{x_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos^2 e_1}{x_1} = 1.$$

Setzt man hierin einmal $x_2 = \infty$, das andere Mal $x_1 = \infty$, so erhält man in den sich für x_0 ergebenden Werthen die beiden vorderen Brennweiten der ersten Fläche, von der brechenden Fläche abgerechnet:

$$f_2 = -\frac{r_1}{A} \qquad f_1 = -\frac{r_1 \cdot \cos^2 e_2}{A}.$$

Misst man die Abstände von den zugehörigen Directions- resp. Seitenpunkten ab, so kommt:

$$f_2 + \alpha_1 = -\frac{1}{A} \cdot \frac{n r_1 (r_1 + r_2)}{n(r_1 + r_2) - AT}$$
$$f_1 + \beta_1 = -\frac{\cos^2 e_2}{A} \cdot \frac{n r_1 (r_1 + r_2) \cdot \cos^2 e_1}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - AT},$$

und es zeigt sich, dass:

$$\frac{(f_2 + \alpha_1) - (f_1 + \beta_1)}{f_2 + \alpha_1} = \frac{(\varphi_2 + \alpha_2) - (\varphi_1 + \beta_2)}{\varphi_2 + \alpha_2} = \frac{1}{B}.$$

Man braucht hiernach nur die vorderen Brennweiten für den schiefen Einfall zu kennen, um den Werth der Bildgüte angeben zu können.

Bestimmt man die Bildgüte der Krystalllinse empirisch für verschiedene Incidenzwinkel, und berechnet man sodann die Bildgüte einer homogenen Linse von gleicher optischer Kraft, so findet man, dass die Krystalllinse vor der anderen einen bedeutenden periskopischen Vorzug hat. Die Längen der Brennstrecken sind nämlich im letzteren Falle bedeutend grösser als im ersteren [1]).

III. Theil.

Bestätigung der Formeln durch den Versuch.

§ 1.

Anordnung des Versuchs.

Die im physikalischen Institut ausgeführten Experimente waren folgendermaassen angeordnet (Fig. 4):

Als Lichtquelle diente eine kleine quadratische Oeffnung in einem eisernen Cylinder, der die helle Flamme eines Argandbrenners über-

1) Vergl. M. Peschel, Experimentelle Untersuchungen über die Periskopie der Krystalllinse. Pflüger's Archiv f. d. ges. Physiologie Bd. 20 S. 338 (1879).

deckte. Von diesem leuchtenden Objecte (L) liess ich ein Strahlenbündel schief auf eine beliebige biconvexe Linse auffallen, jedoch so, dass die Randstrahlen durch eine Blende abgehalten wurden. Dadurch erhielt ich hinter der Linse ein Bild von dem Quadrat, und zwar ein astigmatisches Bild, wie es der vorliegenden Aufgabe zu Grunde gelegt ist, dessen Bildweiten (ξ_1 und ξ_2) sich leicht messen liessen. Das austretende Strahlenbündel, welches das astigmatische Quadrat sozusagen als Brennlinien enthielt, liess ich wiederum auf eine andere biconvexe Linse auffallen, deren Constanten vorher bestimmt waren, welche ferner mit einer Blende versehen war, die in der Mitte eine kreisrunde Oeffnung von 8 mm Radius hatte, um parallelen Durchgang der Strahlen zu bewirken. Bei parallelem Durchgange verlaufen die Strahlen innerhalb der Linse ja in der Nähe der Axe. Es wäre im Princip correcter gewesen, eine noch kleinere Oeffnung in der Blende zu wählen, aber dies zeigte beim Versuch den Uebelstand, dass die Bilder zu lichtschwach, kaum sichtbar wurden; namentlich war dies bei dem zweiten Bilde der Fall. Beide Linsen befanden sich auf Stativen und standen stets so, dass ihre Aequatorialebenen vertical waren.

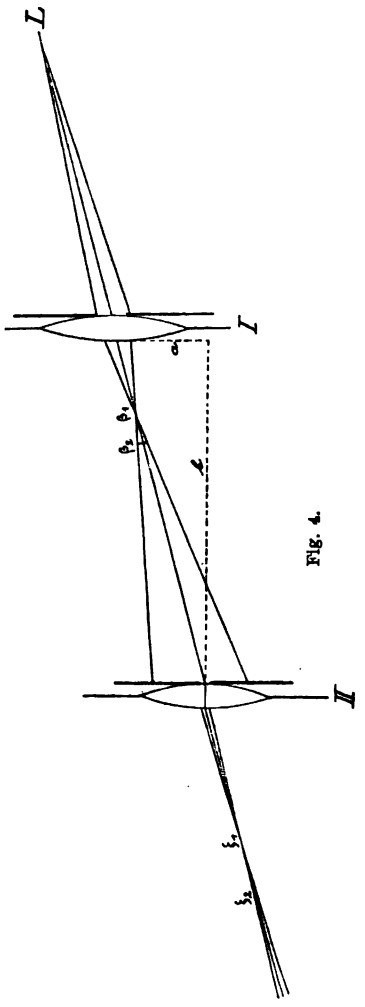


Fig. 4.

Die Seiten des zu Grunde zu legenden astigmatischen Quadrats sollen ein Azimuth gegen den Axenschnitt haben. Sind die Seiten des ursprünglichen leuchtenden Objects vertical resp. horizontal, und ist der verticale Axenschnitt der Linse I zugleich Einfallsebene, so findet die Bedingung nicht statt, denn dann wird der Zähler in dem Ausdrucke für $\operatorname{tg} \vartheta = 0$, d. h. ϑ wird $= 0^0$ oder 90^0.

Stellt man jedoch Linse I etwas schief, sodass die Einfallsebene gegen die Horizontale geneigt wird, so nehmen auch β_1 und β_2 eine Neigung gegen den verticalen Axenschnitt an, die mit wachsender

Drehung der Linse wächst. Um dies experimentell nachzuweisen, wurde die Linse mit ihrem Stativ, an welchem ein kleiner Zeiger angebracht war, auf einen mit einer Gradeintheilung versehenen Kreis gestellt, sodass bei einer Drehung der Linse der entsprechende Winkel abgelesen werden konnte. Die Neigung der Bilder gegen den verticalen Axenschnitt wurde hier wie auch bei den späteren Versuchen gemessen, indem die Bilder nacheinander auf einer kleinen Cartonscheibe aufgefangen wurden, welch' letztere in 360° eingetheilt und derart vermittelst einer Nadel an einem Stativ aufgehängt war, dass die Verbindungslinie 0° — 180° von selbst die Lage des Lotes annahm. Natürlich musste die Scheibe senkrecht gegen die durch das ausfallende Strahlenbündel gelegte Verticalebene hängen.

Bei den Versuchen ergaben sich folgende Daten:

Stellung des Zeigers	Einstellung von β_2
65°	20°
70°	15°
75°	10°
80°	5°
85°	0°
90°	— 5°
95°	— 10°
100°	— 15°
105°	— 20°

Man sieht, dass bei einer Einstellung des Zeigers auf 85° die Linse keine schiefe Stellung hatte.

Die Linse II dagegen muss so gestellt sein, dass das durch die Linse I erzeugte Strahlenbündel gerade auffällt. In diesem Falle hat man nämlich in dem auf der kleinen Scheibe abgelesenen Winkel von β_1 zugleich das Azimuth für Linse II gefunden, welches der Rechnung zu Grunde zu legen ist, während bei jeder anderen Stellung der Linse II dies schwer zu bestimmen sein würde wegen Verrückung der Einfallsebene aus dem verticalen Axenschnitt heraus.

Damit die beiden Linsen die richtige Stellung bekamen, wurde folgendermaassen verfahren:

Zunächst wurde die erste Linse so gestellt, dass die durch dieselbe erzeugten Bilder kein Azimuth hatten, und das austretende Strahlenbündel auf die zweite Linse auffallen lassen, wobei diese so lange verschoben wurde, bis die kleine im Diaphragma befindliche kreisrunde Oeffnung sich in der Mitte der auf jenem entstehenden symmetrischen

Figur (Ellipse) befand. Wurde alsdann Linse I mehr oder weniger gedreht, so erhielten ihre Bilder ein grösseres oder kleineres Azimuth, die Richtung des austretenden Hauptstrahls blieb aber dieselbe, was man daran erkennen konnte, dass zwar die helle Figur auf dem Diaphragma der Linse II sich gedreht und in die Länge gezogen, seine relative Lage zur Diaphragmenöffnung aber nicht geändert hatte. Man war also sicher, dass Linse II sich in der richtigen Stellung befand.

Das Azimuth des ersten astigmatischen Quadrats wurde ziemlich klein angenommen, weil die Bilder dadurch an Schärfe gewannen.

Wurde jetzt die Höhendifferenz beider Linsenmittelpunkte gemessen (a), ferner die Axenlänge der Linse II von deren vorderer Fläche bis zum Schnittpunkt mit der die hintere Fläche der Linse I in der Axe tangential berührenden Ebene (b), so war damit e_2 und ξ_0, x_0 für die Linse II gefunden, indem:

$$\operatorname{tg} e_2 = \frac{b}{a}$$
$$\xi_0 = \sqrt{a^2 + b^2} - \mathfrak{x}_1$$
$$x_0 = \sqrt{a^2 + b^2} - \mathfrak{x}_2.$$

ξ_0 und x_0 liessen sich natürlich auch direct messen.

Genau genommen hat man in $\frac{b}{a}$ nicht tg e_2 gefunden, sondern tg ψ_0 (Fig. 2); aber ψ_0 weicht von e_2 ungemein wenig ab, wie man aus folgender Tabelle ersehen kann.

Tabelle I.

e_2	ψ_1	ψ_0	ϑ
0°	0°	0°	0°
10°	6° 36′ 21″	10° 4′ 49″	4′ 49″
20°	13° 5′ 44″	20° 9′ 40″	9′ 40″
30°	19° 20′ 37″	30° 14′ 35″	14′ 35″
40°	25° 12′ 10″	40° 19′ 33″	19′ 33″
80°	40° 43′ 23″	80° 35′ 41″	35′ 41″

Die Werthe ergaben sich für gegebenes e_2 aus den Formeln:

$$\sin \psi_1 = \frac{(r_1 + r_2) \sin e_2}{n(r_1 + r_2 - d)}$$
$$\psi_0 = \psi_1 + e_2 - e_1$$
$$\vartheta = \psi_0 - e_2.$$

Also für einen Einfallswinkel von 30° beträgt der Unterschied ϑ noch nicht ganz $^1/_4{}^0$; und bei den folgenden Versuchen sind stets kleinere Einfallswinkel genommen, um einen allzu grossen Astigmatismus zu vermeiden.

Uebrigens lässt sich nach dieser Tabelle durch Interpolation der genauere Werth von e_2 leicht finden, wie es bei den Versuchen auch in Wirklichkeit geschehen ist. Zugleich erlaubt die Tabelle umgekehrt für gegebenen Einfallswinkel e_2 den zugehörigen Werth von ϑ zu finden, sowie denjenigen des Incidenzwinkels ψ_0.

Benutzt wurde eine Linse, für deren Constanten sich als Mittelwerthe aus sieben Messungen folgende Werthe ergaben:

$$r_1 = r_2 = 29{,}75 \text{ cm}$$
$$n = 1{,}528.$$

Ihre Dicke d wurde gefunden zu:

$$d = 0{,}72 \text{ cm}.$$

§ 2.

Resultate des Versuchs. — Ort und Azimuth der Bilder.

Die Versuche ergaben, nach dem Einfallswinkel geordnet, die folgenden Resultate:

Tabelle II.

e_1	ξ_1	ξ_2	ξ_0	x_0	ϑ_1	ξ_1	ξ_2	ϑ_2
	cm	cm	cm	cm		cm	cm	
13° 20′ 3″	41,6	45,1	63,8	60,3	80°	44,8	53,1	85°
13° 37′ 0″	35,1	38,1	53,5	50,5	82½°	50,2	61,5	88°
15° 44′ 3″	43,2	48,8	51,9	46,3	81°	51,0	69,9	86°
*16° 7′ 0″	30,5	34,0	51,78	48,28	85°	51,3	68,0	88°
16° 55′ 41″	32,9	37,5	56,0	51,4	80°	48,5	61,0	85°
19° 14′ 20″	46,0	37,9	32,0	38,1	85°	57,0	96,0	89°
*19° 45′ 2″	31,4	36,8	64,3	58,8	81°	38,8	50,4	88°
19° 53′ 2″	35,0	41,0	51,7	45,7	88°	45,7	71,0	90°
23° 41′ 40″	27,5	37,4	49,1	39,2	78°	42,6	80,0	87°
24° 12′ 5″	27,5	34,4	33,8	26,9	80°	61,3	278,0	85°
24° 45′ 40″	25,2	33,3	36,9	28,8	79°	55,0	300,0	84°
24° 55′ 30″	27,0	35,0	62,5	54,5	84°	34,0	53,5	88°
27° 17′ 30″	25,5	33,3	41,6	33,8	87°	32,7	141,0	89°
28° 38′ 0″	24,0	36,0	60,9	48,9	85°	29,4	56,0	89°

Einen ganz beliebigen von diesen Versuchen, und zwar den siebenten, habe ich nun herausgegriffen und für denselben die im

II. Theile angegebenen Rechnungsoperationen durchgeführt. Die einzelnen sich dabei ergebenden Resultate sollen im folgenden kurz angegeben werden.

Gegeben ist:

$$\begin{aligned} d &= 0{,}72 \text{ cm} & e_2 &= 19^0\,45'\,2'' \\ r_1 &= 29{,}75 \text{ „} & \xi_0 &= -64{,}3 \text{ cm} \\ r_2 &= -29{,}75 & x_0 &= -58{,}8 \text{ „} \\ \nu &= 1{,}528 & \vartheta_1 &= 81^0. \end{aligned}$$

Gesucht werden:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \vartheta_3.$$

Mit Hilfe der Formeln 8 findet man:

$$\begin{aligned} P &= -0{,}01558718 \\ Q &= -0{,}01697660 \\ R &= \ \ 0{,}00022326. \end{aligned}$$

Diese Werthe sind in Gl. 12 einzusetzen, um P_1, Q_1, R_1 zu erhalten. Es ergibt sich:

$$P_1 = \frac{-29{,}75 \cdot 0{,}01558718 \cdot \cos^2 19^0\,45'\,2'' + \dfrac{\sin 6^0\,58'\,30''}{\sin 12^0\,46'\,36''}}{1{,}528 \cdot 29{,}75 \cdot \cos^2 12^0\,46'\,36''}$$

$$= 0{,}0031998,$$

$$Q_1 = \frac{-29{,}75 \cdot 0{,}0169766 + 0{,}54911}{1{,}528 \cdot 29{,}75}$$

$$= 0{,}0009692,$$

$$R_1 = \frac{0{,}00022326 \cdot \cos 19^0\,45'\,2''}{1{,}528 \cdot \cos 12^0\,46'\,36''}$$

$$= 0{,}0001410.$$

Daraus findet man:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_2 = \frac{2R_1}{Q_1 - P_1} = -\frac{0{,}0002820}{0{,}0022306}$$

$$2\vartheta_2 = 180^0 - 7^0\,12'\,20'' = 172^0\,47'\,40''$$

$$\underline{\vartheta_2 = 86^0\,23'\,50''}.$$

Ferner treten x_1 und x_2 als Wurzeln der Gleichung auf:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 0{,}00416905 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 0{,}00000308 = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\left(\frac{1}{x}\right)_1 = 0{,}0032087;\ \underline{x_1} = \ 311{,}66 \text{ cm}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)_2 = 0{,}0009604;\ \underline{x_2} = 1041{,}27 \text{ cm}.$$

Da die weitere Rechnung ergibt:

$$T = 0{,}743 \text{ cm},$$

so ist für die zweite Fläche:

$$\xi_{0,1} = 310{,}917 \text{ cm}$$
$$\xi_{0,2} = 1040{,}527 \text{ cm}$$
$$\vartheta_2 = 86^0\,23'\,50''.$$

Dann folgt aus den Gleichungen 14:

$$P_2 = 0{,}00320749$$
$$Q_2 = 0{,}00096995$$
$$R_2 = 0{,}00014144,$$

und daraus durch Einsetzen in Gl. 13:

$$P_3 = \frac{1{,}528 \cdot 29{,}75 \cdot 0{,}00320749 \cdot \cos^2 12^0\,46'\,36'' + 0{,}54911}{29{,}75 \cdot \cos^2 19^0\,45'\,2''}$$
$$= 0{,}0260989,$$
$$Q_3 = 1{,}528 \cdot 0{,}00096995 + \frac{0{,}54911}{29{,}75}$$
$$= 0{,}019941,$$
$$R_3 = 1{,}528 \cdot 0{,}00014144 \cdot \frac{\cos 12^0\,46'\,36''}{\cos 19^0\,45'\,2''}$$
$$= 0{,}0002239.$$

Es ist dann wieder:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_3 = \frac{2R_3}{Q_3 - P_3} = -\frac{0{,}0004479}{0{,}0061579}$$
$$2\vartheta_3 = 180^0 - 4^0\,9'\,32''$$
$$= 175^0\,50'\,28''$$
$$\vartheta_3 = 87^0\,55'\,14''.$$

Ferner:

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)^2 - 0{,}0460399 \cdot \left(\frac{1}{\xi}\right) + 0{,}00052039 = 0,$$

so dass sich schliesslich ergibt:

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)_1 = 0{,}02605;\ \xi_1 = 38{,}39 \text{ cm}$$
$$\left(\frac{1}{\xi}\right)_2 = 0{,}01998;\ \xi_2 = 50{,}05 \text{ cm}.$$

Das Resultat ist also, dass die Rechnung sehr gut mit der Beobachtung übereinstimmt, denn erstere ergibt:

$$\xi_1 = 38{,}39 \text{ cm},\ \xi_2 = 50{,}05 \text{ cm},\ \vartheta_3 = 87^0\,55'\,14'',$$

und letztere:

$$\xi_1 = 38{,}8 \text{ cm}, \quad \xi_2 = 50{,}4 \text{ cm}, \quad \vartheta_3 = 88^0.$$

Noch für eine zweite Beobachtung habe ich die Rechnung durchgeführt, und zwar für die vierte.

Hierfür sind die gegebenen Grössen folgende:

$$\begin{aligned} e_2 &= 16^0\,7'\,0'' \\ \xi_0 &= -51{,}78 \text{ cm} \\ x_0 &= -48{,}28 \text{ „} \\ \vartheta_1 &= 85^0, \end{aligned}$$

und die Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} P &= -0{,}01932313 \\ Q &= -0{,}02070160 \\ R &= 0{,}00012155 \\ P_1 &= -0{,}0002582 \\ Q_1 &= -0{,}0016270 \\ R_1 &= 0{,}0000777, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= 86^0\,45'\,38'' \\ x_1 &= -3929{,}19 \text{ cm} \\ x_2 &= -613{,}19 \text{ cm}, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \xi_{0,1} &= -3929{,}9 \text{ cm} \\ \xi_{0,2} &= -613{,}9 \text{ cm}, \end{aligned}$$

da

$$T = 0{,}74 \text{ cm}.$$

Weiter folgt:

$$e_1 = 10^0\,28'\,0'',$$

und

$$\begin{aligned} P_1 &= -0{,}00025885 \\ Q_1 &= -0{,}00162454 \\ R_1 &= 0{,}00007753 \\ P_2 &= 0{,}0193220 \\ Q_2 &= 0{,}0157337 \\ R_2 &= 0{,}0001213, \end{aligned}$$

sodass die Rechnung ergibt:

$$\xi_1 = 51{,}4 \text{ cm}, \quad \xi_2 = 66{,}1 \text{ cm}, \quad \vartheta_2 = 88^0\,4'\,0'',$$

während beobachtet wurde:

$$\xi_1 = 51{,}3 \text{ cm}, \quad \xi_2 = 68{,}0 \text{ cm}, \quad \vartheta_2 = 88^0.$$

§ 3.

Fortsetzung. — Grösse der Bilder. Bildgüte und Periskopie.

Auch zur Bestätigung des über die Grösse der Bilder Gesagten wurden einige Versuche angestellt. Folgende Tabelle gibt die Resultate derselben an.

Tabelle III.

$\beta_1 D$	$\zeta_1 D_1$	$\beta_2 E$	$\zeta_2 E_1$	β_1	ζ_1	β_2	ζ_2
cm	cm	cm	cm	mm	mm	mm	mm
30,0	52,5	26,5	118,4	2,3	4,0	3,1	13,5
36,9	55,0	28,8	300,0	2,1	3,1	3,0	31,0
40,2	45,0	32,0	65,4	4,6	5,2	4,9	9,8
* 51,3	56,0	46,4	76,0	9,0	9,7	10,0	16,4
41,6	32,7	33,8	141,0	2,5	2,0	3,5	15,0
48,2	59,5	43,0	80,0	5,8	7,2	6,5	12,0
62,5	34,0	54,5	53,5	2,5	1,2	3,8	3,3
* 55,0	45,5	44,5	61,2	4,3	3.6	5,4	7,6
53,5	50,2	50,5	61,5	3,9	3,6	4,1	5,0
63,9	40,0	56,4	53,5	12,6	8,2	15,0	14,0

Nach den aufgestellten Formeln soll sich verhalten:

$$\beta_1 : \zeta_1 = \beta_1 D : \zeta_1 D_1$$
$$\beta_2 : \zeta_2 = \beta_2 E : \zeta_2 E_1,$$

d. h. es soll sein:

$$\beta_1 \cdot \zeta_1 D_1 = \zeta_1 \cdot \beta_1 D$$
$$\beta_2 \cdot \zeta_2 E_1 = \zeta_2 \cdot \beta_2 E.$$

Man sieht, dass die Tabelle dies vollkommen bestätigt. Greift man z. B. den vierten Versuch heraus, so ist dort:

$$\beta_1 \cdot \zeta_1 D_1 = 504{,}0 \qquad \beta_2 \cdot \zeta_2 E_1 = 760{,}0$$
$$\zeta_1 \cdot \beta_1 D = 497{,}6 \qquad \zeta_2 \cdot \beta_2 E = 760{,}9,$$

und für den achten Versuch ist:

$$\beta_1 \cdot \zeta_1 D_1 = 195{,}65 \qquad \beta_2 \cdot \zeta_2 E_1 = 330{,}48$$
$$\zeta_1 \cdot \beta_1 D = 198{,}0 \qquad \zeta_2 \cdot \beta_2 E = 338{,}26.$$

Bei praktischen Versuchen mit verhältnismässig grossen Object- und Bildweiten spielen solche Entfernungen wie E von D, A von D, D von C und M u. s. w. kaum eine Rolle.

Um über die gegenseitige Lage dieser Punkte eine genauere Vorstellung zu erhalten, als es durch eine Zeichnung möglich ist, die ja manches in vergrössertem Maassstabe darstellen muss, sollen für ein

Beispiel, und zwar für das § 2 zuerst behandelte, einige dieser Dimensionen bestimmt werden.

Zunächst ist bekannt, dass bei parallelem Durchgange d, DD_1, EE_1, T durch den optischen Mittelpunkt proportional den Radien getheilt, im Falle einer gleichseitigen Linse also halbirt werden. Nach Formel 178 der Vorlesungen ist nun das Interstitium der Directionspunkte:

$$DD_1 = \varepsilon' = \frac{T \cdot \sin(e_2 - e_1)}{\sin \psi_0} = 0{,}26 \text{ cm},$$

also:

$$MD = D_1 N = \frac{0{,}72 - 0{,}26}{2} = 0{,}23 \text{ cm}.$$

Ferner ist nach Formel 175 die vordere Seitenpunktsdistanz:

$$AE = \frac{r_1 T \cos^2 e_2}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1} \cdot T} = 0{,}228 \text{ cm}$$

$$AD = \frac{r_1 \cdot T}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_0} = 0{,}247 \text{ cm}.$$

Demnach fallen die Directions- und Seitenpunkte fast zusammen, und zwar beträgt ihre Entfernung:

$$ED = E_1 D_1 = 0{,}019 \text{ cm}, \text{ d. h. kaum } 1/5 \text{ mm}.$$

Für die Bildgüte und Periskopie ergeben die oben aufgestellten Ausdrücke für unsere Linse mit den Constanten:

$$n = 1{,}528$$
$$d = 0{,}72 \text{ cm}$$
$$r_1 = 29{,}75 \text{ cm}$$
$$r_2 = -29{,}75 \text{ cm}$$

folgende Werthe.

Tabelle IV.

e_2	ψ_0	$\frac{1}{B}$	P
0°	0°	0	
5°	5° 2′ 25″	0,007553	1,0214
10°	10° 4′ 49″	0,03	1,0212
15°	15° 7′ 14″	0,06661	1,0217
20°	20° 9′ 40″	0,1163	1,0214
25°	25° 12′ 5″	0,1775	1,0213
30°	30° 14′ 35″	0,248	1,0214
35°	35° 17′ 4″	0,327	1,0203
40°	40° 19′ 33″	0,4108	1,0194

Für P muss sich ein constanter Werth ergeben, und das trifft überaus nahe zu. Für eine Linse mit anderen Constanten würde sich ein anderer Werth für P ergeben, sodass man auf diese Weise die periskopischen Eigenschaften verschiedener Linsen vergleichen kann.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass ich die Anregung zu der vorliegenden Arbeit Herrn Prof. Dr. Matthiessen verdanke, und ich möchte auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer hierfür, sowie für die im Verlaufe der Arbeit in liebenswürdigster Weise ertheilte Unterstützung meinen ehrerbietigsten und aufrichtigsten Dank aussprechen.

Die Bestimmung der Durchschnittstemperatur durch das Gewicht von verdampftem Wasser und die Messung des relativen Dampfdrucks[1]).

Von

W. Müller-Erzbach.

Eine mit eingeschliffenem Glasstöpsel verschliessbare und mit concentrirter Schwefelsäure theilweise gefüllte Glasflasche kann durch geringes Einfetten des Stöpsels gegen den in der äusseren Luft vorhandenen Wasserdampf so vollständig abgeschlossen werden, dass sie selbst bei grossem Durchmesser des Stöpsels und in einer mit Wasserdampf ganz gesättigten Atmosphäre im Laufe von 24 Stunden noch nicht ein Milligramm schwerer wird. Wenn daher Wasser in einer nur ähnlich verschlossenen Flasche verdunstet, so ist auf den Dampfdruck innerhalb derselben die atmosphärische Feuchtigkeit ganz ohne Einfluss, und man kann ihn auf einer constanten minimalen Höhe erhalten, wenn nur dafür gesorgt wird, dass die Oberfläche der absorbirenden Schwefelsäure hinreichend gross ist. Umgekehrt erkennt man deshalb aus dem Gewichtsverlust der in der Atmosphäre der Schwefelsäure befindlichen Wasserbehälter, ob die Absorption unverändert fortdauert oder nicht. Durch den erwähnten Verschluss der Glasflaschen war übrigens nur der Uebertritt der Feuchtigkeit gehindert, jede Veränderung im äusseren Luftdruck hatte sich bald auf das Innere der Flasche übertragen.

In solche Flaschen von meist ½ l Inhalt wurden nun einerseits offene Glasröhren gebracht, welche an der anderen Seite zur Aufnahme des Wassers kugelförmig aufgeblasen waren. Wenn man die Röhren in der Schwefelsäure ähnlich wie ein Aräometer schwimmen lassen will, so lässt man sie in geringer Entfernung von der erweiterten Oeffnung zu einer zweiten grösseren Kugel ausblasen[2]). Am bequemsten für die

1) Theilweise mitgetheilt in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin Nr. 5 S. 36—44 (1888).

2) Von A. Treffurth in Ilmenau wurden mir die Röhren nach meiner Angabe in guter Ausführung geliefert.

Ausführung der Versuche ist es, in der Mitte der Flasche eine kurze oben offene Röhre zu befestigen, welche einige Versuchsröhren aufnimmt und selbst keine Schwefelsäure enthält, so dass man jene Röhren ohne weiteres herausnehmen und auf die Wage setzen kann. Es genügen dann einfache Kugelröhren der ersten Art, und sie geben nach den vorliegenden Erfahrungen mindestens mit den anderen gleich gute Resultate. Die Weite der Versuchsröhren schwankte bei den nachstehenden Versuchen zwischen 5 und 7 mm, die Länge des engeren Theils zwischen 49 und 82 mm, die Röhren Nr. 1 bis 6 hatten eine zweite kugelförmige Erweiterung, die beiden letzten nur eine einzige an dem geschlossenen Ende. Alle waren an der Kugel mit einer Marke versehen, welche den Wasserstand bestimmte; ist die Kugel hinreichend weit, so ändert sich die Entfernung bis zur nächsten Erweiterung der Röhre oder der Oeffnung durch den einzelnen Versuch nur wenig und es braucht erst nach längerer Zeit frisches Wasser nachgefüllt zu werden.

Bei einer derartigen Anordnung der Versuche ergaben sich für die Verdampfung des Wassers nach Maassgabe der Temperatur so constante Werte, wie ich sie nach der Schwierigkeit anderer Diffusionsversuche nicht annähernd erwartete. Die Diffusionsconstante wurde nach Maxwell dem Quadrate der absoluten Temperatur proportional gesetzt, und so konnte zugleich der als für gleiche Temperaturen constant erkannte Gewichtsverlust des Wassers allgemein für alle Temperaturen berechnet werden. Nach der Formel

$$S_1 = \frac{S T^2 P_1}{T_1^2 P}$$

findet man demnach aus dem Wasserverlust P und P_1 wie den Quadraten der absoluten Temperatur für die Temperatur T_1 die Spannung S_1, wenn sie für T durch S ausgedrückt wird. Aus der Spannung ergibt sich dann die durchschnittliche Temperatur während der Dauer des Versuchs. Sie ist nach diesem Verfahren durch die in der ganzen Zeit geleistete Arbeit der Wärme bestimmt und erfährt nur nach dem Durchschnitt des Barometerstandes noch eine geringe Correctur.

Hat man für irgend eine Durchschnittstemperatur bei einer bestimmten Kugelröhre den Wasserverlust festgestellt, so kann man mittels der Formel

$$P_1 = \frac{S_1 P T_1^2}{S T^2}$$

leicht für jede andere Temperatur den entsprechenden Verlust berechnen. Die auf solche Weise gefundenen Resultate lassen sich auf Versuchsröhren von anderen Dimensionen durch einfache Proportionalität übertragen, und es sind deshalb nachstehend nur die für die

später beschriebene Versuchsröhre Nr. 8 in je 24 Stunden geltenden Wasserverluste angegeben.

0°	3,42 mg	14°	9,79 mg	28°	25,40 mg	42°	60,38 mg
1°	3,70 „	15°	10,52 „	29°	27,10 „	43°	64,06 „
2°	4,00 „	16°	11,29 „	30°	28,90 „	44°	67,94 „
3°	4,33 „	17°	12,12 „	31°	30,82 „	45°	72,02 „
4°	4,68 „	18°	12,97 „	32°	32,86 „	46°	76,28 „
5°	5,05 „	19°	13,92 „	33°	34,93 „	47°	80,78 „
6°	5,44 „	20°	14,89 „	34°	37,21 „	48°	85,49 „
7°	5,85 „	21°	15,95 „	35°	39,60 „	49°	90,49 „
8°	6,30 „	22°	17,07 „	36°	42,10 „	50°	95,74 „
9°	6,80 „	23°	18,27 „	37°	44,75 „	51°	101,19 „
10°	7,33 „	24°	19,53 „	38°	37,56 „	52°	106,93 „
11°	7,88 „	25°	20,86 „	39°	50,55 „	53°	113,08 „
12°	8,47 „	26°	22,32 „	40°	53,72 „	54°	119,39 „
13°	9,10 „	27°	23,81 „	41°	56,99 „	55°	126,15 „

Um die aus der Verdampfung abgeleiteten mit den durch das Thermometer gemessenen Temperaturen zu vergleichen, bediente ich mich für höhere Temperaturen meist eines verschliessbaren Kastens von 120 cm Länge, 70 cm Breite und 70 cm Höhe, welcher an beiden Seiten durch eiserne mit Gasbrennern versehene Röhren erwärmt werden konnte. In der Mitte des Raumes stand ein weiter Blecheimer, der mit trockenem Sande gefüllt wurde und die zu den Versuchen dienenden Glasflaschen aufnahm, so dass sie vom Sande ganz bedeckt wurden. Die Flaschen waren von drei Thermometern umgeben, deren Angaben wieder bei jeder Wägung der Glasröhren eine Messung der Temperatur von der in der Flasche befindlichen Schwefelsäure controlirte. In einzelnen Fällen, die an den grösseren Temperaturschwankungen kenntlich sind, wurde die Versuchsflasche frei in den erwärmten Kasten gebracht und die Temperatur an einem in der Schwefelsäure liegenden Thermometer abgelesen. Dieses Ablesen geschah bei allen Versuchen im erwärmten Raume mindestens sechsmal an einem Tage, nachdem vorher die Wendepunkte für die Zunahme oder Abnahme der Wärme festgestellt waren. Aus der Zwischenzeit zwischen den einzelnen Beobachtungen ergaben sich dann die mittleren Werthe.

Für die Versuche bei gewöhnlicher Temperatur brachte ich die Versuchsflaschen in ein abgeschlossenes ungeheiztes Zimmer von möglichst gleichmässiger Temperatur und maass die letztere durch ein vorher geprüftes Sixthermometer, dessen Maximum und Minimum in den meisten Fällen an einem Tage nicht über 0,7 °, oft nicht 0,4 ° voneinander abwichen. Als Durchschnittstemperatur nahm ich dann ein-

fach das Mittel der täglichen Maxima und Minima, und ich habe zur besseren Beurtheilung der Zuverlässigkeit der ermittelten Durchschnittstemperatur bei jedem Versuche die grössten dabei überhaupt beobachteten Unterschiede in den täglichen Angaben der Thermometer hinzugefügt. Es liegt wohl am nächsten, den Normalverlust der Glasröhren durch Beobachtungen bei 0° festzustellen, aber da es mir dazu an einer geeigneten Vorrichtung fehlte, so habe ich solche Versuche bei gewöhnlicher Luftwärme dazu benutzt, bei welchen die Temperaturschwankungen am geringsten waren. Dieselben sind in der nachstehenden Tabelle für jede Kugelröhre zuerst angegeben.

Bezeichnung der Glasröhren	Durchschnittstemperatur	Grösste Abweichung der Temperatur	Wasserverlust in 24 Stunden	Versuchsdauer	Ohne Rücksicht auf den Druck berechnete Spannung	Nach dem Barometerstande b corrigirte Spannung β		Der Spannung β entsprechende Temperatur
Nr.	Grad	Grad	mg	Tage	mm			Grad
1	11,2	0,8	4,54	7		$b = 761,0$		
1	4,9	0,7	2,77	6	6,45	$b = 758,8$	$\beta = 6,43$	4,8
1	36,2	1,8	23,8	1	43,7	$b = 765,2$	$\beta = 44,0$	35,9
1	45,7	2,6	44,5	1	71,9	$b = 763,1$	$\beta = 72,4$	45,3
1	9,87	0,7	4,14	5	9,08	$b = 774,7$	$\beta = 9,25$	10,1
1	11,8	0,7	4,62	6	10,1	$b = 759,2$	$\beta = 10,1$	11,5
2	11,2	0,8	4,54	7		$b = 761,0$		
2	4,9	0,7	2,80	6	6,5	$b = 758,8$	$\beta = 6,48$	4,9
2	45,7	2,6	41,1	1	71,2	$b = 763,1$	$\beta = 71,4$	45,0
2	36,3	2,0	23,8	1	43,75	$b = 766,7$	$\beta = 44,2$	36,0
2	27,7	0,8	14,2	1	27,6	$b = 776,0$	$\beta = 28,1$	28,0
2	26,7	1,5	13,05	2	25,4	$b = 777,2$	$\beta = 25,9$	26,6
2	9,87	0,7	4,06	5	8,9	$b = 774,7$	$\beta = 9,08$	9,9
3	11,2	0,8	4,8	7		$b = 761,0$		
3	4,9	0,7	2,92	6	6,3	$b = 758,8$		4,5
3	45,7	2,6	44,5	1	72,8	$b = 763,1$	$\beta = 72,6$	45,3
3	36,3	2,0	24,3	1	42,4	$b = 766,7$	$\beta = 42,7$	35,4
3	9,87	0,7	4,28	5	8,9	$b = 774,7$	$\beta = 9,06$	9,8
3	11,8	0,7	5,07	6	10,4	$b = 759,2$		11,9
3	9,8	2,5	4,56	4	9,3	$b = 757$	$\beta = 9,3$	10,2
4	11,2		4,0	7		$b = 761,0$		
4	4,9	0,7	2,52	6	6,47	$b = 758,8$		4,9
4	36,2	1,8	21,2	1	44,3	$b = 765,2$	$\beta = 44,7$	36,2
4	36,3	2,0	20,5	1	42,8	$b = 766,7$	$\beta = 43,2$	35,6

Bezeichnung der Glasröhren	Durchschnittstemperatur	Grösste Abweichung der Temperatur	Wasserverlust in 24 Stunden	Versuchsdauer	Ohne Rücksicht auf den Druck berechnete Spannung	Nach dem Barometerstande b corrigirte Spannung β		Der Spannung β entsprechende Temperatur
Nr.	Grad	Grad	mg	Tage	mm			Grad
5	11,2		4,79	7		$b = 761,0$		
5	4,9	0,7	3,02	6	6,5	$b = 758,8$		4,9
5	36,3	2,0	24,8	1	43,2	$b = 766,7$	$\beta = 43,7$	35,8
5	27,3	1,6	14,3	1	26,5	$b = 775,6$	$\beta = 27,1$	27,4
5	55,2	4,5	71,5	1	111,0	$b = 779$	$\beta = 113,6$	54,3
5	51,8	5,5	60,0	1	94,8	$b = 775$	$\beta = 96,5$	51,0
5	52,1	3,8	61,8	1	97,3	$b = 770,5$	$\beta = 98,3$	51,3
6	11,2		5,07	7		$b = 761,0$		
6	4,9	0,7	3,22	6	6,53	$b = 758,8$		5,0
6	36,2	1,8	26,3	1	44,1	$b = 765,2$	$\beta = 44,5$	36,1
7	11,2		9,6	7				
7	16,0	1,4	13,5	4	13,4	$b = 760,2$	$\beta = 13,4$	15,9
7	11,8	0,7	9,92	6	10,13	$b = 759,2$	$\beta = 10,16$	11,6
7	9,87	0,7	8,6	5	8,96	$b = 774,7$	$\beta = 9,14$	10,0
7	9,82	2,5	8,82	4	9,17	$b = 757$	$\beta = 9,12$	9,9
8	11,2	0,8	8,0	7				
8	4,9	0,7	5,05	6	6,45	$b = 758,8$	$\beta = 6,43$	4,8
8	45,7	2,6	75,0	1	73,0	$b = 753,1$	$\beta = 73,2$	45,6
8	36,2	1,8	41,8	1	43,6	$b = 765,2$	$\beta = 43,8$	35,8
8	36,3	2,0	42,0	1	44,6	$b = 766,7$	$\beta = 45,0$	36,4
8	27,7	0,8	24,8	1	27,4	$b = 776,0$	$\beta = 27,9$	27,9
8	15,7	2,4	10,7	6	12,9	$b = 761,2$		15,3
8	16,2	2,2	11,2	7	13,4	$b = 765,5$	$\beta = 13,5$	16,0
8	26,7	1,5	23,1	2	25,6	$b = 777,2$	$\beta = 26,1$	26,8
8	10,3		7,4	3	9,2	$b = 777,0$	$\beta = 9,38$	10,4
8	9,87	0,7	7,1	5	8,8	$b = 774,7$	$\beta = 8,96$	9,7
8	11,8	0,7	8,2	6	10,15	$b = 759,2$		11,5
8	11,8	1,2	8,3	3	10,35	$b = 753,0$	$\beta = 10,25$	11,7
8	9,8	2,5	7,32	4	9,15	$b = 757$	$\beta = 9,1$	9,9

Die Versuche von den grössten Temperaturschwankungen, also zugleich der grössten Unsicherheit für die gefundene Durchschnittstemperatur, zeigen die bedeutendsten Abweichungen, zwischen der nach der Verdampfung berechneten und der mit dem Thermometer gemessenen Temperatur. Sie steigt für einige Versuche (über oder nahe an 50 °)

bis 0,9 °, und zwar sind bei dieser Temperatur die von mir überhaupt erhaltenen Werthe meist geringer, so dass es scheint, als ob bei höherer Temperatur die Absorption des Wasserdampfs durch die Schwefelsäure nicht mehr schnell oder vollständig genug erfolgt.

Für die gewöhnliche Lufttemperatur kommt nur bei der Glasröhre Nr. 3, mit welcher überhaupt die grössten Unterschiede gefunden wurden, zweimal eine Abweichung bis 0,4 ° vor, während in vielen Fällen die Abweichungen geringer sind, als sie beispielsweise im Sommer zwischen dem Mittel aus wiederholten Ablesungen und dem des Sixthermometers in einem ungeheizten Zimmer sich ergeben. Die Correctur nach dem Barometerstande betrug bis 0,4 °, und man erhält deshalb schon ohne dieselbe für viele Zwecke genügende Resultate, die bei Beobachtungen über eine längere Reihe von Tagen durch den gewöhnlichen Wechsel im Luftdruck noch genauer werden. Das unregelmässige Steigen und Fallen der Temperatur in kürzeren Zwischenzeiten bleibt bei der gewöhnlichen Messung unbeachtet, bei der Verdunstung dagegen kommt es zur vollen Geltung. Daher müssen sich geringe Unterschiede in der durchschnittlichen Temperatur des Erdbodens in verschiedener Tiefe oder des Waldes und des freien Feldes durch gleichzeitige Beobachtung der Verdampfungsmenge mit der grössten Sicherheit erkennen lassen. In welchem Grade die Temperaturmessungen durch Verdampfung mit den Angaben des Registrirthermometers übereinstimmen, habe ich bisher nicht festgestellt, doch können nach den mitgetheilten und anderen von mir ausgeführten Versuchen die Abweichungen nicht bedeutend sein, und ich kann nach meinen Erfahrungen deshalb meine Messungsmethode für meteorologische Zwecke überall da unbedingt empfehlen, wo es sich um Vorgänge mit geringeren Temperatur-Schwankungen handelt. Für weiter abstehende Temperaturgrenzen lässt sich natürlich die mittlere Temperatur ohne weiteres nicht ableiten, weil die Verdunstung zu der Temperatur nicht in linearer Abhängigkeit steht. Sind jedoch jene Grenzen annähernd bekannt, so lässt sich mit Hilfe eines Abzugsgliedes der wirkliche Mittelwerth ebenfalls bestimmen.

Mit leichter verdunstenden Flüssigkeiten, wie mit Aether, lässt sich wahrscheinlich eine ungleich grössere Empfindlichkeit für Temperaturunterschiede erreichen, aber die grössere Menge der verdampfenden Flüssigkeit ändert die Entfernung ihrer Oberfläche von der Oeffnung der Röhre weit schneller, und schon deshalb wird es fraglich, ob auf diese Weise eine hinreichende Genauigkeit für die Durchschnittstemperatur während längerer Zeit zu erreichen ist. Eingehendere Versuche habe ich darüber bisher nicht angestellt. Auch durch Verkürzung der Diffusionsröhre ist bei der Wasserverdunstung die Empfindlichkeit des Apparats zu vergrössern, doch darf wieder die Entfernung des Wasser-

spiegels von der Oeffnung nicht zu klein sein, weil sonst ihre Veränderlichkeit leicht die Sicherheit der Messung schädigt.

Wie bereits bemerkt, wichen die zu den beschriebenen Versuchen benutzten Kugelröhren sowohl im Durchmesser als namentlich in der Länge bedeutend voneinander ab, da sie jedoch übereinstimmende Temperaturen ergaben, so kann ich mich darauf beschränken, über eine derselben genauere Angaben zu machen. Die Glasröhre Nr. 8 mit einer Kugel hatte einen innern Durchmesser von 6½ mm, in der Kugel von 18 mm, die Länge des engeren Theils der Röhre betrug 82 mm und die Entfernung der Wasserstandsmarke in der Kugel von der Oeffnung der Röhre 91 mm. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, verliert diese Kugelröhre bei 11,2° und einem Barometerstande von 761 mm in 24 Stunden 8 mg an trockene Luft. Auch die Röhre Nr. 7 war, wie schon erwähnt wurde, eine einfache Kugelröhre, sie stimmt in ihren Resultaten besonders gut mit Nr. 8 überein, und die aus beiden in verschiedenen Flaschen aber unter übrigens gleichen Umständen verdunstenden Wassermengen hielten sich in allen Versuchen innerhalb der Grenzen von 1 zu 1,211 und zu 1,205. Da man geringe Aenderungen im Querschnitt der Röhren schwer erkennt, so ist es unerlässlich, für alle zu genauen Versuchen bestimmten Röhren durch etwa achttägige Beobachtung unter gleichzeitiger Wärmemessung oder mit Hilfe einer schon justirten Röhre die Menge des in 24 Stunden verdunstenden Wassers direct zu bestimmen.

Die Verdunstung erfolgt im allgemeinen nach den von Herrn Stefan [1]) angegebenen Regeln, doch finde ich die Verdampfungsgeschwindigkeit nach der oben angeführten Formel bei einfacher Proportionalität von Spannungen und Gewichten unter Beachtung der Veränderlichkeit der Diffusionsconstante in gleicher oder sogar besserer Uebereinstimmung mit der unmittelbaren Temperaturmessung, als wenn ich sie nach Herrn Stefan dem Logarithmus eines Bruches proportional annehme, dessen Zähler der Luftdruck und dessen Nenner der um die Dampfspannung verminderte Luftdruck ist. Für den dritten Versuch mit Nr. 8, von der am Thermometer beobachteten Temperatur 45,7° findet man beispielsweise nach Stefan's Formel eine Spannung von 89,1 mm, die nach der Veränderlichkeit der Diffusionsconstante sich auf 70,2 mm berechnet, und man würde demnach die nicht unerheblich stärker abweichende Temperatur von 44,7° erhalten.

Im Anschluss an Stefan's Formel findet man die Dampfmenge d_1 des nicht gebundenen Wassers aus der Gleichung $d_1 = \frac{c}{l} \log \frac{p}{p - p_1}$,

1) Wiener Ber. (2) Bd. 68 S. 385.

wenn c die Diffusionsconstante, l die Länge der offenen Röhre, p den Luftdruck und p_1 den Dampfdruck bedeutet. Annähernd ergibt sich also

$$\frac{d_1 l}{c} = \frac{2 p_1}{2 p - p_1} M$$

und unter gleichen Versuchsbedingungen für gebundenes Wasser

$$\frac{d_2 l}{c} = \frac{2 p_2}{2 p - p_2} M$$

oder

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

da

$$\frac{2 p - p_2}{2 p - p_1}$$

für nicht zu hohe Versuchstemperaturen der Einheit nahezu gleichkommt. Unter der Voraussetzung einfacher Abhängigkeit der Diffusion von dem Dampfdruck und dem Quadrate der absoluten Temperatur erhält man die Gleichung

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

noch unmittelbarer.

Für vergleichende Diffusionsversuche folgt entsprechend aus den mitgetheilten Beobachtungen, dass der Dampfdruck mit hinreichender Genauigkeit durch die Diffusion zu messen ist, weil sich die letztere nicht nur der Diffusionsconstanten, sondern auch der Spannung genau proportional erweist. Dieselbe oder annähernd dieselbe Uebereinstimmung mit dem statisch gemessenen Dampfdruck zeigte sich bei den wässerigen Lösungen von Salzen und Säuren, und es ist demnach in diesen Fällen die nach meiner Methode unter dem Gegendruck Null gemessene, während der ganzen Verdunstung unveränderliche Spannung dem die Verdampfung oder Zerlegung aufhebenden Enddruck der statischen Methode proportional, so dass die relativen Spannungen nach beiden Methoden gleich ausfallen. Ob das für feste wasserhaltige Salze ebenfalls zutrifft, bleibt zunächst fraglich und scheint fast nach den bisherigen allerdings voneinander vielfach abweichenden Ergebnissen der barometrischen Messung verneint werden zu müssen. Namentlich zeigen Salze von schwacher Verdunstung bedeutende Abweichungen, während die leichter zersetzbaren nach beiden Methoden ganz oder nahezu übereinstimmende Resultate ergeben, und ich habe die wahrscheinliche Ursache für die Abweichung an

anderer Stelle [1]) näher dargelegt. Jedenfalls ergaben alle von mir oder von anderen Beobachtern nach meiner Methode ausgeführten Versuche constante Werthe, sie bleiben während der ganzen Zersetzung unverändert und geben deshalb für die Grösse des Dissociationsdrucks einen sicheren Maassstab ab. Sollte dagegen bei festen Salzen der die Zerlegung aufhebende Dampfdruck wegen des zugleich chemischen Einflusses nicht im linearen Verhältnisse der Dampfmengen wirksam sein, so würden die aus der statischen Messung hervorgehenden Resultate jenes Gesammtdrucks als unmittelbares Maass für die Dissociation nicht benutzt werden können. In ähnlicher Weise steht ja auch die Absorption in vielen Fällen nicht in einfacher Abhängigkeit zu dem Partialdruck der Gase oder Dämpfe.

Um festzustellen, ob auch der Raum über den Salzen, aus welchem der Wasserdampf abzieht, bei der gewöhnlichen Versuchsanordnung mit der der Spannkraft entsprechenden Menge desselben gesättigt ist, nahm ich ihn von ganz verschiedener im Verhältnisse von 1:300 wechselnder Ausdehnung, indem ich zuletzt die Salze in Flaschen bis zu 100 ccm Inhalt mit einem Verschluss von 3 bis 5 mm weiten und 70 bis 85 mm langen Röhren verdampfen liess, aber trotz aller dieser Abweichungen blieben die Ergebnisse stets die früheren, so dass die gefundenen Spannungen unzweifelhaft als constante Grössen angesehen werden mussten. Wenn man die Veränderlichkeit mancher Salze durch theilweises Verdunsten ihres Krystallwassers oder auch durch längeres Liegen an der Luft allein nicht beachtet, so kann man nach allen Methoden recht ungleiche Resultate für den Dampfdruck erhalten; dasselbe Salz nach meinem Verfahren untersucht ergab stets in verschiedenen Fällen nur ganz geringe Abweichungen, wie sie in fast derselben Grösse auch in den am besten übereinstimmenden barometrischen Messungen vorkommen und auf mechanisch in die Krystalle eingeschlossenes Wasser zurückgeführt werden können.

Den aus meinen Messungen abgeleiteten Dampfdruck gelang es noch durch einige mit Chromalaun, Zinkvitriol und Kupfervitriol angestellte Versuche in der Atmosphäre dieser Salze direct nachzuweisen. Kupfervitriol hat beispielsweise nach meinen Angaben [2]) zwischen 43° und 50° die relative Spannung von 0,22 bis 0,24, wie sie das um 26° kältere Wasser besitzt. Ich brachte nun etwas grössere Mengen der gepulverten Salze in kleine Flaschen von 30 ccm und von 60 ccm Inhalt, schloss die Flaschen durch

1) N. A. Zeitschr. f. phys. Chemie Bd. 2 S. 113.
2) Wied. Ann. Bd. 32 S. 314 (1887).

mittels eines Gummirings eingesetzte offene Glasröhren von 3 bis 4 mm Durchmesser, so dass diese Röhren etwa 1 cm vom Boden der Flaschen abstanden und brachte letztere dann in grössere Flaschen, welche concentrirte Schwefelsäure und in derselben zur Temperaturangabe kleine Thermometer enthielten. Die beiden Flaschen von 30 und 60 ccm Inhalt verhielten sich ganz gleich, nach längerem Erhitzen bis 41 ° liessen sie nach dem Abkühlen auf 17 ° noch nicht die Spur eines Beschlags von Wasser erkennen, während derselbe nach dem Abkühlen von 44 ° und darüber auf 17 ° deutlich wahrgenommen werden konnte. Der relative Dampfdruck jener Atmosphäre beträgt demnach bei 44 ° mehr als 0,21 und bei 42 ° nicht über 0,25. Für Chromalaun und Zinkvitriol wurde die gleiche Uebereinstimmung zwischen dem von mir beobachteten Dampfdruck und der Temperatur des Thaupunktes nachgewiesen, ein neuer Beweis dafür, dass die durch das angewandte Verfahren ermittelten Constanten den wahren Werth der Dissociationsspannung ausdrücken. Diese Annahme wird ausserdem durch das Verhalten der Salze zu verdünnter Schwefelsäure bestätigt. Letztere ergibt nach den auf verschiedene Art ausgeführten Messungen ziemlich übereinstimmende Dampfspannungen, und es zeigte sich, dass mehrere von mir untersuchte Salze: phosphorsaures Natron, Bleizucker und unterschwefligsaures Natron, welche neben Schwefelsäure in dasselbe Gefäss eingeschlossen waren, stets ziemlich nahe an der Grenze aufhörten, Wasser an die Schwefelsäure abzugeben, an welcher ihr durch meine Versuche bestimmter Dampfdruck demjenigen der Schwefelsäure gleichkam.

Von der erwähnten und durch die Natur der Salze selbst bedingten Verschiedenheit abgesehen, hängt die Genauigkeit der durch die Verdampfung zu erzielenden Resultate wesentlich von dem Grade der Trockenheit ab, in welcher sich die Luft über der concentrirten Schwefelsäure befindet, da ein geringer Rückstand an Wasserdampf in derselben die Zahl für die relative Spannung natürlich bedeutend verkleinert. Durch das Oeffnen der Flasche wird zwar jedesmal äussere Feuchtigkeit zugeführt, aber nach allen bisherigen Beobachtungen ist dieselbe bald entfernt, denn die Versuche von sechstägiger Dauer ergaben gegen die eintägigen keine beträchtliche Abweichung.

Durch Diffusion in strömende trockene Luft hat G. Tammann [1]) ebenfalls den Dampfdruck zu messen versucht und für gesättigte Salzlösungen mit den barometrischen und mit meinen früheren Messungen übereinstimmende Resultate gefunden, für die meisten wasserhaltigen Salze aber vielfach voneinander abweichende und von der Geschwindigkeit des Luftstroms abhängige Resultate. Bei den Lösungen erfolgte

1) Wied. Ann. Bd. 33 S. 322.

demnach die der Spannung entsprechende Sättigung der vorbeiströmenden Luft bei allen angewandten Geschwindigkeiten, während es bei den festen Verbindungen nur ausnahmsweise der Fall war. Das hier angewandte Verfahren kommt der barometrischen Messung nahe und zwar um so vollständiger, je langsamer der Luftstrom fliesst. Dem entsprechend zeigt sich auch mit abnehmender Luftgeschwindigkeit eine zunehmende Uebereinstimmung in den beiderseitigen Resultaten. Wäre die Dauer der abschliessenden Versuche eine grössere gewesen, so wären die Resultate bei allen Salzen wahrscheinlich ebenso constant geworden als es so schon bei einzelnen der Fall ist. Bei langsamer Luftströmung fand Tammann durchschnittlich höhere und theilweise viel höhere Spannungen als sie von Frohwein[1]) nach der statischen Methode beobachtet sind. Sollte diese Erscheinung eine allgemeine Bedeutung haben, so dürfte sie mit der Beobachtung Regnaults[2]), dass die nach Quecksilberdruck gemessene Spannung der Dämpfe im gaserfüllten Raume eine geringere ist, im Zusammenhang stehen, auf die in der angegebenen Weise durch längere Berührung mit feuchter Luft veranlasste Bildung einer Lösungshaut sie zurückzuführen erscheint mir schon deshalb unstatthaft, weil bei allen Bestimmungen auf statischem Wege die Berührung mit noch feuchterer Luft und auf ungleich längere Zeit regelmässig stattfinden muss.

1) Zeitschr. f. phys. Chemie Bd. 1 S. 12.
2) Ann. chem.-phys. (3) Bd. 15 S. 13.

Ueber eine merkwürdige Aufreissung des Kupfers durch den elektrischen Strom.

Von

Dr. **B. Nebel.**

Bald nach Gründung der Elektrotechnischen Fabrik Cannstatt in Cannstatt (jetzt Elektrotechnische Abtheilung der Maschinenfabrik Esslingen) beschäftigte sich dieselbe unter anderem auch mit der Anfertigung von Glühlampen. Bei diesen Lampen, welche den Namen des Erfinders Bernstein führen, besteht der Kohlenbügel aus einem verkohlten, gewobenen Seidenschläuchchen. — Während bei der eigentlichen Fabrikation dieser Lampen im Grossen der Kohlenbügel an Aluminium-, resp. Platindrähte befestigt war, wurde derselbe bei den Erstlingslampen mittels schmalen Kupferblechstreifen, welche spiralförmig aufgewickelt waren und deshalb federnd wirkten, an ziemlich dicke Kupferdrähte gesteckt. Des sicheren Contactes wegen wurde an diesen Verbindungsstellen Kohle in so reichlichem Maasse niedergeschlagen, dass der grösste Durchmesser einer derartigen Verbindungsstelle 4 — 5 mm betrug.

Zur Versteifung des Ganzen wurden die im Hals der Lampe nahezu parallellaufenden Kupferdrähte oben und unten theils in blaues, theils in weisses Emailglas gebettet. — Wie sich bald herausstellte, eignet sich das Kupfer aus mehreren Gründen nicht zur Glühlampenfabrikation; unter anderem zeigte die Oxydschicht ein aufgerissenes Aussehen, weshalb ich mir zwei solcher Lampen zur weiteren Untersuchung erworben habe. Beide Lampen wurden parallel geschaltet und über das gewöhnliche Maass (50 Volt und 1,2 Ampère) angestrengt. Auf diese Weise brannten die Lampen mit zeitweise grösseren Unterbrechungen ungefähr ein halbes Jahr lang mehrere Stunden pro Tag, bis der Kohlenbügel der einen direct oberhalb der einen Verbindungsstelle mit dem Kupferdraht durchgebrannt ist. Die andere Lampe brannte nun allein weiter, jedoch weniger angestrengt als zuvor. Indessen dauerte dieses Alleinbrennen nur noch kurze Zeit, weil ich befürchtete, die Lampe möchte bald durchbrennen, da an einzelnen Stellen des grau aussehenden Kohlenbügels schwarze Flecken bemerkbar waren. Dazu kommt, dass

die Elektrotechnische Fabrik Cannstatt inzwischen total abgebrannt ist, so dass weitere Lampen dieser Gattung nicht mehr existirten, und die Fabrik jetzt die Glühlampenfabrikation ganz aufgegeben hat.

Die Kupferdrähte wurden nur zwischen der oberen Emailglasstelle und den Verbindungen mit dem Kohlenbügel in merkwürdiger Weise aufgerissen, und zwar bei beiden Lampen an jedem der Drähte, jedoch in verschieden starkem Maass.

Bei der durchgebrannten Lampe hat die Aufreissung bei dem einen Drahte gerade begonnen, es zeigten sich einige äusserst feine Kupferfädchen lose durcheinander, welche indessen bis auf kleine Reste infolge von Erschütterungen abgefallen sind, während der andere Draht einen starken Büschel solcher Kupferfäden noch besitzt. Diese Fäden zeigen nur an wenigen Stellen die Kupferfarbe, sonst haben sie, wie die oberen Theile der Kupferdrähte ein schwarzes Aussehen, indem sich auf ihnen während des Brennens Kohle von den Verbindungsstellen niedergeschlagen hat, was aus der zerrissenen Oberfläche dieser letzteren geschlossen wird, auch bei der Glasbirne ist eine schwache Bräunung bemerkbar. Diese kann indessen ebensogut von dem Kohlenbügel herrühren, wie dies auch bei anderen Glühlampen der Fall ist. Die Kupferdrähte zwischen den beiden Emailstellen sind glatt und haben eine glänzende Oberfläche von graphitähnlicher Farbe.

In der zweiten noch unversehrten Lampe ist die Aufreissung des Kupfers in sehr vollkommener Weise ausgebildet; zunächst wurde die Oxydschicht, wie die Borke eines Baumes, durch die sich hervordrängenden Kupferfädchen in einzelne Stückchen gesprengt und zur Seite gehoben, die Fädchen selbst sind regellos durcheinander gemischt, wie ein verwirrter Coconfaden. Diese sowie die aufgerissenen Kupferdrähte haben überall die reine Kupferfarbe, während die Drähte zwischen den beiden Emailstellen in diesem Falle unverändert sind, d. h. die gewöhnliche Oxydschicht haben. Die Birne ist etwas stärker gebräunt, jedoch völlig durchsichtig, der Hals derselben lässt indessen keinerlei Trübung wahrnehmen.

Auffallenderweise ist bei beiden Glühlampen zwischen den Emailstellen auch nicht die geringste Aufreissung an den Drähten zu bemerken.

Um ein Bild dieser Erscheinung geben zu können, photographirte ich die beiden Lampen direct, indessen waren die charakteristischen Stellen zu klein, um einen richtigen Eindruck hervorzurufen. Daher entwarf ich zunächst mittels einer elektrischen Bogenlampe ein Bild der unversehrten Glühlampe und photographirte dieses. Die Vergrösserung ist eine 4,53fache.

Leider konnte ich mit der vorhandenen Linse nicht beide Stellen gleichzeitig scharf erhalten, stets liess wenigstens eine derselben an

Schärfe zu wünschen übrig, was durch die farbigen Ränder bedingt war. Schliesslich gelang es doch, beide Stellen auf das Bild zu bringen, wovon die eine einigermaassen scharf ist, während die andere doch noch erkennen lässt, in welchem Maass bei ihr die Aufreissung stattgefunden hat.

Ob nun der elektrische Strom theilweise von der einen aufgerissenen Stelle durch die Kupferfädchen zu der anderen gegangen ist, was eine Anziehung oder Abstossung dieses äusserst feinen und deshalb leicht beweglichen Kupfergespinnstes zur Folge gehabt hätte, lässt sich nicht

entscheiden, obgleich die Hauptmengen dieser Kupferfädchen von den einander abgelegenen Seiten der Kupferdrähte ausgehen, da andrerseits bei der durchgebrannten Lampe der Beginn der Fadenentwicklung auf der Innenseite des einen Drahtes stattfindet.

Soviel ich aus der mir zugänglichen Literatur ersehen konnte, ist eine derartige Aufreissung eines Metalles durch den elektrischen Strom bisher noch nicht beobachtet worden, nicht einmal bei den Wirkungen

des Blitzes. Um Näheres über diese auffallende Erscheinung geben zu können, namentlich unter welchen Umständen dieselbe auftritt, bedarf es noch weiterer, etwas abgeänderter Untersuchungen, auf die ich später zurückzukommen hoffe.

Stuttgart, Techn. Hochschule, Juni 1888.

Nachtrag.

Bei dem Suchen in der Literatur über einen anderen Gegenstand fand ich zufällig, dass Hittorff in seiner Arbeit: „Ueber das elektrische Leitungsvermögen des Schwefelsilbers und Halbschwefelkupfers[1])“ auf Seite 10 unten sagt: „Ein sehr auffallendes Verhalten zeigt das schlechtleitende Schwefelkupfer in der Glühhitze. Als ich nämlich zur Controle einen Cylinder desselben in wohlgetrocknetem, reinem Kohlensäuregas über der Lampe glühte, wuchsen auf seiner Oberfläche aus einer Menge von Punkten höchst zierliche Kupferhaare hervor. Sie werden nicht selten 3—4‴ lang, krümmen und gruppiren sich zu Locken; es entstehen die sonderbaren Bildungen, welche auch im Mineralreiche vorkommen und so sehr an die Producte der organischen Natur erinnern.“ Auf Seite 14 fährt er fort: „Das Halbschwefelkupfer leitet den galvanischen Strom als Elektrolyt; es wird von demselben so zerlegt, dass Kupfer am negativen, Schwefel am positiven Ende des Cylinders sich ausscheidet ... Das Kupfer tritt wieder meist in drahtförmigen Gestalten auf; es drängen sich aus dem Innern Büschel von Haaren hervor, die stärker, wie die eben durch freiwillige Zersetzung erhaltenen, sind ... Die Ausscheidung beginnt am äussersten negativen Ende und rückt dem positiven zu.“ Seite 15 unten sagt er, dass er das ganz reine Halbschwefelkupfer nur für einen elektrischen Leiter halte, was sich strenge beweisen liesse, wenn man die Bildung des Kupfers bei der Elektrolyse verhindern könnte. Später wird auch erwähnt, dass das Schwefelsilber nach längerem Durchleiten des elektrischen Stromes einzelne Silberhaare in der Nähe des magnetischen Poles gezeigt habe.

Auf Grund dieser Arbeit drängen sich die Fragen auf:

Ist diese Haarbildung von Kupfer und Silber nur durch Wärme oder durch den elektrischen Strom erzeugt?

Tritt diese Haarbildung nur bei den Schwefelmetallen auf?

Enthalten die als rein ausgegebenen Metalle noch Schwefel?

1) Hittorf, Pogg. Ann. Bd. 84 S. 1 (1851).

Was die letztere Frage betrifft, so bestreitet Karsten in seinem System der Metallurgie (1832 Bd. 5 S. 243) das Vorkommen von Schwefel im „hammergaaren Kupfer", indessen hat Hampe in einer sehr eingehenden, neueren Arbeit: Beiträge zur Metallurgie des Kupfers [1]) den Schwefelgehalt des Kupfers aus den verschiedensten Sorten bestimmt, wobei dieser zwischen 0,0011 und 0,0036 % schwankt. Er sagt, die Entscheidung dieser Frage biete ganz besonderes Interesse wegen des Zusammenhanges, in dem der Schwefelgehalt des Kupfers zu den Erscheinungen des Sprühens (Bergwerkfreund Bd. 14, 1851 S. 701) und Steigens (Stetefeld, Wagner's Jahresbericht 9 S. 161) steht. Ob diese beiden bergmännischen Ausdrücke in Beziehung mit der hier besprochenen Erscheinung gebracht werden können, liess sich nicht ermitteln, weil diese Zeitschriften hier nicht gehalten werden.

Auf Grund der Hampe'schen Arbeit darf wohl geschlossen werden, dass auch in den von mir erwähnten Kupferdrähten Schwefel enthalten ist. Ob nun die Gegenwart von Schwefel das Bedingende für die Haarbildung ist, lässt sich bis jetzt definitiv nicht entscheiden, wohl ist es aber anzunehmen; denn diese Haarbildung ist, mit Ausnahme meines Falles, wie ich weiter in der mir zugänglichen Literatur nachforschte, nie an hammergaarem Metall beobachtet worden, sondern nur an den Schwefelmetallen oder an den Rohkupfererzen, im Englischen regulus genannt, welche ca. 66 % Kupfer enthalten. Diese fadenförmigen Auswüchse bezeichneten die Engländer mit dem Namen Moos und sprechen deshalb je nach dem Metall von Moosgold, Moossilber oder Mooskupfer; sie entstehen aus dem betreffenden Schwefelmetall durch Reduction in einem Wasserstoffstrom bei höherer Temperatur.

Schon Percy erwähnt in seiner Metallurgie das Mooskupfer und glaubt die Bildung dieser eigenthümlichen Metallformen durch einen besonderen Krystallisationsvorgang „crystallisation by thermoreduction" erklären zu müssen, da keine der sonst üblichen Krystallisationsmethoden ins Spiel kommen.

A. Liversidge [2]) hat Moosgold, -Silber und -Kupfer in der schon erwähnten Weise dargestellt. Nach W. M. Hutchings [3]) bilden sich diese fadenförmigen Auswüchse des Kupfers besonders an den frischen Bruchflächen des geschmolzenen und noch nicht vollständig erkalteten regulus. Aber auch nach dem Erkalten lässt sich durch Erhitzen eines regulus auf 250—300° die Bildung solcher moosförmigen Erhöhungen

1) Hampe, Zeitschr. f. Berg-, Hütten- und Salinenwesen 27, 205 und Fresenius, Zeitschr. f. analyt. Chemie 13, 176 (1874).

2) A. Liversidge, Lond. Roy. Soc. Proc. vol. XXVI p. 71 und Chem. News vol. XXXV p. 68.

3) W. M. Hutchings, Chem. News vol. XXXV p. 117 et 180.

wahrnehmen. T. A. Readwin[1]) und J. H. Collins[2]) haben ebenfalls diese Moosbildung beobachtet.

Nach J. Margottet[3]) vollzieht sich die Reduction des Schwefelsilbers durch Wasserstoff schon bei 440°, wobei dieses fadenförmige Silber (argent. filiforme) erhalten wird.

Um eine Entscheidung bezüglich der ersten Frage geben zu können, ist zu beachten, dass sowohl die soeben erwähnten Forscher, als auch Hittorff das Mooskupfer durch Reduction des Schwefelkupfers in der Glühhitze dargestellt haben. Dieser Entstehungsweise conträr ist diejenige durch den elektrischen Strom. Hittorff äussert sich wiederholt an andern Stellen seiner obenerwähnten Arbeit, dass er die betreffenden Schwefelmetalle entschieden für Elektrolyte halte, weil z. B. beim Erwärmen der Widerstand des Halbschwefelkupfers rasch abnimmt, was sich einfach dadurch erkläre, dass ein Erweichen, eine Beweglichkeit der Theilchen eintritt; auch hat er beim längeren Durchleiten des elektrischen Stromes durch Schwefelsilber an dem negativen Pol einzelne Silberhaare erhalten. Bei der Zersetzung der Schwefelmetalle durch die Hitze werden, wie Hittorff an zwei Stellen bemerkt, theilweise ziemlich starke Gegenströme wachgerufen, so dass ich auch in den Fällen, in welchen das Mooskupfer scheinbar nur durch die Wärme aus den Schwefelmetallen entsteht, annehme, dass sich thermo-elektrische Ströme gebildet und das Kupfer elektrolitisch abgeschieden haben; jedenfalls müssen weitere prägnantere Versuche diese Ansicht noch erhärten.

Stuttgart, Techn. Hochschule, Juni 1888.

---

1) T. A. Readwin, Chem. News vol. XXXV p. 144, 186, 195.
2) J. H. Collins, Chem. News vol. XXXV p. 154.
3) J. Margottet, Compt. rend. vol. LXXXV p. 1142.

Der Elasticitätsmodul und die Schallgeschwindigkeit.

Didaktische Studie.

Von

A. Kurz.

§ 1. Auch v. Beetz beispielsweise hat diesen Gegenstand in seinen „Leitfaden der Physik" aufgenommen, sodass es sich im folgenden nur um die Methodik handeln kann und soll.

Vor allem möchte ich dem steten Gebrauche des Wortes „Modul" das Wort reden, damit einerseits zwischen den Technikern und Theoretikern volle Uebereinstimmung herrsche, sowie auch das längere und unbestimmtere Wort „Coefficient" wenigstens aus diesem Gebiete verschwinde. Beide Wörter müssen nämlich noch in neuesten Schriften theils als identisch, theils als zu einander reciprok aufgefasst werden, wozu beispielsweise Kirchhoff's classische „Mechanik" und Herwig's treffliches Büchlein „Physikalische Begriffe etc." genannt werden mögen. Im letzteren ist noch dazu auch statt „Elasticität" für das Wasser und die Luft gebraucht das Wort „Compressibilität" und zwar in der Zusammensetzung mit „Coefficient" im Sinne des hier vertretenen Moduls, während, um noch einer über den Schulbereich hinausgehenden Abhandlung [1]) Erwähnung zu thun, J. J. Müller in Pogg. Ann. Bd. 154 S. 113—127 (1875) den reciproken Elasticitätsmodul des Wassers und der Luft schlechtweg „Compressibilität" und den wirklichen Modul „Elasticitätscoefficient" nennt (wie Kirchhoff bei den festen Körpern). Die vier genannten Autoren sind gestorben; der letzte während des Druckes seiner Abhandlung als der jüngste gleichwohl am frühesten.

Den Technikern zuliebe, welche für Eisen den Modul

20000 kg durch Quadratmillimeter

gebrauchen, soll auch in dieser ganzen Abhandlung das Kraftgewichtsystem für diese Moduli und mit jenen zwei Einheiten (Kilogramm und Millimeter) beibehalten werden.

---

1) In dieser Beziehung steht Herwig's Schrift inmitten der Leitfäden und dergl. einerseits und von Kirchhoff's Werk und den Aufsätzen wie Müller's genannter Abhandlung anderseits. Verfasser des Obigen möchte, wie Herwig, die Rolle des Vermittlers beider, der Schule und der Wissenschaft, spielen.

§ 2. Nun will ich die Formel für die Schallgeschwindigkeit c in einem Eisenstab z. B. elementar ableiten. Beetz' Leitfaden, bis zur achten Auflage einschlüssig von ihm selbst herausgegeben, enthält eine solche Ableitung nach dem Grundsatze

$$\text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Zeit},$$

welche mich nicht ganz befriedigt, so zwar, dass ich sie auch nicht recht zu ergänzen vermochte. Das scheint auch Henrici's Anschauung gewesen zu sein bei der jüngsten Herausgabe der neunten Auflage, da er diesen Weg von Beetz verliess und anderes, was noch kürzer ist, an die Stelle setzte. Dies befriedigt mich aber noch weniger und ich griff deshalb zu dem auch sonst fruchtbareren Energieprincip

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Masse} \cdot \text{Quadrat der Geschwindigkeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg},$$

welches ich nun verwende wie folgt:

Die Aenderung ΔP der Spannkraft P pro Querschnittseinheit möchte die Längenänderung Δl bewirken, gemäss

$$\Delta l : l = \Delta P : E \ (E \text{ der Elasticitätsmodul});$$

statt dessen aber wird bewirkt die Dichte-Aenderung Δd gemäss

$$\Delta d : d = \Delta P : E,$$

das ist an der Verdichtungsstelle gewissermaassen die Anstauung der Masse

$$2 \Delta d \text{ oder } 2d \cdot \Delta P : E$$

gegenüber der Verdünnungsstelle, pro Raumeinheit.

Im Raume eines Cylinders vom Querschnitt 1^2 und der Länge c' ist also die bewegte Masse

$$2 \cdot d \cdot \frac{\Delta P}{E} \cdot 1^2 \cdot c';$$

c', absichtlich als Länge von der Geschwindigkeit c unterschieden, ist auch auf der rechten Seite als „Weg" einzusetzen und $\Delta P \cdot 1^2$ als Kraft, sodass

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2d \cdot \frac{\Delta P}{E} \cdot 1^2 \cdot c' \right) c^2 = (\Delta P \cdot 1^2) \cdot c';$$

woraus

$$c^2 = E : d,$$

oder im Hinblicke auf den Schluss von § 1

$$c^2 = Eg : d$$

sich ergibt. Numerisch ist $E = 2 \cdot 10^4$, $g = 9810$ oder nahe 10^4, d nicht ganz $8 \cdot 10^{-6}$ (Kilogramm durch Cubikmillimeter), sodass

$$c = \sqrt{25 \cdot 10^{12}} = 5{,}10^6 \text{ mm durch Secunde}$$
$$= 5000 \text{ m durch Secunde}.$$

Für einen andern festen Körper ändert sich E und d.

§ 3. Für die Schallgeschwindigkeit im Wasser enthält Herwig's Buch auch die analoge Rechnung und ich habe gemäss obigem § 1 nur den Elasticitäts-Modul des Wassers zu reklamiren, nach der Formel

$$\Delta v : v = \Delta P : E,$$

welche zu einer im § 2 vorgekommenen ganz analog ist.

$$\Delta v : v = 46 \cdot 10^{-6}$$

ist das Compressionsverhältnis für

$$\Delta P = 1 \text{ Atmosphäre} = 0{,}0103 \text{ kg}$$

durch Quadratmillimeter, also jetzt

$$E = 225 \text{ kg} : \text{Quadratmillimeter, und}$$
$$d = 1 \cdot 10^{-6}, \text{ also annähernd}$$
$$c = \sqrt{225 \cdot 10^4 \cdot 10^6} = 15 \cdot 10^5 \text{ mm} : \text{Secunde}$$
$$= 1500 \text{ m} : \text{Secunde.}$$

Bei Herwig steht 1485 und auch noch über 1400 lautet die Messung von Colladon und Sturm am Genfersee; dass diese nach Müller „wohl nicht die hinreichende Genauigkeit haben" soll, kommt mir übertrieben vor.

Für andere Flüssigkeiten als Wasser gilt der letzte Satz des § 2.

§ 4. Für die Schallgeschwindigkeit in Gasen setze ich die Analogie des § 2 und 3 noch strammer fort, als es schon Herwig thut, indem ich, die Proportion

$$\Delta v : v = \Delta P : P,$$

welche aus Mariottes Gesetz folgt, mit § 3 vergleichend, folgere:

Der Elasticitätsmodul des Gases ist der jeweilige Gasdruck, also z. B. für 1 Atmosphäre gleich 0,0103 kg durch Quadratmillimeter.

Die Dichte d ist dann bei diesem Drucke und für atmosphärische Luft gleich

$$\frac{1}{773} \cdot 10^{-6} \text{ kg durch Cubikmillimeter;}$$

also in diesem Falle

$$c = \sqrt{0{,}0103 \cdot 10^4 \cdot 773 \cdot 10^6} \text{ oder nahe } 2 \cdot 10^5 \sqrt{2} \text{ mm} : \text{Secunde}$$
$$= 280 \text{ mm} : \text{Secunde.}$$

Für die atmosphärische Luft bei anderem Drucke ändern sich E und d in gleichem Maasse, sodass c constant bleibt.

Für ein anderes Gas als atmosphärische Luft ist bei vorigem Drucke E das vorige, d aber bekommt den Factor der Gasdichte gegenüber der atmosphärischen Luft als Einheit; dieser ist z. B. $\frac{1}{14}$ für Wasser-

stoff, daher c in diesem beinahe viermal so gross, als in der atmosphärischen Luft.

Bezüglich des Temperaturfactors ist der vorige Absatz maassgebend; er wird am besten als Verhältnis der absoluten Temperaturen (die eine 273) eingetragen. Letzteres zum Vergleiche mit den Schlusssätzen des § 2 und 3.

§ 5. Das Resultat des § 4 (das Newton'sche c) ist bekanntlich zu klein und Laplace hat es mit dem Factor $\sqrt{k}$ multiplicirt, wo

$$k = s' : s''$$

das Verhältnis der specifischen Wärme bei constantem Drucke und derjenigen bei constantem Volum darstellt. Für die atmosphärische Luft ist dieses Verhältnis 1,4, sodass

$$c = 2 \cdot 10^5 \sqrt{2{,}8} = 33 \cdot 10^4 \text{ mm} \cdot \text{Secunde, oder rund}$$
$$= 330 \text{ m} \cdot \text{Secunde}$$

mit den Messungen übereinstimmt.

Der im § 2 bis 4 gebrauchte (gewöhnliche) Elasticitätsmodul ist jetzt als der isothermische zu unterscheiden von dem $k$mal so grossen adiabatischen Elasticitätsmodul, welcher in § 4 statt des isothermischen einzusetzen ist, weil die bei der Verdichtung und Verdünnung eintretende Temperaturzu- und Abnahme im § 2 nicht berücksichtigt worden war und bei den Gasen zu so erheblicher Erhöhung der Schallgeschwindigkeit Anlass gibt.

Diese kurze Darstellung der Heranziehung von k findet sich in der Abhandlung von Müller[2]); sie scheint Herwig entgangen zu sein, der sie sonst meines Erachtens gewiss benutzt hätte. Ich wiederhole „die kurze Darstellung"; denn die „Heranziehung" von k wird von Herwig auch bewiesen und zwar mittels des vollständigen Gasgesetzes (von Mariotte und Gay-Lussac), wie ich es kürzer nenne, und der unter dem Titel „Adiabatische Compression" dargelegten Formel, die ich in Differenzen (Δ) schreibe

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta P}{P} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

(T die absolute Temperatur) aber nicht benutzen werde. Das vorher erwähnte Gasgesetz aber

$$P \cdot v = a \cdot T$$

(a eine Constante) liefere uns gleich die Temperaturzunahmen

$$\Delta T = P \Delta v : a \text{ und } \Delta T = v \Delta P : a,$$

je nachdem der Druck constant betrachtet werden mag oder das Volum.

2) Vielleicht auch in Maxwell's Theory of Heat 170 und 270, wie Müller bei dieser Gelegenheit citirt. Auch mit Heranziehung des obigen § 6 ist jene Darstellung noch kürzer als diejenige von Herwig.

Bei der ersteren Procedur kommt s', bei der letzteren s'' in Betracht, wobei s' gerade um den Betrag der hierbei verrichteten äusseren Arbeit grösser ist als s''. Dies ist elementar berechenbar und findet sich auch im Leitfaden von Beetz. Hier bleibt es beiseite.

§ 6. Ich erbringe jetzt den Beweis des zweiten Absatzes im § 5 durch die Differenzengleichung

$$\frac{\Delta' P}{P} = k \frac{\Delta' v}{v},$$

welche didaktisch einfacher als die Herwig'sche, weil sie wie früher nur mit den Veränderlichen P und v zu thun hat und auch bezüglich k kürzer lautet. Nur musste ich die beiden Differenzen indiciren, weil sie für den adiabatischen Process gelten sollen zum Unterschiede der früher für den isothermischen Process gebrauchten.

Diese Gleichung erhält man aus derjenigen der Wärmezufuhr ΔQ, die hernach im adiabatischen Process gleich Null zu setzen ist, für eine Gewichtseinheit Gases, wobei im allgemeinen sowohl der Druck als das Volum sich ändern. Man ist nun so klug, diese beiden Aenderungen hinter- statt nebeneinander sich vollziehend zu denken und erhält dann gemäss dem Schlusse des § 5

$$\Delta Q = (s'' \cdot v \Delta P + s' P \cdot \Delta v) : a,$$

also laut vorigen beiden Absätzen

$$0 = s'' \cdot v \cdot \Delta' P + s' \cdot P \cdot \Delta' v.$$

Da $s'\ s''\ v\ P$ positiv, so muss eine der beiden Veränderungen das entgegengesetzte Zeichen der andern haben, wie das auch vom Mariotte'schen Gesetze her bekannt ist. Mit Rücksicht hierauf und auf die erste Gleichung des § 5 ist also die erste Gleichung dieses Paragraphen bewiesen.

Anders geordnet, nämlich mit der hier vorherrschenden Rücksicht auf den Elasticitätsmodul, lautet sie

$$\frac{\Delta' P}{\Delta' v : v} = k \cdot P.$$

Laut §§ 3 und 4 ist P der gewöhnliche Elasticitätsmodul, der auch geschrieben wurde mit

$$\frac{\Delta P}{\Delta v : v};$$

analog nennen wir die linke Seite den adiabatischen Elasticitätsmodul und der verlangte Beweis ist erbracht.

§ 7. Uebergang von der Formel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der longitudinalen Schwingungen zur Formel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a der transversalen Schwingungen bei gespannten Saiten:

Herwig gibt die Formel

$$a = \sqrt{f \cdot l : m}$$

wo f das angehängte Gewicht (mit dem Factor g behaftet), l die Länge und m das Gewicht der Saite bedeutet, ohne Begründung und Beetz (Henrici) gibt

$$s \cdot 2l \text{ gleich der vorigen Quadratwurzel,}$$

was manchem Anfänger die anderwärts stehende

$$s \cdot 2l = a$$

verhüllt (s die Schwingungszahl), auch ohne Spur von Erläuterung.

Ich habe bis zum heurigen Jahre wenigstens die Proportionalität von s mit $\sqrt{f}$ und mit $\sqrt{l}$ begründet durch die Formel von der Schwingungszeit des Pendels, aus der auch die zwei minderwichtigen Saitengesetze vom Einflusse des Durchmessers der Saite und des specifischen Gewichtes derselben auf s hervorgehen. Aber obige Gleichung, sagte ich, könne man nicht elementar darthun.

Nun führte mich aber jüngst der obige § 2 zu folgendem Vergleiche:

$$c^2 : a^2 = l : \Delta l;$$

es unterhält nämlich f die longitudinalen und transversalen Schwingungen; während wir bei ersteren ein Drahtstück Δl mit der Geschwindigkeit c fortbewegt dachten, ist es bei der transversalen Bewegung sozusagen der ganze Draht l, der sich mit der Geschwindigkeit a bewegt. Also bedeutet die vorige Proportion die Gleichheit der kinetischen Energie in beiden Fällen.

Für c^2 gemäss § 2 substituirt, wird

$$a^2 = \frac{Eg}{d} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

und, da

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{f}{q},$$

so kommt

$$a^2 = \frac{f \cdot g}{q d},$$

was mit der ersten Formel dieses Paragraphen übereinstimmt.

Zusatz: nicht zu verwechseln das Vorige mit der Energie der Schwingungsbewegung selber. Bezüglich dieser gibt Herwig als „Mittelwerth bei einer einfachen Schwingungsbewegung

$$m \pi^2 \xi^2 : T^2;$$

worin m die Masse des Aethers, ξ die Amplitude, T die Schwingungsdauer bedeutet". Es wäre andern Lesern wohl auch, aber mir gewiss zeitersparend gewesen, wenn er beigesetzt hätte

$$y = \xi \cdot \sin(2\pi t : T), \text{ Mittelwerth } = \left[\frac{1}{2} m \int_0^{T:4} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt\right] : \frac{T}{4}.$$

Rechnen wir statt dessen elementar mit der Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{1}{2} m \left(\xi : \frac{T}{4}\right)^2,$$

so kommt ein geringerer Mittelwerth heraus, der sich zum vorigen nahe wie 4 : 5 verhält. Rechnet man aber das Maximum der Schwingungsenergie aus

$$2 m \pi^2 \xi^2 : T^2,$$

so gibt dieses mit dem Minimum Null auch denselben Mittelwerth wie oben.

§ 8. Der § 6 enthält bekanntlich das Poisson'sche Gesetz oder geht aus diesem hervor und man könnte auf diese Art auch das k in Rechnung kommen lassen, statt, wie ich im Jahrgange 1884 dieser Zeitschrift S. 162 gethan, es als Resultat höherer Rechnung plötzlich auf den Plan zu bringen. Davon im Nachtrage (3.) auf folgender Seite.

Jetzt will ich als Dank für die Müller'sche Abhandlung noch die Druck- oder Correcturversehen namhaft machen, die ich im Jahre 1875 darin wahrnahm. Ausser den beiderlei Moduli (§ 5 und 6) kommen daselbst noch die beiderlei Ausdehnungscoefficienten (isothermisch und adiabatisch) zur Sprache

$$\frac{\Delta v}{v \Delta T} \text{ und } \frac{\Delta' v}{v \Delta' T},$$

welche sich verhalten wie $(1-k)$ zu 1, und die beiden Quotienten

$$\frac{\Delta P}{P \cdot \Delta T} \text{ und } \frac{\Delta' P}{P \cdot \Delta' T}$$

dort „specifische Druckzunahmen" genannt, welche sich verhalten wie $(k-1)$ zu k. (Richtig S. 116 a. a. O. Zeile 5, unrichtig Zeile 14).

Da $(1-k)$ negativ ist, so ist es auch der eine der beiden Ausdehnungscoefficienten; beim Wasser von 0° bekanntlich der gewöhnliche, während der adiabatische daselbst mit + 0,12 notirt ist.

Am Schlusse des § 2 auf S. 117 a. a. O. sind die dreierlei Verhältnisse in der Form eines Productes wiederholt und es fehlt dabei der Factor $(-P)$ für die drei adiabatischen, welcher ferner für die drei isothermischen nicht ebenso, sondern $(+P)$ lautet.

Drei Notizen zu S. 123, 124 und 127 (Schluss) gehen noch weiter über den Rahmen des Obigen hinaus, als dass sie hier Platz finden könnten.

Nachträge bei der Correctur:

1. Experimente über Saitenschwingungszahlen folgen bald nach.

2. Zum Schlusse von § 7:

$$2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1 \text{ und}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \text{ ist ebensoviel.}$$

3. Zum ersten Absatze von § 8: Mittlerweile habe ich auch im Unterrichte schon folgenden Weg eingeschlagen:

Mariotte (isothermisch, bekannt).

$(P + \Delta P)(v - \Delta v) = P \cdot v$ oder

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta P}{P} \text{ oder,}$$

Poisson (adiabatisch, gesucht).

Dagegen wurde im § 6 gefunden

$$k\frac{\Delta' v}{v} = \frac{\Delta' P}{P} \text{ oder,}$$

um das Integriren zu vermeiden,

$$\text{log. nat.}\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right) =$$

$$= \text{log. nat.}\left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right).$$

Hier ist also statt k zu setzen 1.

$$k \text{ log. nat.}\left(1 + \frac{\Delta' v}{v}\right) \text{ oder}$$

$$\text{log. nat.}\left[\left(1 + \frac{\Delta' v}{v}\right)^k\right) =$$

$$= \text{log. nat.}\left(1 + \frac{\Delta' P}{P}\right).$$

Lässt man noch das negative Zeichen anhaften dem einen der beiden

Δ,

so lautet die erste Zeile

$(P + \Delta P)(v + \Delta v) = P \cdot v$ oder

$$P' v' = P \cdot v$$

Δ',

so erhält man statt der vorletzten Gleichung

$$k \text{ log. nat.}\left(\frac{v + \Delta' v}{v}\right) =$$

$$= - \text{log. nat.}\left(\frac{P + \Delta' P}{P}\right) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{v'}{v}\right)^k = \frac{P}{P'}.$$

4. Zu meiner Abhandlung S. 396 u. f.: In Zeile 2 daselbst wäre statt des (einzigen) Wortes „Replik“ noch zu ergänzen „Kritik und historische Bemerkungen“.

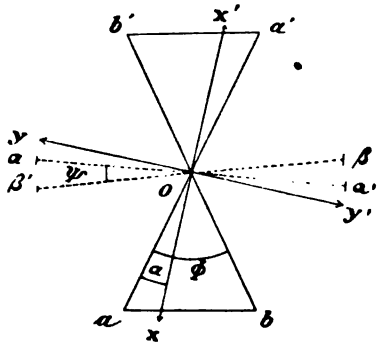
Entgegengekuppelte Fadenwagen zur absoluten Kraftmessung [1]).

Von

G. Jaumann.

Zwei entgegengekuppelte Bifilare oder Trifilare, deren Drehungen gemeinschaftlich, deren Senkungen aber voneinander unabhängig sind, bilden ein System, welches ohne Ausmessung oder Graduirung erlaubt, absolute, continuirliche Kraftmessungen auch in Fällen auszuführen, in welchen sich das Wärmeobject bei der Wägung nicht verschieben darf. Es stellt dieses System die Vervollkommnung der a. a. O. [2]) beschriebenen magnetischen Trifilarwage dar.

In untenstehender Figur sollen in Horizontalprojection auf das Coordinatensystem xx' (Visirlinie des Ablesefernrohres) und yy' (Skalen-



richtung) durch $\alpha\alpha'$ (Spiegelnormale) und $\beta\beta'$ Richtungen angegeben werden, welche die freie Ruhelagen in zwei voneinander unabhängigen Suspensionskörpern markiren. Die Schwerpunkte O derselben liegen

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 97 S. 64 (1888).

2) Jaumann, Schutzring-Elektrometer mit continuirlicher Ablesung, Wiener Akad. Bd. 95 651 (1887). Vergl. auch die neuere Darstellung „Zeitschr. f. Elektrotechnik", Wien 1887, Heft 10.

senkrecht übereinander. Aus diesen freien Lagen werden sie durch die zwei horizontalen dünnen Drähte ab und $a'b'$ in die Gleichgewichtslage aa' (Spiegelnormale) und bb' abgelenkt, wodurch das System bleibend centrische Symmetrie und eine feste Horizontalprojection erhält.

Bezeichne F das Gewicht des Körpers aa', zu welchem sich die zu messende Verticalkraft f algebraisch addiren muss, und t das Verhältnis des Torsionsmomentes sämmtlicher Aufhängedrähte zu der Summe der Momente der Suspensionen aa' und bb' in freiem Zustand, so besteht die Gleichgewichtsbedingung[1]) in:

$$\left[F\left(1+\frac{2t}{(\Phi-\Psi)}\right)+f\right]\cdot\cos(\Theta+\alpha)=\text{Const}\cdot\cos(\Phi-\Theta'-\alpha).$$

Durch Bestimmung der Ablenkung α_0 für eine Anziehung $f=0$ erhält man die Gleichung:

$$F\left(1+\frac{2t}{(\Phi-\Psi)}\right)\cdot\cos(\Theta+\alpha_0)=\text{Const}\cdot\cos(\Phi-\Theta'-\alpha_0)$$

und durch Division:

$$f=R\frac{\alpha-\alpha_0}{1-r\alpha} \qquad (1$$

worin a und α_0 die auf Tangente corrigirten Skalenausschläge in Centimetern, R und r den Reductionsfactor und die sehr kleine Correctionsconstante des Apparates darstellen.

Sie haben die Form:

$$R=\frac{1}{2d}F\left(1+\frac{2t}{(\Phi-\Psi)}\right)\frac{\operatorname{tg}\Phi-\operatorname{tg}\Psi}{1+\frac{1}{2d}\operatorname{tg}(\Phi-\Theta')\cdot\alpha_0}$$

und

$$r=\frac{1}{2d}\operatorname{tg}\Theta,$$

worin d die Scalendistanz bedeutet.

Der Reductionsfactor R ist vollkommen constant und kann durch Verkleinerung des Winkels Φ[2]) beliebig klein gemacht werden.

---

1) Es wird darin gesetzt: $\sphericalangle aoy=\Theta$; $\sphericalangle \beta oy'=\Theta'$ und $\sphericalangle aox=\alpha$ (Ablesungswinkel); ferner $\sphericalangle aob=\Phi$ (Divergenz der gekuppelten Richtungsmarken, und $\sphericalangle a o\beta=\Psi$ (Divergenz der freien Richtungsmarken).

2) Es geschieht dies durch Verkürzung der Kuppelfäden ab und $a'b'$, welche an den Suspensionskörpern über Stege laufen und in Wirbeln enden.

Für elektrische Wägungen empfiehlt es sich F zwischen 50 und 100 Grammgewicht und entsprechend $\sphericalangle(\Phi-\psi)$ zwischen 9° und 4·5° zu nehmen. Es entspricht dann einer Anziehung oder Abstossung f von 1 Grammgewicht ein Ausschlag von 30 cm bei 200 cm Scalendistanz, wie bei meiner bisherigen Aufstellung.

Die Correctionsconstante r nimmt dabei etwa den Werth 0,0005 an.

Es ist vortheilhaft, Moment und Schwingungsdauer der gekuppelten Suspensionen möglichst gleich zu machen. Die Länge der Aufhängedrähte erhält durch die Fadensteifheit eine untere, durch Bequemlichkeitsrücksichten eine obere Grenze. Der Radius der Suspensionen durch das Steigen des Torsionsverhältnisses t eine innere (1 cm), durch das Abnehmen der Schwingungsdauer eine äussere Grenze (3 cm). Für einen Radius von 2 cm hat letztere die Grössenordnung von 10 Secunden [1]).

Es empfiehlt sich ferner folgenden a. a. O. [2]) angegebenen Messungsvorgang beizubehalten: Ein an einem schlaffen Coconfaden befestigtes, auf dem Suspensionskörper aa' sitzendes Gewichtchen von genau bekannter Grösse w (1 · 5 g) lässt sich während der Messung vom Standpunkt des Beobachters aus abheben und aufsetzen [3]). Man gewinnt damit für eine Anziehung $f = 0$ zwei Nullpunkte, welche den Ausschlägen α_{01} (nahe gleich 0) für aufgesetztes und α_{02} (etwa −45 cm) für abgehobenes Senkelgewicht entsprechen. Der Ausschlag $(\alpha_{01}-\alpha_{02})$ für das bekannte Gewicht w legt jeder Messung eine Bestimmung des Reductionsfactors R bei. Die Doppelmessung der Kraft f bei aufgesetztem und abgehobenem Senkel, welche die den Nullpunkten α_{01} und α_{02} entsprechenden Ablesungen α_1 und α_2 ergibt, liefert für jede Messung eine Bestimmung der Correctionsconstanten r unter geringer, ja für eine längere Messungsreihe verschwindender Herabsetzung des Gewichtes der einzelnen Messung.

Diese experimentelle Bestimmung der Correctionsconstanten r hat dafür den Vortheil, dass damit sämmtliche durch die Messung geforderte Correctionen, welche dem Ausschlag α proportional sind, berücksichtigt sind, weil sie sich in einer Verkleinerung oder Vergrösserung der Constanten r ausdrücken.

Es sind dies:

1. Viele specifische Correctionen des betreffenden Messinstrumentes [4]),

1) Es wird leicht sein, dem System dadurch aperiodische Bewegung zu sichern, dass man es im Feld eines passenden Hufeisenmagnets schwingen lässt.

2) Zeitschr. f. Elektrotechnik, Wien 1887.

3) Es gelingt dies bei guter Justirung ohne die leiseste Erschütterung des schweren Suspensionskörpers.

4) So z. B. beim Thomson'schen Elektrometer die Capacitätsänderungen des Collectors durch die Senkung, welche von der elastischen Ausdehnung der variabel belasteten Aufhängedrähte herrührt.

2. Die Correctionen, welche die Kuppelung durch die feinen Drähte ab und $a'b'$ bei unrichtiger Aufstellung einführen könnte [1]).

Die vier Ablesungen $\alpha_{01}\ \alpha_{02}\ \alpha_1\ \alpha_2$ combiniren sich in der Gleichung:

$$f = R\left[1 + r \cdot \frac{(\alpha_1 - \alpha_{01}) + (\alpha_2 - \alpha_{02})}{2}\right] \frac{(\alpha_1 - \alpha_{01}) + (\alpha_2 - \alpha_{02})}{2},$$

worin

$$R = \text{Mittel von } \frac{w}{(\alpha_{01} - \alpha_{02})}$$

und

$$r = \text{Mittel von } \frac{(\alpha_2 - \alpha_{02}) - (\alpha_1 - \alpha_{01})}{2\,(\alpha_2 - \alpha_{01})\,(\alpha_{01} - \alpha_{02})}$$

ist und die Mittelbildung auf die ganze Messungsreihe zu erstrecken ist. Will man nicht zwei Messungen α_1 und α_2 in einer Zahl vereinigen, so kann man sie in den Gleichungen

$$f = R\left(1 + r[\alpha_1 - \alpha_{02}]\right)(\alpha_1 - \alpha_{01})$$
$$f = R\left(1 + r[\alpha_2 - \alpha_{01}]\right)(\alpha_2 - \alpha_{02})$$

einzeln verwerthen.

In sämmtlichen Gleichungen sind die α mit ihrem algebraischen Zeichen einzuführen.

Von der Ausführung dieser Kuppelsuspension bin ich durch die Vollendung einer anderen Arbeit auf kurze Zeit abgehalten. Ich behalte mir dieselbe vor.

Die Theorie des Apparates habe ich deshalb hier zu geben mir erlauben dürfen, weil die Praxis desselben sich deckt mit der Praxis der bisherigen Ausführung der Trifilarwage.

Der Apparat lässt eine Genauigkeit der absoluten Kraftmessung erwarten, welche gleich ist der Genauigkeit der relativen Momentmessung mit einem Bifilar, dessen Torsionsverhältnis gleich

$$\frac{2t}{(\Phi - \Psi)}$$

ist, d. h. etwa 2—3 % beträgt. Thatsächlich habe ich mit der alten Aufstellung schon, wie ich dies seinerorts belegen werde, trotz der störenden Inconstanz der bei derselben verwendeten magnetischen Directionskraft diese Genauigkeit nahe erreicht.

---

1) Bei halbwegs richtiger Ausführung dieser Kuppelung verschwinden diese Correctionen vollständig.

Ausser der Constanz des Reductionsfactors und Nullpunktes besteht der Vortheil der hier beschriebenen Construction gegen die frühere darin, dass man in der Dimensionirung der Fadenwagen nicht eingeschränkt ist durch die erreichbaren specifischen magnetischen Momente, dass der Reductionsfactor des Instrumentes durch einfaches Anziehen zweier Fäden zwischen 0 und ∞ beliebig verändert, und dass diese Wage zur Messung in Apparaten verwendet werden kann, welche veränderliche magnetische Felder besitzen.

Jahrgang 1888 Nr. 26 enthält:

Rundschau. — **Eine Neubestimmung der elektrometorischen Kraft des Fleming'schen Normal-Daniell-Elementes.** Von A. Voller. — **Ueber das Photometer von Gresse.** Vortrag, gehalten in der 28. Jahresversammlung des Deutschen Vereins von Gas- und Wasserfachmännern in Stuttgart von Dr. H. Krüss in Hamburg. — **Methode und Apparat zur Erzeugung gleichgerichteter Inductionsströme, sowie Anwendung derselben zur Widerstandsbestimmung der Elektrolyte.** Von Johann Carl Pürthner in Wien. — **Literatur.** Dr. J. Puluj, Strahlende Elektrodenmaterie und der sogenannte vierte Aggregatzustand. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Personalnachricht. E. Edlund †. — Telephonie. Fernsprechlinie Berlin-Dresden. — Elektrische Beleuchtung. Elektr. Beleuchtung im Gärtnertheater in München. — Beleuchtungsprobe »Unter den Linden« in Berlin. — Errichtung von Centralstationen in der Spandauerstrasse und Dorotheenstadt in Berlin. — Mehrfache Einstellung der elektrischen Bahnhofbeleuchtung in Frankfurt a. M. — Städtische Elektricitätswerke in Darmstadt und Witten. — Beleuchtung der Ausstellung in Brüssel. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinenausstellung in München. — Programm der techn. Hochschule in Darmstadt für 1888/89. — Hydraulische Anlage des Centralbahnhofes in Frankfurt a. M. — Blitzschlag in die obere Wasserleitung der Stadt Torgau. — Bahnhofuhr mit erleuchteten Zeigern und Ziffern. — Ein sehr absolutes Zeitmaass. — Neues Trockenelement. — Vom Kupferring. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, *Verlagsbuchhandlung.*

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Soeben erschienen:

Ueber den gegenwärtigen Stand

der

elektrischen Beleuchtung.

Bericht

an den Verein der Gas- und Wasserfachmänner Deutschlands

erstattet von

Dr. Schilling sen.

Octav. 45 Seiten. *Brochirt Preis 70 Pf.*

Die Zeitung „Die Post“ in Berlin urteilt:

Von der neuen, vierten Auflage von Meyers Konversations-Lexikon (Verlag des Bibliographischen Instituts in Leipzig), liegt uns der soeben erschienene **11. Band** vor, bei dessen Durchsicht wir aufs neue die aufserordentlich sorgfältige, umsichtige und alle Fächer gleichmäfsig berücksichtigende Bearbeitung, die sichere und klare Darstellung im Text, die reiche und dabei weise Auswahl der in technischer Vollendung gebotenen Bildertafeln und Kartenbeilagen und die ebenso solide wie elegante Ausstattung rühmend hervorheben müssen. Vortrefflich im Kleinen wie im Grofsen, im Innern wie im Äufsern, verdient Meyers Konversations-Lexikon mit jedem neuen Band mehr und mehr, an die Spitze aller ähnlichen Werke gestellt zu werden. (12/9)

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg. (10/9)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für Lehrzwecke.

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (9/9)

Im Druck und Verlag von **F. Schulthess** in **Zürich** ist soeben erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

v. Sprecher, A., Physiker. **Reductionstabellen für Elektrotechniker**

zur Berechnung von tg u und sin $\frac{u}{2}$ aus der Scala-Ablesung s. Mit einer vierstelligen Logarithmentafel als Anhang. Kl. 8° br. M. 1.—.

Diese Tabellen existiren noch nicht so zusammengeordnet und werden jedem Fachmann willkommen sein. (11/9)

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdrieſsen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden.“

DEC 13 1888

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 10. Heftes.

Ueber eine einfache Vorrichtung zur Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metalldrähten. Von Prof. Dr. A. Wassmuth. S. 605.
Ueber die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten. Von K. Fuchs. S. 614.
Die Trägheitscurve auf wagerechter Ebene bei dem Vorhandensein eines Reibungswiderstandes, der von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängt. Von F. Roth. S. 648.
Volumen und Temperatur der Körper, insbesondere der Flüssigkeiten. Von Prof. Dr. A. Weilenmann. S. 660.
Ueber die Einführung in die beiderlei elektrischen Systeme. Von A. Kurz. S. 674.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Centralblatt für Elektrotechnik

erste deutsche

Zeitschrift für angewandte Elektricitätslehre.

Herausgegeben von

F. Uppenborn,
Ingenieur und Elektrotechniker in München.

Erscheint monatlich dreimal. **Preis pro Semester 10 M.**

Diese Zeitschrift macht es sich zur Aufgabe, alle wichtigeren Fortschritte auf elektrotechnischem Gebiete mitzutheilen. Dieselbe behandelt ganz speciell die quantitativen Anwendungen der Elektricität für industrielle Zwecke. Tagesfragen finden durch den jeder Nummer vorangestellten Rundschauartikel eine angemessene Würdigung, während eine Umschau auf dem Gebiete physikalischer Forschung die wissenschaftlichen Fortschritte vermittelt. Ein Fragekasten bietet den Lesern Gelegenheit, sich über sie speciell interessirende Fragen Aufklärung zu verschaffen. Ausserdem wird die Zeitschrift Besprechungen einschlägiger Fachwerke, Berichte über deutsche Patente und Auszüge aus der deutschen Patentrolle bringen.

Eine vollständige Unabhängigkeit befähigt die Zeitschrift, die gemeinsamen Interessen der elektrotechnischen Industrie Deutschlands zu vertreten. Da die Zeitschrift schon seit 1879 erscheint, so kann sie, abgesehen von der Telegraphie, als eine vollständige Geschicht der Entwickelung der elektrotechnischen Industrie Deutschlands angesehen werden.

Fortsetzung des Inhalts-Verzeichnisses

(vergl. Umschlag von Heft 9).

Jahrgang 1888 Nr. 27 enthält:

Rundschau. — **Berichte und Bemerkungen über Accumulatoren.** Von Dr. A. v. Waltenhofen in Wien. — **Entwurf einer neuen Wechselstrommaschine.** Von M. Baumgardt. — **Fortschritte auf dem Gebiete des elektrischen Nachrichtenwesens.** Delanys System der elektrischen Vertheilung von Nachrichten. — Die Verwendung von Dynamomaschinen zum Telegraphenbetrieb. — Grays Telautograph. — **Statistik.** — **Kleinere Mittheilungen.** Elektrische Beleuchtung. Die Elberfelder Elektricitätswerke. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinenausstellung in München 1888. — **Patente.**

Jahrgang 1888 Nr. 28 enthält:

Rundschau. — **Correspondenz.** — **Wirkungsweise elektrischer Maschinen.** (Fortsetzung.) Von Dr. Friedrich Vogel in Braunschweig. — **Bogenlicht-Centrale Interlaken.** Von F. Eckinger. — **Die elektromotorische Gegenkraft des Lichtbogens.** — **Literatur.** Dr. W. Schaefer, Polytechnikum, volkswirthschaftliche Wochenschrift für die deutschen Techniker in Staatsdienst und Gewerbe des In- und Auslandes. — **Auszüge aus Patentschriften.** — **Kleinere Mittheilungen.** Elektrische Beleuchtung. Die elektrische Beleuchtung in Lübeck. — Verschiedenes. Kraft- und Arbeitsmaschinenausstellung in München 1888. — Einschlagen des Blitzes in die neue Telephonleitung Breslau-Berlin. — Ueber Störungen an elektrischen Bogenlampen durch Schmetterlinge und deren Verhütung. — Walkers Marinebeleuchtungsapparat. — **Patente.**

München und Leipzig.

R. Oldenbourg, Verlagsbuchhandlung.

DEC 13 1888

Ueber eine einfache Vorrichtung zur Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metalldrähten [1]).

Von

Prof. Dr. **A. Wassmuth.**

Mit der experimentellen Untersuchung der Temperaturänderungen, wie sie beim Dehnen oder Zusammenziehen eines Drahtes auftreten, haben sich ausser Joule besonders Edlund [2]) und Haga [3]) beschäftigt und den Nachweis der Uebereinstimmung der Versuche mit der von Thomson aus der mechanischen Wärmetheorie abgeleiteten Formel erbracht. So erhielt z. B. Haga mit zwei verschiedenen Drähten für das mechanische Wärmeäquivalent die Zahlen: 437,8 und 428,1. Dabei verfuhr derselbe in einfacher Weise so, dass er um den zu dehnenden Hauptdraht einen sehr dünnen Draht eines anderen Metalls wickelte und das so entstandene Thermoelement, bezüglich den Hauptdraht und den dünnen Draht mit einem astasirten Galvanometer von sehr kleinem Widerstande verband. Dabei muss natürlich, wenn man die mittlere Temperaturänderung des ganzen Drahtes erhalten will, die Stelle der Umwicklung wiederholt gewechselt werden.

Diesem Uebelstande lässt sich durch eine Vorrichtung abhelfen, die zugleich den Vortheil hat, dass sich damit die erwähnten Temperaturänderungen selbst an einem unastatischen oder höchstens schwach astasirten Galvanometer von bedeutenderem Widerstande genau ermitteln lassen.

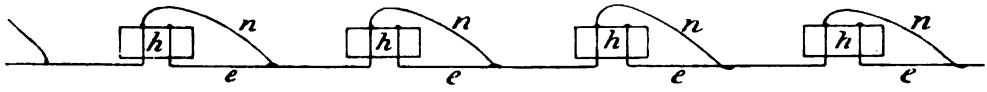
Zu dem Ende wurden von einem längeren Drahte aus hartem Eisen mehrere gleich lange Stücke *e* abgeschnitten und die Enden derselben, nachdem man sie rechtwinklig gebogen hatte, durch 3 cm lange Holzstücke *h* gesteckt und umgebogen; statt eines zu dehnenden Drahtes standen also gewissermassen mehrere (hier 10) in Verwendung. Um die Mitte eines jeden solchen Drahtes wurde ein dünner Neusilberdraht *n*

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 97 S. 52 (1888).

2) Pogg. Ann. Bd. 126.

3) Wied. Ann. Bd. 15.

herumgewickelt, angelöthet und ebenfalls durch Löthen mit dem Eisen des nächsten Elementes verbunden und sorgfältig darauf gesehen, dass diese Verbindungsstücke aus Neusilber beim Dehnen der Eisendrähte keinen Zug auszuhalten hatten.



Es waren so thatsächlich zehn Elemente hintereinander [1]) geschaltet und die beim Dehnen dieses so vorgerichteten Drahtes erzielte Wirkung, die gewiss der mittleren Temperatur entsprach, demnach beträchtlich. So gab schon ein kleines Kohlrausch-Hartmann'sches Galvanometer unastasirt einige Centimeter Ausschlag; in einem anderen Falle stieg der Ausschlag, wenn unter Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens statt eines Elementes ihrer zehn verwendet wurden, nahe auf das Fünffache. Eine geringe und demnach stabile Astasirung wird auf diese Art für die objective Darstellung immer ausreichen, während hierzu noch vor kurzem in einem anderen Falle ein fast aperiodisch astasirtes Galvanometer angewendet wurde.

Es liess sich erwarten, dass diese Drahtverbindung auch eine genaue quantitative Ermittlung der Temperaturänderungen gestatten werde. Hierzu wurde dieselbe in horizontaler Lage mit dem einen Ende festgeklemmt und mit dem anderen Ende — ähnlich wie dies Haga gethan — an dem kürzeren Arme eines Winkelhebels befestigt; am längeren Arme dieses Hebels konnte ein Gewicht verschoben und so das Ausdehnen oder Zusammenziehen der Drähte erzielt werden. Die Drahtverbindung war vor Luftströmungen durch darüber befindliche Watta geschützt und stand mit ihren Enden in Verbindung mit einem Galvanometer von mässiger Astasirung und nicht kleinem Widerstande. Mit Hilfe eines eingeschalteten kleinen Magnetinductors konnte unter Anwendung eines einfachen Stosses der Widerstand r der ganzen Leitung [2]) und in bekannter Art die Schwingungsdauer T und das Dämpfungsverhältnis k der Nadel ermittelt werden.

1) Es wurde zuerst versucht, eine Verstärkung der Wirkung dadurch zu erzielen, dass an einem Eisendrahte mehrere Neusilberdrähte angelöthet wurden; der Erfolg war ein geringer, da dieser Fall dem der Parallelschaltung der Elemente entspricht und der Widerstand der Elemente gegen den des Galvanometers nur klein war. — In jedem Falle kann selbstverständlich durch geeignete Combination das Maximum des Ausschlages erreicht werden und sei in dieser Hinsicht auf die in Carl's Repert. Bd. 14 S. 536 befindliche Tafel verwiesen.

2) Man erhielt auch gut stimmende Resultate, wenn als constante elektromotorische Kraft die beim Dehnen oder Zusammenziehen auftretende thermoelektrische Kraft gewählt wurde.

Am Galvanometer wurden mit Spiegel und Fernrohr drei Umkehrpunkte und nach Verlauf einer gewissen Zeit von 10 zu 10 Secunden die Ruhelage beobachtet. Wie man sieht, ist der Vorgang im wesentlichen ähnlich dem, wie er in der vortrefflichen Arbeit von Haga eingeschlagen wurde; es wurden deshalb auch die von Edlund, Haga und Onnes gegebenen Formeln und Regeln zur Berechnung der Resultate benutzt. Nur der besseren Uebersicht wegen mögen die wichtigsten derselben angegeben werden.

Es waren zuerst zu rechnen:

$$\lambda = \log \text{nat } k, \quad n = \frac{\lambda}{T} \text{ und } m = n^2 + \frac{\pi^2}{T^2}$$

Hierauf folgte die Ermittlung einer Abkühlungsconstante h, wozu Haga die Gleichung:

$$h = \frac{\log x' - \log x''}{(t_2 - t_1) \log e}.$$

benutzt; diese Formel ergibt sich aus den Beziehungen:

$$x' = Ce^{-ht_1} \text{ und } x'' = Ce^{-ht_2},$$

wie sie gelten, wenn die Nadel sich schon der schliesslichen Ruhelage nähert. Mit dem so erhaltenen Werthe von h rechne man

$$u = \frac{2hn}{m} \text{ und } e^{-hT} = g$$

sowie g^2 und g^3 und mit Hilfe der Distanz $(x_1 - x_2)$ des ersten Umkehrpunktes vom zweiten die Constante $\frac{C}{m}$ aus;

$$\frac{C}{m} = \frac{x_1 - x_2}{(1+u)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) + g - g^2}.$$

Hiermit ergeben sich leicht die Differenzen, wie sie für $h = 0$ gelten, aus:

$$X_1 - X_2 = \left[(x_1 - x_2) - (g - g^2)\frac{C}{m}\right](1 - u)$$

$$X_1 - X_3 = \left[(x_1 - x_3) - (g - g^3)\frac{C}{m}\right](1 - u)$$

wenn eben:

$$x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) - (x_3 - x_2)$$

die Entfernung des ersten vom dritten Wendepunkte vorstellt. Bildet man die Ausdrücke:

$$\frac{k}{k+1}(X_1 - X_2) \text{ und } \frac{k^2}{k^2 - 1}(X_1 - X_3),$$

so erhält man die Grössen, die nicht viel voneinander abweichen werden, da sie theoretisch gleich sein sollen; der Mittelwerth dieser Grössen wird vom ersten Ausschlage abgezogen und liefert so die Grösse X.

Ist E der Ausschlag an der Scala, wie er der Temperaturdifferenz von 1° an den Löthstellen und dem Widerstande von einer Einheit entspräche, so erhält man schliesslich mit dem Widerstande r der Leitung die Temperaturänderung ϑ aus:

$$\vartheta = \frac{Xr}{gE}.$$

Hierzu möge noch Nachstehendes bemerkt werden. Wie man sieht, ist eine sichere Kenntnis von $g = e^{-hT}$, bezüglich von k, unbedingt nöthig. So zeigt die Rechnung, dass mit Rücksicht auf die vorhandenen Verhältnisse ein Fehler von nur 4 % in der Bestimmung von h schon einen solchen von 1 % in der Bestimmung von ϑ nach sich zieht. Derartige Abweichungen können aber nach der obigen Methode der Ermittlung von h dabei leicht vorkommen; so wurden z. B. einmal erhalten für 4,343 h die Werthe 0,137, 0,132 und 0,128, also im Mittel 0,132. Die Schwierigkeit liegt nicht so sehr darin, dass die zu messenden Grössen schon sehr klein sind, als vielmehr in dem Umstande, dass die sich sehr langsam bewegende Nadel äusseren Einflüssen (Torsionsnachwirkungen, schwachen thermoelektrischen Kräften u. dgl.) leicht zugänglich ist und trotz der kurzen Beobachtungszeit (etwas über zwei Minuten) eine eigene Bewegung erhalten kann. Darf man annehmen, dass sich die Nadel infolge des letzteren Umstandes in jeder Secunde um Gleiches verschiebt, so eliminirt die Methode der Differenzenbildung diese Fehlerquelle. So wurde bei der vorliegenden Untersuchung stets in gleichen Zeiträumen $\tau = 10$ Secunden beobachtet.

Man hatte dann:

$$x' = Ce^{-ht},\ x'' = Ce^{-h(t+\tau)},\ x''' = Ce^{-h(t+2\tau)}$$

und demnach:

$$h = \frac{\log(x' - x'') - \log(x'' - x''')}{\tau \times \log e} = \frac{\log(x' - x'') - \log(x'' - x''')}{4{,}34}$$

in welchem Ausdrucke nur die ersten Differenzen der Ablesungen auftreten.

Da die Ausdrücke für die ersten Ausschläge ebenfalls von der Grösse g abhängig sind, so lag der Gedanke nahe, auf diese Art eine weitere Beziehung zur Ermittlung von g zu gewinnen.

Setzt man z. B. der Abkürzung wegen:

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)\left(1 + \frac{2hn}{m}\right) = P,$$

so gelten [1]) für die Distanzen der aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte die Gleichungen:

$$x_1 - x_2 = \frac{C}{m}[P + g - g^2]$$

$$x_3 - x_2 = \frac{C}{m}\left[\frac{P}{k} - g^3 + g^3\right]$$

woraus sich schliesslich ergibt:

$$F = (x_3 - x_2)[P + g - g^2] - (x_1 - x_2)\left[\frac{P}{k} - g^2(1-g)\right] = 0.$$

Die vorliegende Gleichung kann, da P sich nur wenig mit h ändert, benutzt werden, um g, etwa durch die *Regula falsi*, genauer zu ermitteln. So waren z. B. für eine Beobachtung:

$\frac{2nh}{m}$ ungefähr $= 0{,}03$, $\log k = 0{,}3337$, somit $P = 0{,}7013$.

Ferner die Distanzen:

$$x_1 - x_2 = 41{,}1 \text{ und } x_3 - x_2 = 9{,}3.$$

Dann erhielt man aus der obigen Gleichung $F = 0$ mit:
$g_1 = 0{,}7$, $F_1 = +1{,}151$ und mit $g_2 = 0{,}9 \ldots F_1 = -2{,}678$.

---

1) Vergl. a. a. O. Gl. 5, wo, nebenbei bemerkt, das Vorzeichen von

$$e^{-nT_3} = \frac{1}{k^3}$$

positiv sein soll. — Zieht man noch einen vierten Umkehrpunkt in Betracht, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$g(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2) = \frac{C}{m} P\left[g + \frac{1}{k}\right] = k[g(x_3 - x_2) + (x_3 - x_4)],$$

woraus

$$g = \frac{k(x_3 - x_4) - (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2) - k(x_3 - x_2)}$$

folgt. Bei derartigen, eigens hierzu ausgeführten Versuchen zeigte sich die merkwürdige, aber in der Theorie vollständig begründete Erscheinung, dass: $(x_3 - x_4)$ grösser als $(x_3 - x_2)$ ausfiel, da die hierfür nöthige Bedingung

$$\frac{P}{k} - \frac{P}{k^2} < g^3 - g^4$$

erfüllt war. So ergab eine Beobachtungsreihe vom 22. November als ersten Ausschlag 65,7 und für die Distanzen der Umkehrpunkte der Reihe nach 46,3, 13,1, 16,9, womit man nach der eben gegebenen Formel $g = 0{,}858$ erhielt, während eine frühere, leider nicht sichere Beobachtung $g = 0{,}825$ geliefert hatte.

Es scheint besser zu sein, mehr als drei Umkehrpunkte zu beobachten; doch wurde bei dieser Untersuchung der Conformität wegen davon ganz abgesehen.

Hieraus ergab sich:

$$g_3 = \frac{F_1 g_2 - F_2 g_1}{F_1 - F_2} = 0{,}76,$$

welches $F_3 = +0{,}549$ nach sich zog. Wurde g_3 und g_2 combinirt, so erhielt man $g_4 = 0{,}7838$ und ebenso durch Combination von g_3 und $g_1 \ldots g_5 = 0{,}8147$, das Mittel aus g_4 und g_5 liefert schliesslich $g = 0{,}7993$; dieser Werth fällt fast ganz mit dem nach den älteren Verfahren gewonnenen $g = 0{,}7998$ zusammen.

Bei der Berechnung von P ist natürlich nur eine ungefähre Kenntnis des h nothwendig.

Die Resultate der Versuche und Rechnungen, wie sie mit der aus zehn Elementen bestehenden Drahtverbindung ausgeführt wurden, sind nachstehend angegeben, wobei die Operation des Ausdehnens mit A, die des Zusammenziehens mit Z bezeichnet wurde und der mittlere Widerstand $r = 4.52$ S.-E. war.

14. December 1887.

$$h = 0{,}03523,\ T = 7{,}33,\ \frac{2nh}{m} = 0{,}036,\ g = 0{,}7724,\ g^2 = 0{,}5966,$$

$$g^3 = 0{,}4609,\ \log k = 0{,}31709,\ \frac{1}{k} = 0{,}4818,\ \frac{1}{k^2} = 0{,}2322,$$

$$\log \frac{C}{m} = \log (x_1 - x_2) - 0{,}96095 + 1,\ E = 27463.$$

Dieser letztere Werth wurde erhalten, indem ein Stück Draht der gleichen Sorte mit seiner Löthstelle in schmelzendes Eis gebracht wurde, während die übrigen Stellen die Temperatur der Luft hatten. Zugleich wurde der Widerstand gemessen, alles gehörig reducirt und das schliessliche Resultat mit 10 multiplicirt.

	A	Z	A	Z	A	Z	A	Z	A	Z	A	Z
$x_1 - x_2$	46,2	44,9	47,9	46,9	46,8	46,9	52,0	47,9	50,1	46,8	48,0	46,5
$x_1 - x_3$	37,0	34,2	38,1	35,8	35,8	36,8	40,9	36,1	39,0	34,8	37,7	35,7
$X_1 - X_2$	36,2	35,1	37,4	36,7	36,7	36,7	40,6	37,4	39,2	36,7	37,6	36,4
$X_1 - X_3$	20,7	18,3	21,2	19,2	19,2	20,2	22,5	19,2	21,3	18,2	20,7	19,2
$\frac{k}{k+1}(X_1 - X_3)$	24,4	23,6	25,1	24,7	24,7	24,7	27,3	25,1	26,4	24,7	25,4	24,6
$\frac{k^2}{k^2-1}(X_1 - X_3)$	27,0	23,8	27,7	25,0	25,0	26,3	29,4	25,0	27,8	23,7	27,0	25,0
Mittel	25,7	23,7	26,4	24,8	24,8	25,5	28,3	25,1	27,1	24,2	26,2	24,8
1. Ausschlag	74,9	76,2	78,0	78,5	76,2	76,3	78,5	81,1	77,3	78,3	75,4	75,4
X	49,2	52,5	51,6	53,7	51,4	50,8	50,2	56,0	50,2	54,1	49,2	50,6
ϑ	0,1048	0,1119	0,1099	0,1144	0,1095	0,1082	0,1070	0,1193	0,1070	0,1153	0,1048	0,1078

woraus als Mittelwerth $\vartheta = 0{,}1101$ resultirt.

Dieser Werth von ϑ wurde in die Thomson'sche Formel für das mechanische Wärmeäquivalent d. i. in die Gleichung:

$$A = \frac{(273 + \tau)\,\alpha P}{w \cdot c \cdot \vartheta}$$

gesetzt, worin bedeuten:

$P = 16{,}3$ kg den angewandten Zug,

$\tau = 17{,}6$ die Temperatur,

$c = 0{,}113$ die specifische Wärme, w das Gewicht der Längeneinheit (163,8 mm wiegen 1,705 g) und

$\alpha = 0{,}00001156$ den linearen Ausdehnungscoefficienten des Drahtes;

die beiden Grössen α und c wurden den verlässlichsten Tabellen entnommen und kommen auch bei Haga (a. a. O. 18), der sie direct bestimmte, vor.

Hiermit ergab sich:

$$A = 422{,}8$$

wodurch bewiesen ist, dass die angewandte Drahtverbindung sich auch zur quantitativen Bestimmung von A eignet; man erkennt auch, dass eine grössere Genauigkeit in der Bestimmung von A mit entsprechenden Mitteln wohl zu erreichen ist.

Die angegebene Vorrichtung erweist sich auch dann als nützlich, wenn der Einfluss der Magnetisirung, der Torsion oder anderer Factoren auf die erwähnten Temperaturänderungen untersucht werden soll.

So wurden z. B. die Temperaturänderungen eines aus vier Elementen bestehenden Eisendrahtes sowohl im unmagnetischen wie auch im magnetischen Zustande bestimmt; die verhältnismäsig starke Magnetisirung wurde dadurch erreicht, dass ein aus drei Theilen bestehender langer und starker Magnetstab parallel zu den vier Drähten in einer Entfernung von 16 mm (vom unteren Rande an) in zwei verschiedenen Stellungen gelegt wurde. Die Drahtverbindung nebst den Magneten befand sich in grosser Entfernung (über 10 m) von dem Galvanometer in einem zweiten Zimmer und konnte eine merkliche Widerstandsänderung oder eine solche der Schwingungsdauer infolge der Magnetisirung nicht nachgewiesen werden.

Es wurde erhalten:

$$h = 0{,}0304, \quad T = 7{,}35, \quad \log k = 0{,}33365$$

$$\frac{1}{k} = 0{,}4638, \quad \frac{1}{k^2} = 0{,}2151, \quad \frac{2nh}{m} = 0{,}0328$$

$$g = 0{,}7998, \quad g^2 = 0{,}6397, \quad g^3 = 0{,}5116$$

$$\log \frac{C}{m} = \log (x_1 - x_3) = 0{,}9352 + 1.$$

Für E wurde, da es sich nur um relative Werthe handelte, die frühere Zahl genommen und r war gleich 3,111 S.-E.

	Ohne Magnet		Nordpol nach Norden				Südpol nach Norden				Ohne Magnet	
	A	Z	A	Z	A	Z	A	Z	A	Z	A	Z
1. Ausschlag	62,0	61,4	62,5	62,3	62,2	61,6	64,1	62,3	63,3	62,5	61,7	61,4
$x_1 - x_2$	41,0	38,6	40,7	39,0	40,5	38,6	41,1	39,6	40,6	39,7	39,9	39,0
$x_3 - x_2$	8,3	8,1	8,5	8,1	8,3	8,5	9,3	8,5	8,8	8,4	8,2	7,9
$X_1 - X_2$	32,3	30,4	32,0	30,6	31,9	30,4	32,4	31,1	32,0	31,2	31,4	30,6
$X_1 - X_3$	18,4	16,7	18,0	17,2	18,0	16,6	17,4	17,2	17,6	17,4	17,7	17,4
$\frac{k}{k+1}(X_1 - X_3)$	22,1	20,8	21,9	20,9	21,8	20,8	22,1	21,3	21,9	21,3	21,5	20,9
$\frac{k^2}{k^2-1}(X_1 - X_3)$	23,5	21,3	22,9	21,9	22,9	21,2	22,2	21,9	22,4	22,2	22,6	22,2
Mittel	22,8	21,05	22,4	21,4	22,35	21,0	22,15	21,6	22,15	21,75	22,05	21,55
X	39,2	40,3	40,1	40,9	39,8	40,6	41,9	40,7	41,1	40,7	39,6	39,8
ϑ	0,1110	0,1142	0,1136	0,1159	0,1128	0,1150	0,1187	0,1153	0,1164	0,1153	0,1122	0,1128
Mittl. Werthe	0,1126		0,1148		0,1139		0,1170		0,1159		0,1125	

Die Temperaturänderungen stiegen also durch Magnetisiren im Mittel von: 0,1126 auf 0,1154, d. i. rund um 2½ %.

Man könnte einwenden, dass durch das Magnetisiren selbst die thermoelektrische Eigenschaft des Eisens verändert werde. Das ist nun allerdings der Fall, indem bekanntlich der Thermostrom beim Magnetisiren vom besseren (unmagnetischen) zum schlechteren (longitudinal magnetisirten) Leiter fliesst; es zeigt indes die Rechnung unter Zugrundelegung der von Struhal und Barus (Wied. Ann. Bd. 15) erhaltenen Zahlen, dass hierdurch in dem obigen Falle nur eine Aenderung von ⅙ % eintreten könnte.

Es wurden auch vier Elemente gegen andere vier weit entfernte geschaltet und die ganze Vorrichtung gedehnt, während die ersten vier Drähte einmal unmagnetisch waren und ein andermal magnetisirt wurden. Als Mittelwerthe der noch auftretenden Ausschläge wurden gefunden:

Unmagnetisch . . .	2,75,	2,80,	2,80,	daher Mittel 2,78
Pol S nach Norden .	3,10	2,95	3,30	„ „ 3,12
„ N „ „ .	3,60	3,35	3,90	„ „ 3,62
Entmagnetisirt . .	3,05	3,05	2,80	„ „ 2,97

Die Magnetisirung erhöht demnach bei stärkeren magnetisirenden Kräften, wie dies schon 1883 (Sitzungsber. d. k. Akad. Bd. 87 S. 91) behauptet wurde, die Temperaturänderungen beim Dehnen oder Zu-

sammenziehen. Wie dort nachgewiesen wurde, ist nämlich die Abkühlung eines Drahtes, der unter dem Einflusse der magnetisirenden Kraft x das Moment μ per Milligramm aufweist, gegeben durch:

$$\frac{dT}{dP} = -\frac{T}{C}\left[\frac{dl}{dT} - x \cdot \frac{d\mu}{dP}\right].$$

Es liess sich nun experimentell zeigen, dass in dem vorliegenden Falle wirklich $\frac{d\mu}{dP}$ negativ wurde, d. h. dass der Magnetismus mit der Dehnung abnahm. Zu dem Ende wurde über einen der Eisendrähte (unter der Mitte des Magnetstabes) eine kleine mit einem astasirten Galvanometer verbundene Inductionsrolle gesteckt und die Ausschläge beim Dehnen und Zusammenziehen beobachtet; der Hauptkreis, der den Eisendraht enthielt, war dabei offen. War der gerade Magnet entfernt, so zeigte sich gar kein Ausschlag; wurde er wieder in der obigen Entfernung (von 16 mm) hingelegt, so lieferte die Aenderung des Magnetismus die Ausschläge:

$$(A): -4{,}2, \quad (Z): +1{,}3$$

und hierauf constant:

$$(A): -1{,}1, \quad (Z): +1{,}1,$$

wo ein Minuszeichen ein Sinken der Zahlen andeutet.

Durch Herausziehen eines magnetischen Stahldrahtes aus der Rolle liess sich nun in der That nachweisen, dass ein Sinken der Zahlen einer Schwächung des Magnetismus entsprach. Die Ausdehnung (A) des magnetisirten Drahtes war demnach mit einer Verminderung und das Zusammenziehen (Z) mit einer Vermehrung des Magnetismus verbunden oder es war in der That $\frac{d\mu}{dP}$ in beiden Fällen negativ. Die Theorie verlangte demnach eine Erhöhung der Temperaturänderungen, wie es qualitativ durch den obigen Versuch auch bestätigt wurde. In einer späteren Untersuchung soll auch der Nachweis der quantitativen Uebereinstimmung angestrebt werden; hier handelte es sich in erster Linie darum, die Brauchbarkeit der angegebenen Drahtverbindung nachzuweisen.

Ueber die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten.

Von

K. Fuchs.

In einem Aufsatze über die Verdampfung und in einem zweiten Aufsatze über den Zusammenhang von Oberflächenspannung, Oberflächendichte und oberflächlicher Wärmeentwicklung ist gezeigt worden, dass die Capillaritätsconstanten oder Molecularfunctionen für nicht homogene Flüssigkeiten sich leicht berechnen lassen, wenn wir das Princip der Elementarkräfte anwenden, d. h. wenn wir annehmen, dass die Anziehungskraft, welche ein Molekül μ auf die umgebenden Moleküle ausübt, die Summe von unendlich vielen ineinander eingeschachtelten Elementarkräften ist, deren jede nur über eine unendlich kleine Strecke von einem r bis $r + dr$ mit der in deren Intervall constanten Intensität $k_r = \mu f(r)$ auf die Masseneinheit wirksam ist. Wir wollen im folgenden dieses Princip der Elementarkräfte auf die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten anwenden. (Hierbei wird es sich allerdings als zweckmässig erweisen, die Cardinalbegriffe in allgemeinerer Form, nicht mit der Beschränkung auf nur zwei Flüssigkeiten zu entwickeln.)

Wir nehmen an, dass in einem homogenen Medium B (Fig. 1) sich eine Kugel einer homogenen Flüssigkeit A mit dem Centrum 0 befindet, und dass die beiden Flüssigkeiten sich durch Diffussion zu mischen beginnen. Die Schichten gleicher Mischung bilden dann concentrische Kugelschalen. Zwischen den Radien R_i und R_e ist die Flüssigkeit gemischt; innerhalb R_i befindet sich reines A, ausserhalb R_e aber reines B. In einer gewissen Entfernung R von O ist die Flüssigkeit derart gemischt, dass die Volumeneinheit derselben von A das Volumen s_1, von B das Volumen s_2 enthält. Es ist also $s_1 + s_2 = 1$. Wir können s_1 und s_2 die Concentrationen der Flüssigkeiten nennen. Wenn ϱ_1 die Dichte des reinen A, ϱ_2 aber die Dichte des reinen B ist, dann enthält die Volumeneinheit der Mischung an einer bestimmten Stelle von A die Masse $\mu_1 \varrho_1$, von B aber die Masse $\mu_2 \varrho_2$. Die Mischungscurve erstreckt sich böschungsartig von R_i bis R_e und zeigt irgendwo zwischen R_i und R_e bei R^0

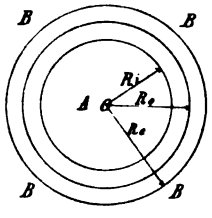


Fig. 1.

einen Wendepunkt. Die Flüssigkeiten mit der Mischungsschicht lassen sich also graphisch zur Darstellung bringen etwa wie in Fig. 6 oben von R_1 bis R_2, oder in Fig. 7. Die stark gezeichnete Curve ist die Mischungscurve.

Die Füllungsmasse.

Es sei μ (Fig. 2) ein Massenpunkt (oder wie man sagen könnte: ein mathematisches Molekül) der Flüssigkeit A. Er besitze eine Elementarkraft, welche von r bis $r + dr$ mit constanter Intensität wirksam ist. Die Kugelschale, welche zwischen r und $r + dr$ liegt, heisse die Wirkungsschale der Elementarkraft. Die Elementarkraft sei eine Anziehung, welche μ auf die Moleküle von der Flüssigkeit B ausübt. Die Intensität, mit der μ die Masseneinheit von B anzieht, sei

$$k_r = \mu f(r).$$

Die Dicke dr der Wirkungsschale heisse die Amplitude der Elementarkraft, und das Product $f(r)\,dr$ heisse das Moment der Elementarkraft. Die kugelförmige Masse von B, welche durch die Wirkungsschale von μ umschlossen wird, und die Wirkungssphäre, d. i. den von der Wirkungsschale umschlossenen Kugelraum ausfüllt, nennen wir die Füllungsmaasse, speciell die Füllungs-B-Masse der Elementarkraft von μ. Im allgemeinen wird die Dichte von B an jedem Punkte der Füllungsmasse eine andere sein. Wir können dann durch die Füllungsmasse die Niveauflächen gleicher Dichte legen, d. h. die Füllungsmasse in Schichten gleicher Dichte zerfällen. Im Falle einer sphärischen Mischungsschicht sind diese Lamellen concentrische Kugelschalen. Für diesen Fall wollen wir einen allgemeinen Ausdruck für die Füllungsmasse suchen.

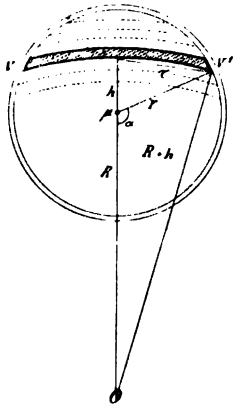


Fig. 2.

Es sei R die Entfernung des μ vom Krümmungscentrum o, und bei μ sei die Dichte von B gleich η. Dann ist die Dichte η_h von B in der Entfernung $R + h$ gleich

$$\eta_h = \eta + h\eta' + \frac{1}{2}h^2\eta'' + \ldots$$

Um die ganze Füllungsmasse berechnen zu können, brauchen wir einen Ausdruck für das Volumen und die Masse einer Lamelle $\nu\nu'$ der Füllungsmasse. Die Basalcalotte derselben ist bekanntlich $\tau^2\pi$, wenn τ die vom Centrum nach dem Umfang gezogene Sehne ist. Den Werth von τ

finden wir aber, wenn wir nach dem Carnot'schen Lehrsatze erst τ aus $\Delta c s \zeta$, dann $R + h$ aus $\Delta c o \zeta$ berechnen, und dann α eliminiren. Wir erhalten dann

$$\tau^2 = (r^2 - h^2)\left(1 + \frac{h}{R}\right).$$

Wenn wir noch obigen Werth für y_h in Anwendung bringen, dann finden wir durch eine leichte Integration von $h = -r$ bei $h = +r$ die Füllungsmasse vom Radius r

$$M_r = \frac{4}{3}\pi r_3 \eta + \frac{4}{15}\pi r^5 \frac{1}{R}\eta' + \frac{2}{15}\pi r^5 \eta'' + \ldots \qquad (1$$

Wir werden sofort sehen, welche Dienste uns der Begriff der Füllungsmasse in der Berechnung der Molecularkräfte leistet.

Das Potential der Molecularkräfte in einer nicht homogenen Mischung mehrerer Flüssigkeiten.

Denken wir uns eine nicht homogene Mischung mehrerer Flüssigkeiten A, $B \ldots N$. Die Molecularkräfte leisten eine gewisse Arbeit, wenn wir die in einem Punkt concentrirt gedachte Massseneinheit e_1 einer Flüssigkeit E an einem bestimmten Punkt o der Mischung aus unendlicher Entfernung einführen. Diese Arbeit der Molecularkräfte nennen wir das Potential der Flüssigkeitsmischung an jenem Punkte nach der Flüssigkeit E. Wir berechnen das Potential, indem wir der E-Masse zunächst nur eine Elementarkraft vom Radius r zuschreiben. Das Gesetz der Anziehung zwischen den zwei Flüssigkeiten E und etwa C sei $f_{ce}(r)$. Dann nimmt e_1 bei seiner Einführung in o von C die Füllungsmasse M_c in seine Wirkungssphäre auf. Jede Masseneinheit von M_c wird dann durch die Masseneinheit e_1 mit der Intensität $1 \cdot 1 \cdot f_{ec}(r)$ über die Strecke dr gezogen und die Anziehungskraft von e_1 leistet hierbei die Arbeit

$$f_{ce}(r)\, dr,$$

welche nichts anderes ist, als das Moment der Elementarkraft k_{ce}. Die Elementarkraft k_{ce}, welche zwischen C und E wirksam ist, leistet also bei der Einführung von e_1 im ganzen die Arbeit

$$M_c f_{ce}(r)\, dr$$

welche das Product der Füllungsmasse und des entsprechenden Molecularmomentes ist. Analog liefert die Flüssigkeit A das Partialpotential

$$M_a f_{ae}(r)\, dr$$

und das Potential der Mischung ist in o noch E gleich

$$P_e = \sum_{c=a}^{c=n} M_c f_{ce}(r)\, dr. \qquad (2$$

Um das Potential für die vollen Anziehungskräfte zu erhalten, haben wir dann noch nach r zu integriren.

Die Bildungsarbeit einer nicht homogenen Mischung mehrerer Flüssigkeiten.

Die Bildungsarbeit einer Flüssigkeitsmischung ist die Arbeit, welche die Molecularkräfte leisten, wenn die Moleküle aus unendlicher Zerstreuung zur in Rede stehenden Mischung zusammentreten. Wir berechnen zunächst die Bildungsarbeit eines um den Punkt o geschlagenen Volumelementes dv. Nach den einleitenden Bemerkungen enthält es folgende Massen

$$\begin{aligned} &\text{von } A\text{: } \varrho_a s_a \, dv \\ &\text{von } B\text{: } \varrho_b s_b \, dv \\ &\quad \ldots \quad \ldots \\ &\text{von } N\text{: } \varrho_n s_n \, dv. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet s_e das Volumen der Flüssigkeit E, welches in der Volumeinheit der Flüssigkeitsmischung enthalten ist. Es ist also

$$\sum_{e=a}^{e=n} s_e = s_a + s_b + \ldots + s_n = 1.$$

Wenn wir die Bedeutung des Potentiales P_e vor Augen behalten, dann ist die Einführungsarbeit der Masse $\varrho_e s_e dv$ in die fertige Flüssigkeit gleich

$$\varrho_e \, s_e \, P_e \, dv$$

und die Einführungsarbeit der ganzen in dv eingeschlossenen Flüssigkeitssumme ist gleich

$$\sum_{e=a}^{e=n} \varrho_e \, s_e \, P_e \, dv. \qquad (3$$

Die Gesammtbildungsarbeit finden wir, wenn wir diesen letzten Ausdruck für jedes einzelne dv bestimmen und dann summiren. Da wir aber hierbei die Anziehung je zweier Moleküle μ_1 und μ_2 doppelt gerechnet haben, indem einmal μ_1 in seinem dv, μ_2 aber in der Füllungsmasse, ein zweitesmal aber μ_2 in seinem dv, μ_1 aber in der Füllungsmasse liegend gerechnet worden ist, so haben wir schliesslich die Hälfte des erhaltenen Werthes zu nehmen.

Mit Rücksicht auf spätere Entwicklungen sei hier noch einfach Folgendes constatirt. Wenn wir die angeführte A-Masse $\varrho_a s_a dv$ nur auf die Flüssigkeit E wirkend denken, dann ist die Einführungsarbeit obiger Masse

$$[\varrho_a \, s_a \, M_e \, f_{ae}(r) \, dr] \, dv \qquad (4$$

da P_e sich auf ein einziges Glied reducirt.

Die Bildungsarbeit[1]) einer homogenen Mischung zweier Flüssigkeiten.

Wir berechnen dieselbe zunächst nur darum, um die bisherigen abstracten Formeln an einem einfachen Beispiele klar zu machen. Es soll von A das Volumen u, von B das Volumen v zu einer nicht contrahirten Mischung vom Volumen $u+v$ vereint worden sein. Ein Volumelement dw der Mischung enthält die Massen

$$\text{von } A\colon\ \mu_a = \varrho_a s_a\, dw$$
$$\text{von } B\colon\ \mu_\beta = \varrho_b s_b\, dw.$$

Nun ist aber

$$s_a = \frac{u}{u+v} \qquad s_b = \frac{v}{u+v}$$
$$s_a + s_b = 1.$$

Die Füllungsmassen für eine Elementarkraft vom Radius r sind

$$M_a = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_a s_a$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\varrho_a u}{u+v}$$
$$M_b = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\varrho_b v}{u+v}.$$

Die Einführung von μ_a liefert die Moleculararbeiten
nach M_a: $\mu_a M_a f_{aa}(r)\, dr$,
nach M_b: $\mu_a M_b f_{ab}(r)\, dr$.

Die Einführung von μ_b liefert die Moleculararbeiten
nach M_a: $\mu_b M_a f_{ab}(r)\, dr$,
nach M_b: $\mu_b M_b f_{bb}(r)\, dr$.

Nach Substitution der Werthe finden wir als Arbeit, die durch die Einführung von dw geleistet wird

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{(u+v)^2}\Big[\varrho_a^2 u^2 f_{aa}(r)\, dr + \varrho_b^2 v^2 f_{bb}(r)\, dr + 2\varrho_a \varrho_b u v f_{ab}(r)\, dr\Big] dw$$

Um die Bildungsarbeit für alle Elementarkräfte zusammengenommen zu erhalten, müssen wir nach r integriren. Wir wollen nun folgende Abkürzungen einführen:

$$\alpha_3 = \int_0^\infty r^3 f_{aa}(r)\, dr \qquad \beta_3 = \int_0^\infty r^3 f_{bb}(r)\, dr \qquad \gamma_3 = \int_0^\infty r^3 f_{ab}(r)\, dr.$$

Da α, γ und β die dritte Potenz von r enthalten, wollen wir sie die dritten Molecularconstanten der Cohäsion von A (α), der

1) Gewöhnlich spricht man von der negativ genommenen Bildungsarbeit und nennt sie Disgregationsarbeit.

Cohäsion von B (β) und der Adhäsion von A und B (γ) nennen. Wir wollen ferner abgekürzt schreiben

$$a = \frac{2}{3}\pi \varrho_a^2 \alpha_3$$

$$b = \frac{2}{3}\pi \varrho_b^2 \beta_3$$

$$c = \frac{2}{3}\pi \varrho_a \varrho_b \gamma_3.$$

Dann erhalten wir als Einführungsarbeit von dw den Werth

$$\left[\frac{2u^2 a}{(u+v)^2} + \frac{2v^2 b}{(u+v)^2} + \frac{4uvc}{(u+v)^2}\right] dw.$$

Wenn wir wegen der oben erklärten Doppelzählung die Hälfte dieses Werthes nehmen, dann erhalten wir als Bildungsarbeit der Volumeinheit

$$B = s_1^2 a + s_2^2 b + 2 s_1 s_2 c \qquad (5$$

wobei wir der Einfachheit wegen s_1 und s_2 statt s_a und s_b geschrieben haben. Wir können s_1 und s_2 die Concentrationen von A und B nennen.

Wärmeproduction durch homogene Mischung zweier Flüssigkeiten [1]).

Die Bildungsarbeit der Volumeinheit von reinem A ist leicht gefunden. Der Volumwerth dv von reinem A enthält die Masse $\varrho_1 dv$. Die Füllungsmasse einer Elementarkraft ist

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1.$$

Die Einführungsarbeit von dv ist also

$$\frac{4}{3}\pi \varrho_1^2 dv r^3 f_{aa}(r) dr.$$

Für alle Elementarkräfte zusammengenommen resultirt hieraus (wenn wir die nothwendige Halbirung vornehmen)

$$\frac{2}{3}\pi \varrho_1^2 \alpha = a.$$

Analog ist die Bildungsarbeit für die Volumeinheit von B gleich

$$b = \frac{2}{3}\pi \varrho_2^2 \beta.$$

---

1) Dem Titel der Arbeit entsprechend sollten wir eigentlich die Wärmeproduction in einer Mischungsschicht berechnen. Da diese aber keinen praktischen Werth hat, so betrachten wir das Endresultat der Diffusion, d. h. die homogene Mischung.

Vor der Mischung involvirt das Volumen u von reinem A die Arbeit ua, das Volumen v von reinem B die Arbeit vb. Nach der Mischung involvirt das Gesammtvolumen $u + v$ die oben berechnete Arbeit (Formel 5, multiplicirt mit $u + v$)

$$(u + v)(s_1^2 a + s_2^2 b + 2 s_1 s_2 c). \qquad (5a$$

Wenn wir von dieser Arbeit die ursprünglichen Arbeiten $ua + vb$ abziehen, so erhalten wir den Arbeitsgewinn, der aus der Mischung resultirt. Wir finden sehr leicht den Arbeitsgewinn

$$-\frac{uv}{u+v}(a + b - 2c)$$
$$= -s_1 s_2 (a + b - 2c)(u + v).$$

Wenn W das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ist, dann ist die Wärme, welche durch die homogene Mischung zweier Flüssigkeiten gewonnen wird, pro Volumeinheit uncontrahirter Mischung:

$$w = -W s_1 s_2 (a + b - 2c) \qquad (6$$
$$= -2 W s_1 s_2 \left(\frac{a+b}{2} - c\right).$$

Die Formel besagt: Durch die Mischung zweier Flüssigkeiten wird Wärme producirt, wenn die Adhäsionsconstante c grösser ist, als das arithmetische Mittel der beiden Cohäsionsconstanten a und b. Im entgegengesetzten Falle erfolgt die Mischung unter Kälteentwicklung. Die Wärmeentwicklung ist proportional dem Producte der Concentrationszahlen der gemischten Flüssigkeiten, also am grössten, wenn die Flüssigkeiten zu gleichen Volumtheilen gemischt sind. Sie ist ferner proportional der Abweichung der Adhäsionsconstanten vom Mittel der Cohäsionen.

Wir haben bisher keine Contraction der Flüssigkeitsmischung angenommen. Nehmen wir nun an, dass die Flüssigkeiten sich bei der Mischung vom Gesammtvolumen V_1 auf das Gesammtvolumen $V_2 = V_1 (1 - \xi)$ contrahirt. Wie gross ist dann die Bildungsarbeit der Mischung? Wir schliessen folgendermaassen. Wenn eine Flüssigkeit n-mal dichter wird, dann können wir die Sache so auffassen, dass jedes Molekül n-mal mehr Masse erhalten hat. Dann haben aber je zwei Moleküle bei der Bildung der Flüssigkeit eine n^2-mal grössere Molecular arbeit geleistet, und die Bildungsarbeit der Flüssigkeit ist pro Volumeinheit n^2-mal grösser geworden. Wir können also die Bildungsarbeit einer homogenen Flüssigkeit, mag sie einfach oder gemischt sein, darstellen als $\varrho^2 A$, wo ϱ die Dichte ist. Dann ist die Bildungsarbeit der Volumarbeit vor der

Contraction $\varrho_1^2 A$, nach der Contraction aber $\varrho_2^2 A$. Wenn also das Gesammtvolumen vor der Contraction gleich $(u+v)$, nach der Contraction aber $(u+v)(1-\xi)$ war, dann war die Gesammtbildungsarbeit vor der Contraction $(u+v)\varrho_1^2 A$, nach der Contraction aber $(u+v)(1-\xi)\varrho_2^2 A$. Man findet also die Gesammtbildungsarbeit nach der Contraction, wenn man die Gesammtbildungsarbeit nach der Contraction mit $(1-\xi)\varrho_2^1 : \varrho_1^2$ multiplicirt. Nun ist aber offenbar $\varrho_2 : \varrho_1 = V_1 : V_2 = V_1 : V_1(1-\xi) = 1:(1-\xi)$, und also $\varrho_2^2 : \varrho_1^2 = 1:(1-\xi)^2$. Hieraus ersieht man, dass man statt mit obigem Quotienten zu multipliciren eigentlich nur mit $(1-\xi)$ zu dividiren hat. Wenn also die Bildungsarbeit der Mischung vor der Contraction durch Formel 5a gegeben ist, so ist sie nach der Mischung $(1-\xi)$-mal kleiner. Wenn wir im so gewonnenen Ausdruck die Werthe von s_1 und s_2 einsetzen und die Bildungsarbeiten der Volumina u und v von reinem A und B abziehen, so erhalten wir den Arbeitsgewinn durch contrahirte Mischung zweier Flüssigkeiten. Wenn wir nun mit W multipliciren, erhalten wir die entwickelte Wärmemenge. Diese ist also

$$W\left[\frac{u^2 a + v^2 b + 2uvc}{(u+v)(1-\xi)} - (ua + vb)\right]$$

Dies ist also die Wärmemenge, welche entwickelt wird, wenn die Volumina u und v der Flüssigkeiten A und B gemischt werden und ξ der Contractionscoefficient ist.

Der Binnendruck im Innern einer nicht homogenen Mischung mehrerer Flüssigkeiten.

Es sei μ_e (Fig. 3) ein Molekül der Flüssigkeit E, welches mit einer Elementarkraft begabt ist, vermöge deren es die Flüssigkeit C anzieht. Welchen Binnendruck erzeugt μ_e in einem Punkte o, welcher innerhalb seiner Wirkungssphäre liegt?

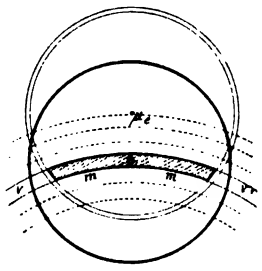


Fig. 3.

Wir zerlegen C in Lamellen gleicher Dichte. Wenn die Mischung im Gleichgewicht ist, dann können wir uns denken, dass zwischen je zwei Lamellen eine feste Wand gelagert ist. Dann schneidet die Wirkungsschale von μ_e aus jeder Lamelle, die es erreicht, eine Scheibe aus, welche durch einen Ring der Wirkungsschale von der Dicke dr eingefasst ist. Die in diesem Ring gelegene C-Flüssigkeit wird pro Masseneinheit von μ_e mit der Kraft

$$\mu_e f_{ec}(r)$$

angezogen, und übt auf die Flächeneinheit der Mantelfläche einer Scheibe (etwa der Scheibe m, in welcher der Punkt o liegt) einen Druck aus, der gleich

$$\mu_e \varrho_c s_e f_{oc}(r)\, dr$$

ist, wenn ϱ_c die Dichte des reinen C ist, s_c aber die Concentration von C in der Lamelle $\nu\nu^1$ ist (d. h. das Volumen des C, welches in der Volumeinheit von $\nu\nu^1$ enthalten ist). Es bedeutet also $\varrho_c s_c$ die Dichte von C in $\nu\nu^1$. Wir erhalten aus obiger Formel den Satz: Der Binnendruck, den ein Molekül μ_e in einem Punkte o vermöge einer Elementarkraft erzeugt, ist gleich dem Producte der Masse μ_e, der Dichte der angezogenen Flüssigkeit in o und dem Momente der Elementarkraft.

Durch die Wirkung auf alle n-Flüssigkeiten der Mischung erzeugt μ_e in o einen Druck gleich

$$\mu_e \sum_{c=a}^{c=n} \varrho_c s_c f_{oc}(r)\, dr.$$

Diesen Druck erzeugt in o jedes einzelne Molekül μ_e, in dessen Wirkungssphäre der Punkt o liegt, dessen Entfernung von o also kleiner ist, als r. Alle diese μ_e zusammengenommen bilden aber die Füllungsmasse M_e einer mit dem Radius r um o geschlagenen Kugel. Der Binnendruck, den die Flüssigkeit E im Punkte o erzeugt, ist also vermöge der Wirkung auf C allein gleich

$$M_e \varrho_c s_c f_{oc}(r)\, dr \tag{7}$$

und vermöge der Wirkung auf alle Flüssigkeiten gleich

$$M_e \sum_{c=a}^{c=n} \varrho_c s_c f_{oc}(r)\, dr.$$

Der Binnendruck, den nicht E allein, sondern alle Flüssigkeiten zusammen in o erzeugen, ist

$$\sum_{e=a}^{e=n} M_e \sum_{c=a}^{c=n} \varrho_c s_c f_{oc}(r)\, dr. \tag{8}$$

Wir haben abermals die Hälfte des Schlusswerthes zu nehmen, da abermals die Anziehung je zweier Moleküle doppelt gerechnet worden ist. Die Wirkung der vollen Kräfte finden wir durch Integration von $r = o$ bis $r = \infty$ oder von $r = r_1$ bis $r = r_2$, wenn r_1 und r_2 die kleinste und grösste Entfernung sind, in der eine Molecularkraft noch wirksam ist.

Der folgende Abschnitt soll ein einfaches Beispiel auf Berechnung des Binnendruckes bieten.

Der Binnendruck im Inneren einer homogenen Mischung zweier Flüssigkeiten.

Für diesen Fall gilt

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \varrho_1 s_1$$

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 s_2.$$

Im Sinne des vorhergehenden Abschnittes ist der Druck, den A durch seine Wirkung auf A (also auf sich selbst) vermöge seiner Elementarkraft erzeugt, gleich

$$M_1 \varrho_1 s_1 f_{aa}(r)\, dr$$
$$= \frac{4}{3}\pi \varrho_1^2 s_1^2 r^3 f_{aa}(r)\, dr$$

und für alle Elementarkräfte zusammengenommen (wenn wir auch gleich halbiren)

$$\frac{2}{3}\pi \varrho_1^2 s_1^2 \int_n^{r_1} r^3 f_{aa}(r)\, dr$$
$$= \frac{2}{3}\pi s_1^2 \varrho_1^2 \alpha$$
$$= s_1^2 a.$$

Auf ganz analoge Weise finden wir den Druck, den A durch seine Wirkung auf B erzeugt, gleich

$$\int_n^{r_2} M_1 \varrho_2 s_2 f_{ab}(r)\, dr = s_1 s_2 c.$$

Der Druck, den B durch seine Wirkung auf A erzeugt, ist ebenfalls $s_1 s_2 c$, und der Druck, den B durch seine Wirkung auf sich selbst erzeugt, ist $s_2^2 b$. Somit haben wir alle vier Glieder berechnet, welche die Formel 8 für zwei Flüssigkeiten verlangt. Der Gesammtdruck in o ist also

$$p = s_1^2 a + s_2^2 b + 2 s_1 s_2 c. \qquad (9$$

Durch Differentiation finden wir, dass der Binnendruck sein Maximum erreicht, wenn

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{b - c}{a - c}.$$

Der Binnendruck einer homogenen Mischung zweier Flüssigkeiten ist also ein Maximum (Minimum), wenn die

Concentrationen der Flüssigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Ueberschüsse der Cohäsionen über die Adhäsion.

Falls die Mischung sich contrahirt, und ξ ist der Contractionscoefficient, gestaltet sich die Formel etwas anders. Die Eormel für den Binnendruck ist nämlich offenbar die Summe von unendlich vielen Gliedern von der Form (Formel 7)

$$M_e \varrho_e s_c f_{ec}(r)\, dr$$

wobei $\varrho_c s_c$ die Masse von der Flüssigkeit C bedeutet, welche sich in der Volumeinheit der in Rede stehenden Flüssigkeitsmischung befindet. Wenn nun Contraction eintritt, dann verwandelt sich

$$M_e \text{ in } \frac{M_e}{1-\xi}$$

und

$$\varrho_c s_c \text{ in } \frac{\varrho_c s_c}{1-\xi}$$

also aber Ausdruck in

$$\frac{M_e \varrho_c s_c f_{ec}(r)\, dr}{(1-\xi)^2}.$$

Hieraus ergibt sich aber aus Formel 9 der Binnendruck für die contrahirte Flüssigkeit:

$$p = \frac{u^2 a + v^2 b + 2uvc}{(u+v)^2 (1-\xi)^2}.$$

Binnendruck und Bildungsarbeit der Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten.

Die Bildungsarbeit (d. h. die Arbeit, welche die Molecularkräfte leisten, wenn die Flüssigkeitsmischung durch den Zusammentritt der Moleküle aus unendlicher Zerstreuung sich bildet), ist laut Formel 4 für je zwei Flüssigkeiten, die vermöge einer Elementarkraft aufeinander wirken, pro Volumeinheit (wenn wir die Halbirung wegen Doppeltzählung je zweier Elementarattractionen sogleich vornehmen und e statt a schreiben) für einen bestimmten Punkt o:

$$\frac{1}{2} \varrho_e s_e M_e f_{ee}(r)\, dr.$$

Der Binnendruck ist für ganz dieselben Bedingungen in o laut Formel 7 (wenn wir e und c vertauschen)

$$\frac{1}{2} \varrho_e s_e M_e f_{ee}(r)\, dr.$$

Die beiden Ausdrücke sind offenbar identisch. Da diese Identität für je zwei Flüssigkeiten gilt, so erhalten wir den Satz: Für einen bestimmten Punkt einer nicht homogenen Flüssigkeitsmischung ist der Binnendruck und die Bildungsarbeit pro Volumeinheit durch denselben Ausdruck gegeben. Wir wollen ihn das Volumpotential der Flüssigkeit für jenen Punkt nennen, im Gegensatz zum Massenpotential, welches sich auf die Einführung der Masseneinheiten bezieht. Im Sinne der Formel 8 setzt sich das Volumpotential für zwei Flüssigkeiten A und B aus folgenden vier Elementen zusammen

$$P_v = + \frac{1}{2} \varrho_1 s_1 M_1 f_{11}(r)\, dr$$
$$+ \frac{1}{2} \varrho_1 s_1 M_2 f_{12}(r)\, dr$$
$$+ \frac{1}{2} \varrho_2 s_2 M_1 f_{21}(r)\, dr$$
$$+ \frac{1}{2} \varrho_2 s_2 M_2 f_{22}(r)\, dr.$$

Laut Formel 1 ist

$$M_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \eta_1 + \frac{4}{15} \pi r^5 \frac{1}{R} \eta_1' + \frac{2}{15} \pi r^5 \eta_1''$$
$$M_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \eta_2 + \frac{4}{15} \pi r^5 \frac{1}{R} \eta_2' + \frac{2}{15} \pi r^5 \eta_2''.$$

Nun ist in unserem Punkte o die Dichte η_1 von A gleich $\varrho_1 s_1$ und $\eta_2 = \varrho_2 s_2$. Da ferner $s_1 + s_2 = 1$ ist, so ist $ds_2 = -ds_1$. Es ist somit

$$\eta_1 = \varrho_1 s_1 \qquad \eta_1' = \varrho_1 s_1' \qquad \eta_1'' = \varrho_1 s_1''$$
$$\eta_2 = \varrho_2 s_2 \qquad \eta_2' = -\varrho_2 s_1' \qquad \eta_2'' = -\varrho_2 s_1''.$$

Wenn wir all diese Werthe in dem Ausdruck für Pv einsetzen und dann noch r integriren, um das Volumpotential für alle Elementarkräfte zusammengenommen zu erhalten, dann finden wir einen sehr langen Ausdruck. Er lautet:

$$P_v = \frac{2}{3} \pi N_1 + \frac{2}{15} \pi \frac{1}{R} N_2 s_1' + \frac{1}{15} \pi N_2 s_1'' + \ldots$$

Hierbei ist:

$$N_1 = s_1^2 \varrho_1^2 \alpha_4 + s_2^2 \varrho_2^2 \beta_3 + 2 s_1 s_2 \varrho_1 \varrho_2 \gamma_3$$
$$N_2 = s_1 (\varrho_1^2 \alpha_5 - \varrho_1 \varrho_2 \gamma_5) - s_2 (\varrho_2^2 \beta_5 - \varrho_1 \varrho_2 \gamma_5).$$

Hierin wieder ist

$$\alpha_3 = \int_{r_1}^{r_2} r^3 f_{11}(r)\,dr \qquad \alpha_5 = \int_{r_1}^{r_2} r^5 f_{11}(r)\,dr$$

$$\beta_3 = \int_{r_1}^{r_2} r^3 f_{22}(r)\,dr \qquad \beta_5 = \int_{r_1}^{r_2} r^5 f_{22}(r)\,dr$$

$$\gamma_3 = \int_{r_1}^{r_2} r^3 f_{12}(r)\,dr \qquad \gamma_5 = \int_{r_1}^{r_2} r^5 f_{12}(r)\,dr.$$

In der Mischungsschicht sind nur die Grössen s_1 und s_2 variabel. Wenn wir alle constanten Grössen zu den Integraten hinzuschlagen, dann können wir kürzer schreiben

$$P_v = (s_1^2\,a + s_2^2\,b + 2\,s_1\,s_2\,c) + (s_1\,[\alpha - \gamma] - s_2\,[\beta - \gamma])\left(\frac{2}{R}s_1' + s_1''\right). \tag{10}$$

Die Curve des Binnendruckes in der Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten.

In unserer letzten Formel sind α, γ, β klein im Verhältnis zu a, b, c. Wir können daher für die Mischungsschicht den ersten Theil allein, d. i. dieselbe Formel anwenden, welche wir für eine homogene Mischung gefunden haben, nämlich

$$P_v = s_1^2\,a + s_2^2\,b + 2\,s_1\,s_2\,c \tag{11}$$

wobei a und b Constanten der Cohäsionen, c aber eine Constante der Adhäsion der beiden Flüssigkeiten ist.

Die Formel für den Binnendruck wird handlicher, wenn wir statt des Adhäsionsconstanten c deren Abweichung k vom Mittel der Cohäsionsconstanten einführen, so dass gilt

$$c = \frac{1}{2}(a+b) + k.$$

Durch diese Substitution erhalten wir ($s_1 + s_2 = 1$ gesetzt)

$$P_v = s_1\,a + s_2\,b + 2\,s_1\,s_2\,k. \tag{12}$$

Um leichter uns ausdrücken zu können, wollen wir für die Adhäsionsconstante eine passende Terminologie feststellen. Ein positives k (Abweichung der Adhäsionsconstanten vom Mittel der Cohäsionsconstanten) wollen wir Ueberadhäsion, ein negatives k aber Unteradhäsion nennen. Eine Adhäsion, die zwischen den beiden Cohäsionsconstanten liegt, soll mittelständige Adhäsion heissen. Ueber-

ständig nennen wir die Adhäsion, wenn sie grösser ist, als beide Cohäsionen, unterständig aber, wenn sie kleiner ist, als beide Cohäsionen. Die mittlere Adhäsion ist gleich dem Mittel der beiden Cohäsionen.

Bei mittlerer Adhäsion ($k = o$) ist der Binnendruck p

$$p = s_1 a + s_2 b.$$

An der inneren Grenze B_1 (Fig. 4) der Mischungsschicht, wo noch reines A sich befindet und $s_1 = 1$, $s_2 = o$ ist, ist $p = a$; an der

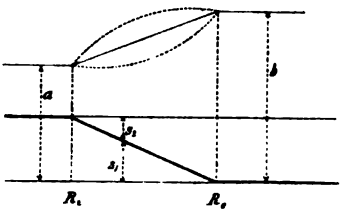


Fig. 4.

äusseren Grenze, wo schon reines B ist, und wo $s_1 = o$, $s_2 = 1$ ist, ist $p = b$. Für zwischenliegende Stellen gilt

$$\begin{aligned} p &= s_1 a + s_2 b \\ &= s_1 a + (1 - s_2) b \\ &= b + s_1 (a - b) \\ &= a + s_2 (b - a). \end{aligned}$$

Der Binnendruck wächst dann also von a an proportional der Contractionszunahme des B bis b. In der Figur ist die Mischungscurve der Anschaulichkeit wegen von R_i bis R_e als gerade Linie stark ausgezogen. Die Druckcurve ist dann in der Mischungsschicht ebenfalls eine gerade Linie, welche schwach ausgezogen ist.

Das dritte Glied ist in Formel 12 ist $+ 2 s_1 s_2 k$ oder $2 s_1 (1 - s_1) k$ — oder wenn wir setzen

$$s_1 = \frac{1}{2} + \sigma \qquad s_2 = \frac{1}{2} - \sigma$$

erhalten wir

$$p_k = + 2 s_1 s_2 k = 2 \left(\frac{1}{4} - \sigma^2 \right) k$$

oder

$$\sigma^2 k = \frac{1}{2} - p_k.$$

Der von k stammende Binnendruck p_k wird also durch einen Parabelpolbogen gegeben. Für die innere Mischungsgrenze R_i (oder

$\sigma = -\frac{1}{2}\Big)$ sowie für die äussere Mischungsgrenze $R_a\left(\sigma = +\frac{1}{2}\right)$ ist $p_k = o$. Seinen grössten Werth

$$p_k = \frac{1}{2}k$$

erreicht er bei $\sigma = o$, d. h. wo die Flüssigkeiten zu gleichen Theilen gemischt sind. In der Figur ist auf die gerade Curve, welche den Binnendruck charakterisirt, der den Cohäsionen entstammt, noch ein Parabelbogen nach oben aufgesetzt, der einem positiven k entspricht, und ein zweiter nach unten, entsprechend einem negativen k.

Wann wird der Binnendruck in der Mischungsschicht zwischen den Drucken a und b der reinen Flüssigkeiten A und B bleiben; wann wird er die Grenzen a oder b überschreiten? Dies zu bestimmen differenziren wir Formel 11 nach s_1 und finden:

$$\frac{dP_\sigma}{ds_1} = 2as_1 - 2bs_2 - 2c(s_2 - s_1) = 0$$

und hieraus

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{b-c}{a-c}. \qquad (13$$

Bei oberständigem c sind Zähler und Nenner negativ, also gibt es für s_1 und s_2 positive Werthe. Es gibt also bei oberständigem c in der Mischungsschicht eine Lamelle mit Maximaldruck, der grösser ist, als a und b. Wir finden auch leicht die Concentrationen für diese Lamelle, wenn wir in der letzten Formel s_2 durch $1 - s_1$ ersetzen. Wir finden dann

$$s_1 = \frac{b-c}{a+b-2c} \qquad s_2 = \frac{a-c}{a+b-2c}.$$

Bei unterständigem c sind in obigem Proportionalitätsausdruck 13 Zähler und Nenner positiv, und es gibt bei unterständigem c in der Mischungsschicht eine Lamelle mit Minimaldruck, der kleiner ist, als a und b. Aus Formel 13 ersieht man auch, dass die Maximumlamelle bei wachsendem c zuerst an der Grenzschicht der cohärenteren Flüssigkeit auftaucht, und bei weiter wachsendem c immer mehr nach der der Lamelle gleichen Concentrationen ($s_1 = s_2$) vorrückt. Bei sinkendem c taucht die Minimallamelle zuerst an der Grenzschicht der minder cohärenteren Flüssigkeit auf, und rückt bei weiter sinkendem c in das Innere der Mischungsschicht, um bei $c = o$ dort anzulegen, wo

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{b}{a}$$

gilt. Für den kleinsten möglichen Binnendruck (bei $c = o$) finden wir hieraus

$$s_1 = \frac{b}{a+b} \qquad s_2 = \frac{a}{a+b}$$

und wenn wir dies in Formel 11 einsehen, dann finden wir als kleinsten möglichen Binnendruck in der Mischungsschicht (für $c = o$):

$$\frac{ab}{a+b}$$

Wir ersehen hieraus, dass der minimale Binnendruck um so grösser ist, je gleicher a und b sind. Für $a = b$ ist der Minimalbinnendruck gleich $\frac{1}{2}a$.

In Fig. 5 ist eine natürlichere Mischungscurve (stark ausgezogen) gewählt. Dann ist I eine Druckcurve für mittelständige Adhäsion,

$$p = s_1^2 a + s_2^2 b + 2 s_1 s_2 c$$

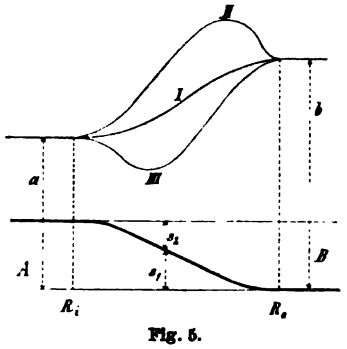


Fig. 5.

II für stärker oberständige, III für stärker unterständige Adhäsion.

Die Spannungen in der Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten.

Wir haben schon anfangs angenommen, dass die Mischungsschicht sphärisch ist. Betrachten wir nun in der Mischungsschicht eine sphärische Lamelle gleicher Mischung vom Radius R und der Dicke dh. Aus dieser Lamelle schneiden wir ein Band von der Breite = 1 und der Länge = l. Das Volumen dieses Bandes ist also $l\,dh$. Die Formel 10 liefert die Bildungsarbeit für die Volumeinheit. Die Bildungsarbeit unseres Bandes ist also

$$\begin{aligned} P_v\, l\, dh &= (s_1^2 a + s_2^2 b + 2 s_1 s_2 c)\, l\, dh \\ &\quad + (s_1[\alpha-\gamma] - s_2[\beta-\gamma])\left(\frac{2}{R}s_1' + s_1''\right) l\, dh \\ &= F l\, dh + \Phi\left(\frac{2}{R}s_1' + s_1''\right) l\, dh. \end{aligned} \qquad (14$$

Dieses Band verlängern wir nun um dl, ohne seine Breite zu ändern. Die Lamelle verdünnt sich dann, und aus dh wird

$$\left(1-\frac{dl}{l}\right)dh \text{ oder } \left(1-\lambda\right)dh.$$

Dieselbe Streckung nehmen wir aber auch mit allen Nachbarlamellen vor. Das hat zur Folge, dass die Mischungscurve contrahirt wird. Die Mischungscurve ist aber diejenige Curve, welche in jedem Punkte der Mischungsschicht (d. h. für jedes R) angibt, welche Concentration s_1 daselbst die Flüssigkeit A besitzt. (Für s_2 gilt dann bekanntlich $s_2 = 1 - s_1$). In dem Bande sei ursprünglich $s_1 = \sigma_0$. Dann ist in der Entfernung h vom Bande ursprünglich

$$s_1 = \sigma_0 + h\sigma_0' + \frac{1}{2}h^2\sigma_0'' + \ldots$$

Nach der Streckung der Lamellen wird aus jedem h nunmehr $h(1-\lambda)$ oder in der Entfernung h vom Bande herrscht nach der Streckung dieselbe Concentration s_1, welche vor der Streckung erst bei $h(1+\lambda)$ geherrscht hat. Für die Concentration s_1 in der Entfernung h nach der Streckung erhalten wir somit die Formel

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_0 + h(1+\lambda)\sigma_0' + \frac{1}{2}h(1+\lambda)^2\sigma_0'' + \ldots \\ &= \sigma_0 + h(1+\lambda)\sigma_0' + \frac{1}{2}h(1+2\lambda)\sigma_0'' + \ldots \end{aligned}$$

Wir haben also in der ursprünglichen Formel für s_1 nun zu ersetzen

$$\begin{array}{lll} \sigma_0' & \text{durch} & \sigma_0'(1+\lambda) \\ \sigma_0'' & \text{„} & \sigma_0''(1+2\lambda) \\ \ldots & \text{„} & \ldots \\ \sigma_0^n & \text{„} & \sigma_0^n(1+n\lambda). \end{array}$$

Wenn wir dieses Resultat auf Formel 14 anwenden, dann erhalten wir als Bildungsarbeit des Bandes nach der Streckung, nachdem sich das Volumen $l\,dh$ nicht geändert hat

$$P_s'\,l\,dh = Fl\,dh + \Phi\left(\frac{2}{R}s_1'\left[1+\frac{dl}{l}\right]+s_1''\left[1+2\frac{dl}{l}\right]\right)l\,dh.$$

Den Arbeitsgewinn, der durch die Streckung erzielt worden ist, finden wir durch Subtraction

$$P_s'\,l\,dh - P_s\,l\,dh = \Phi\left(\frac{2}{R}s_1'\frac{dl}{l}+s_1''\frac{dl}{l}\right)l\,dh$$

$$(P_s' - P_s)\,l\,dh = 2\Phi\left(\frac{1}{R}s_1'+s_1''\right)dl\,dh.$$

Auf die Längeneinheit des Bandes oder (die Flächeneinheit desselben) fällt also der Arbeitsgewinn

$$(P_{\lambda} - P_{\circ})\, dh = 2\,\Phi\left(\frac{1}{R}\,s_1' + s_1''\right)\lambda\, dh.$$

Nun bedeutet $1 \cdot dh$ den Querschnitt des Bandes. Die Arbeit ist gewonnen worden, indem man den Querschnitt $1 \cdot dh$ um die Strecke λ verschoben hat. Dann bedeutet aber offenbar

$$2\,\Phi\left(\frac{1}{R}\,s_1' + s_1''\right)$$

die Spannung pro Einheit des Querschnittes, die man bei dieser Streckung zu überwinden gehabt hat. Wenn wir für Φ seinen Werth einsetzen, können wir sagen: In einem beliebigen Punkte der Mischungsschicht besteht die tangentiale Spannung (pro Einheit des Querschnittes):

$$q = 2\,(s_1\,[\alpha - \gamma] - s_2\,[\beta - \gamma])\left(\frac{1}{R}\,s_1' + s_1''\right). \qquad (15$$

Die Spannung ist expansiv, wenn q positiv ist; sie ist contractiv, wenn q negativ ist. Sie setzt sich offenbar aus zwei Spannungen zusammen: die eine wird durch R und s_1', die andere durch s_1'' bestimmt.

Es lässt sich nun in den Lamellen der Mischungsschicht noch eine dritte Spannung nachweisen. Schreiben wir Formel 14 für die quadratische Flächeneinheit einer Lamelle, dann lautet sie

$$P_{\circ}\, dh = F\, dh + \Phi\left(\frac{2}{R}\,s_1' + s_1''\right) dh.$$

Wir können nun mit φ den reciproken Werth von R bezeichnen. Dann ist φ der Winkel, den zwei Tangenten miteinander bilden, wenn ihre Berührungspunkte mit der Lamelle vom Radius R um die Längeneinheit voneinander abstehen. Dieses α ist ein sehr klares Maass der Krümmung der Lamelle. Dies eingeführt erhalten wir

$$P_{\circ}\, dh = F\, dh + \Phi\,(2\,\alpha\, s_1' + s_1'')\, dh.$$

Welche Arbeit wird nun gewonnen, wenn wir die Lamelle noch weiter um da krümmen? Wir müssen nach α differenziren, und erhalten als Arbeitsgewinn

$$2\,\Phi\, s_1'\, d\alpha.$$

Wenn aber durch die Krümmung um da Arbeit gewonnen wird, dann muss $2\Phi s_1'$ das Maass einer Kraft sein, welche diese Krümmung zu erzeugen trachtet, d. h. es muss in der Lamelle eine Krümmungsspannung herrschen.

Wir wollen im folgenden Abschnitt nur die wichtigste dieser drei Spannungen: die für ebene Mischungsschichten allein übrig bleibende Spannung $2\Phi s_1''$ eingehender untersuchen.

Die Längsspannung einer ebenen Mischungsschicht.

Wenn wir in Formel 15 $R = \infty$ setzen, wird die Mischungsschicht eben, und die Spannung wird

$$q = 2\left(s_1[\alpha - \gamma] - s_2[\beta - \gamma]\right) s_1''. \qquad (16$$

Diese Formel ist ein ganz besonders angenehmes Object für solche, die gerne Formeln discutiren. In Fig. 6 ist die Bedeutung der Formel graphisch dargestellt. Die Linie $R_i R_e$ ist eine Trajectorie der von R_i bis R_e reichenden Mischungsschicht. Links von R_i ist reines A, rechts von R_e ist reines B. Die stark gezeichnete Curve ist die Curve der Concentration s_1 von A. Sie verlauft entsprechend den Diffusionsgesetzen böschungsartig. Bei R_o ist der Wendepunkt. Für alle Spannungscurven ist $\alpha = 30$, $\beta = 20$ angenommen. Jede Curve entspricht aber einem anderen Werte des γ, und zwar reicht γ von 0 bis 50. In jeder Curve ist contractive Spannung als Höhe und als einfacher Strich angedeutet, während expansive Spannung als Tiefe und als doppelter Strich angezeigt ist.

Die Mischungsschicht enthält nothwendig eine Lamelle ohne Spannung, nämlich die Lamelle des Wendepunktes, da dort $s_1'' = o$ ist. Bei mittelständiger Adhäsion kann der Klammerausdruck nicht $= o$ werden. Bei oberständiger oder unterständiger Adhäsion aber wird der Klammerausdruck gleich Null für

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}.$$

Dann gibt es also noch eine zweite Lamelle ohne Spannung. In derselben verhalten sich die Concentrationen umgekehrt wie die Abweichungen der Cohäsionen von der Adhäsion. Wir erkennen aus der Zeichnung folgende Sätze:

Bei mittelständiger Adhäsion zerfällt die Mischungsregion in zwei Spannungsschichten, von denen die eine (auf der Seite der cohärenteren Flüssigkeit) contractiv, die andere (auf der Seite der minder cohärenten Flüssigkeit) expansiv gespannt ist.

Bei unterständiger Adhäsion zeigt die Mischungsregion zwei contractiv gespannte Schichten, welche durch eine expansiv gespannte dritte Schicht voneinander geschieden sind. Diese Mittelschicht erstreckt sich vom Wendepunkt nach der Seite der minder cohärenten

Flüssigkeit, und zwar umso weiter, je weniger unterständig die Adhäsion ist.

$$q = 2\,(s_1\,[\alpha - \gamma] - s_2\,[\beta - \gamma])\,s_1''$$
$$\alpha = 30$$
$$\beta = 20$$

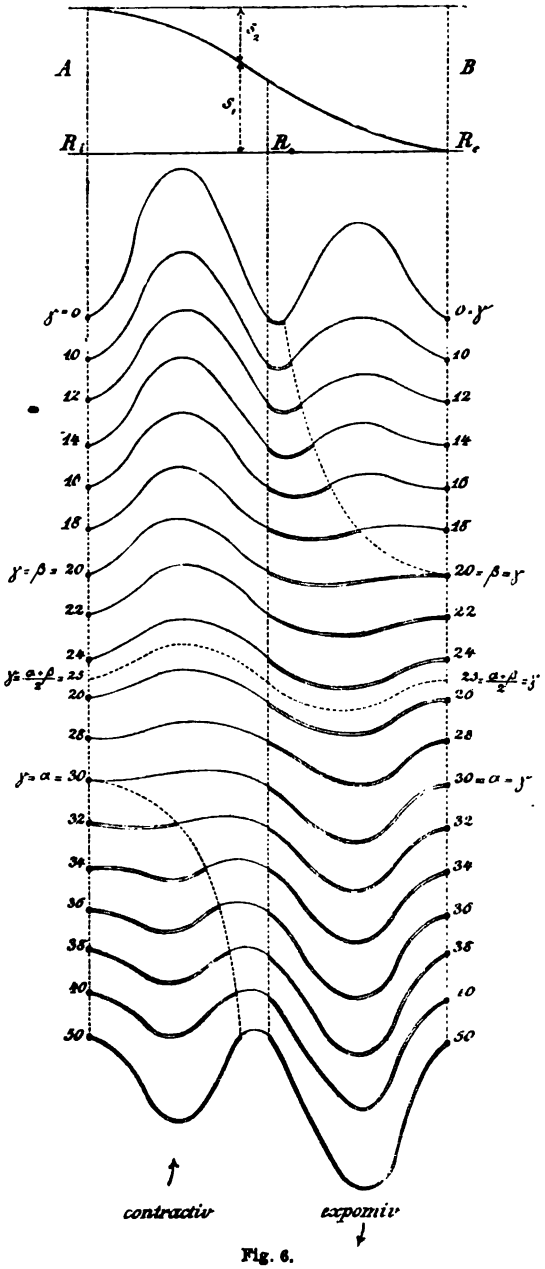


Fig. 6.

Bei oberständiger Adhäsion zeigt die Mischungsregion genau das Gegentheil. Wir finden zwei expansiv gespannte Schichten, welche durch eine dritte zwischengelagerte contractiv gespannte Schicht geschieden sind. Die Mittelschicht erstreckt sich vom Wendepunkt nach der Seite der cohärenteren Flüssigkeit, und zwar umso weiter, je weniger oberständig die Adhäsion ist.

In dieser Richtung wollen wir nicht weiter gehen.

Betrachten wir nun p als der Summe von drei Spannungen entsprechend den drei Molecularkräften, durch die sie entsteht: Die erste Spannung stammt von der Cohäsion des A, und ihr Werth ist

$$q_a = 2\alpha s_1 s_1''.$$

Die zweite stammt von der Cohäsion des B; ihr Werth ist

$$q_b = 2\beta s_2 s_1''.$$

Die dritte stammt von der Adhäsion; ihr Werth ist

$$q_c = 2\gamma (s_2 - s_1) s_1''.$$

Aus der Formel für q_a lesen wir, dass die Flüssigkeit A vermöge ihrer Cohäsion eine expansiv gespannte Schicht enthält, wo s_1'' positiv ist, und eine contractiv gespannte Schicht, wo s_1'' negativ ist. Die contractive Spannung ist aber bedeutend stärker, als die expansive, nachdem in ihr s_1 einen grösseren Werth besitzt.

Für B gilt natürlich dasselbe, was für A gilt.

Die Adhäsionsspannung p_c tritt nicht in zwei, sondern in drei Schichten auf. Wir finden nämlich zwei spannungslose Lamellen: eine im Wendepunkt, und eine im Punkte gleicher Concentrationen $s_1 = s_2$. Zwischen diesen liegt eine Schicht mit contractiver Spannung; zu beiden Seiten befinden sich Schichten mit expansiver Spannung.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen: Wenn die Mischungsschicht dicker wird, dergestalt dass die Mischungscurve gleichmässig gestreckt wird, ohne sonst ihre Gestalt zu ändern, dann wird die Totalspannung der Mischungsschicht immer kleiner.

Vor der Deformation sei die Gleichung der Mischungscurve, wenn wir y statt s_1 schreiben:

$$y = f(x).$$

Durch die Deformation soll die Mischungsschicht n-mal dicker werden. Dann muss jeder Abscisse diejenige Ordinate entsprechen,

welche vor der Deformation einer n-mal kleineren Abscisse entsprochen hat. Die Formel der gestreckten Mischungscurve ist dann

$$\eta = f\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

Durch doppelte Differentiation finden wir einerseits

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

oder kürzer

$$y'' = f''(x).$$

Andrerseits erhalten wir

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{df\left(\frac{\xi}{n}\right)}{d\left(\frac{\xi}{n}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{\xi}{n}\right)}{d\xi}$$

$$= f'_{\frac{\xi}{n}}\left(\frac{\xi}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

oder kürzer

$$\eta' = \frac{1}{n} f'\left(\frac{\xi}{n}\right)$$

und auf gleiche Weise

$$\eta'' = \frac{1}{n^2} f''\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

Correspondirende Punkte wollen wir nun solche Punkte nennen, für die $y = \eta$ ist, oder die gleiche Ordinaten haben. Für dieselben gilt dann nothwendig

$$x = \frac{\xi}{n}.$$

Dann ist aber auch

$$f''(x) = f''\left(\frac{\xi}{n}\right)$$

und wir erhalten für correspondirende Punkte

$$\eta'' = \frac{1}{n^2} y''. \tag{17}$$

Wir wollen nun bei der ungestreckten Mischungsschicht über jeder Abscisse die entsprechende Spannung q als s-Ordinate auftragen, wie sie sich aus der Formel für q berechnen lässt. Wir erhalten dann eine Fläche, welche theils positiv, theils negativ ist, und deren Flächeninhalt das Maass der Totalspannung der Mischungsschicht ist. Sie ist durch die Spannungscurve und die Abscissenaxe begrenzt.

Für die gestreckte Mischungsschicht bestimmen wir genau ebenso die Fläche der Totalspannung. Die erhaltene Fläche wird dann n-mal länger sein, als die erste Fläche. Jede Ordinate ζ wird aber n^2-mal kleiner sein als die entsprechende Ordinate s in der ersten Fläche. Der Flächeninhalt der zweiten Spannungsfläche ist dann n-mal kleiner, als der der ersten. Hiermit ist aber der Satz bewiesen:

Wenn die Mischungsschicht unter gleichmässiger Streckung der Mischungscurve n-mal dicker wird, dann wird die Totalspannung der Mischungsschicht n-mal kleiner.

Die zweite Längsspannung:

$$\frac{2\,\Phi\,s_1'}{R}$$

wollen wir nur kurz berühren. Sie ist umso grösser, je gekrümmter die Schichten sind. Sie tritt bei mittelständiger Adhäsion nur als eine Schicht auf, d. h. ihre Curve besteht nur aus einem Wellenberge, welcher angibt, dass die Spannung in der ganzen Mischungsschicht contractiv ist, oder nur aus einem Wellenthale, welches angibt, dass die Spannung in der ganzen Mischungsschicht expansiv ist. Es ist nämlich Φ durchaus positiv, wenn α grösser ist als β (während γ zwischen beiden steht), d. h. wenn die cohärentere Flüssigkeit innen, die minder cohärente aber aussen liegt, während Φ durchaus negativ ist, wenn umgekehrt aussen die cohärentere, innen die minder cohärente Flüssigkeit liegt. Da nun s_1' wesentlich negativ ist, und in unseren Formeln negative Spannung gleich contractiver Spannung ist, so erhalten wir den Satz: Die Spannung der Mischungsschicht nach dem ersten Differentialquotienten der Mischungscurve ist bei mittelständiger Adhäsion durchaus contractiv, wenn innen die cohärentere, aussen die minder cohärente Flüssigkeit liegt. Im entgegengesetzten Falle ist die Spannung durchaus expansiv.

Bei oberständiger Adhäsion sowohl als bei unterständiger Adhäsion gibt es eine spannungslose Fläche, für die $\Theta = o$ ist. Sie liegt dort, wo das Mischungsverhältnis besteht

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}.$$

Die Spannung tritt also bei nicht mittelständiger Adhäsion in zwei Schichten auf. Bei unterständiger Adhäsion liegt innen die contractiv, aussen die expansiv gespannte Schicht; bei oberständiger Adhäsion verhält es sich umgekehrt.

Von der inneren Spannung nach dem ersten Differentialquotienten ist noch zu bemerken, dass ihr Totalwerth von der Dicke der Mischungsschicht unabhängig ist. Wenn nämlich die Mischungsschicht n-mal dicker wird, dann können wir annehmen, dass in ihr jede Lamelle n-mal dicker geworden ist. Hierdurch wird aber gleichzeitig s_1' für jede Lamelle n-mal kleiner, und hieraus resultirt, dass die Totalspannung ungeändert bleibt.

Ueber den Einfluss der Molecularkräfte auf die Diffusion.

Wir denken uns die Mischungsschicht der Flüssigkeiten A und B eben, und die orthogonale Trajectorie dieser Mischungsschicht nehmen wir als x-Axe, dergestalt dass der Ursprung links im reinen A liegt. Der Diffusionsstrom von A, d. i. das Volumen von A, welches in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes (also durch eine yz-Ebene) diffundirt, ist dem Gefälle des A proportional. Wenn wir diesen Strom mit w_1 bezeichnen, dann ist

$$w_1 = -p\frac{ds_1}{dx} \tag{18}$$

wobei p eine Proportionalitätsconstante ist. Da der Differentialquotient natürlich negativ ist (A nimmt ja von links nach rechts an Concentration ab), so ist w_1 positiv, wenn A in der Richtung des positiven x, also in mischendem Sinne strömt. Für B erhalten wir analog

$$w_2 = -p'\frac{ds_2}{dx}$$

Nun ist aber $ds_2 = -ds_1$ und folglich

$$w_2 = +p'\frac{ds_1}{dx}.$$

Da ferner nothwendig jederzeit ebensoviel B nach links, als A nach rechts strömt, weil sonst eine Stauung eintreten müsste, so ist

$$w_2 = +p\frac{ds_1}{dx}. \tag{19}$$

Die Diffussion können wir so auffassen, dass jederzeit gleiche Volumina von A und B den Platz tauschen, und wir wollen nun rechnen, welche Arbeiten hierbei die Molecularkräfte leisten.

Formel 2 gibt die Eintrittsarbeit für die Masseneinheit. Auf unseren Fall angewendet ist die Eintrittsarbeit der Masseneinheit von A an eine bestimmte Stelle der Mischungsschicht unter dem Einfluss einer Elementarkraft

$$M_1 f_{11}(r)\,dr + M_2 f_{12}(r)\,dr$$

Für M_1 und M_2 können wir laut Formel 1 bei Vernachlässigung der höheren Glieder schreiben

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 s_1 \qquad M_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 s_2.$$

Dies eingesetzt und die Summe aller Elementarkräfte in Rechnung gezogen finden wir als Einführungsarbeit der Masseneinheit von A

$$e_1 = \frac{4}{3}\pi \varrho_1 s_1 \int_r^\infty r^3 f_{11}(r)\,dr + \frac{4}{3}\pi \varrho_2 s_2 \int_r^\infty r^3 f_{12}(r)\,dr$$

oder kürzer

$$e_1 = \frac{4}{3}\pi \varrho_1 s_1 \alpha_2 + \frac{4}{3}\pi \varrho_2 s_2 \gamma_2.$$

Wenn wir nun die Masseneinheit um $+ dx$ verschieben, so ändert sich die Eintrittsarbeit, und wir haben als Arbeitsgewinn

$$\frac{de_1}{dx}dx = \frac{4}{3}\pi \varrho_1 \alpha_2 \frac{ds_1}{dx}dx + \frac{4}{3}\pi \varrho_2 \gamma_2 \frac{ds_2}{dx}dx.$$

Da nun aber $ds_2 = -ds_1$ ist, so haben wir auch

$$de_1 = \left(\frac{4}{3}\pi \varrho_1 \alpha_2 - \frac{4}{3}\pi \varrho_2 \gamma_2\right) s_1'\,dx.$$

Da nun aber dx der Weg ist, um den die Masseneinheit verschoben worden ist, so ist nothwendig die Kraft, mit der diese Verschiebung durch die Molecularkräfte veranlasst wird, gleich

$$\left(\frac{4}{3}\pi \varrho_1 \alpha_2 - \frac{4}{3}\pi \varrho_2 \gamma_2\right) s_1'.$$

Da nun die Volumeinheit von A die Masse ϱ_1 enthält, so ist die Kraft, mit der die Molecularkräfte die Volumeinheit von A zu bewegen streben, gleich (indem wir die letzte Formel mit ϱ_1 multipliciren und eine frühere Abkürzung anwenden)

$$2(a - c)\, s_1'. \qquad (20$$

Der Sinn dieser Formel ist sehr einfach. Jedes A-Molekül hat links von sich mehr A-Moleküle als rechts, und darum wird vermöge der Cohäsion die Volumeinheit von A mit der Kraft $2as_1'$ nach links gezogen. Andrerseits hat jedes A-Molekül rechts von sich mehr B-Moleküle, als links, und darum wird vermöge der Adhäsion jeder Volumeinheit, das A mit der Kraft $-2cs_1'$ nach links gezogen.

Einer ganz gleichen Berechnung wollen wir die Masseneinheit von B unterziehen. Die Einführungsarbeit ist für eine Elementarkraft

$$M_1 f_{21}(r)\,dr + M_2 f_{22}(r)\,dr.$$

Durch Einsetzung der Werthe von M_1 und M_2 und Integration nach r erhalten wir (die Glieder vertauscht geschrieben)

$$e_2 = \frac{4}{3}\pi\varrho_2 s_2 \beta_3 + \frac{4}{3}\pi\varrho_1 s_1 \gamma_3.$$

Wenn wir nun die Masseneinheit um $+dx$ verschieben, erhalten wir als Arbeitsgewinn

$$\frac{de_2}{dx}dx = \frac{4}{3}\pi\varrho_2\beta_3\frac{ds_2}{dx}dx + \frac{4}{3}\pi\varrho_1\gamma_3\frac{ds}{dx}dx$$

oder

$$de_2 = -\left(\frac{4}{3}\pi\varrho_2\beta_3 - \frac{4}{3}\pi\varrho_1\gamma_3\right)s_1'\,dx.$$

Auch hier ist dx der Weg, auf dem der Arbeitsgewinn erzielt wird, also das Binom, multiplicirt mit s_1' die Kraft, mit der die Molecularkräfte die Masseneinheit nach rechts zu bewegen streben. Auf die Volumeinheit von B wirkt also die Kraft (nachdem die Volumeinheit die Masse ϱ_2 enthält)

$$-2(b-c)s_1'. \qquad (21$$

Die Bedeutung dieser Formel ist ganz analog der Bedeutung der Formel $2(a-c)s_1'$.

Nehmen wir nun gleiche Volumina dv von A und B. Die Volumeinheit fasst von reinem A die Masse ϱ_1, von reinem B die Masse ϱ_2; folglich fasst dv von A die Masse $m_1 = \varrho_1 dv$, von B aber $m_2 = \varrho_2 dv$. Lassen wir nun m_1 und m_2 über dx den Platz tauschen, dergestalt, dass m_1 sich um $+dx$ nach rechts an die Stelle von m_2, m_2 aber um $-dx$ nach links an die Stelle vom m_1 bewegt. Der Arbeitsgewinn aus diesem Platzwechsel ist dann

$$\begin{aligned} e &= e_1\varrho_1\,dv + e_2\varrho_2\,dv \\ &= \varrho_1\left(\frac{4}{3}\pi\varrho_1\alpha_3 - \frac{4}{3}\pi\varrho_2\gamma_3\right)s_1'\,dv\,dx \\ &+ \varrho_2\left(\frac{4}{3}\pi\varrho_2\beta_3 - \frac{4}{3}\pi\varrho_1\gamma_3\right)s_1'\,dv\,dx \end{aligned}$$

oder nach früheren Abkürzungen

$$e = 2(a+b-2c)s_1'\,dv\,dx.$$

Dieses ist der Arbeitsgewinn, den die Molecularkräfte ergeben, wenn gleiche Volumina dv von A und B über die Strecke dx den Platz tauschen, dergestalt dass die Strömung eine mischende (positive) ist, d. h. dass A nach rechts, B nach links strömt. Da dx der Weg ist, so ist die bewegende Kraft pro Volumeinheit:

$$(a+b-2c)s_1'. \qquad (22$$

Dieselbe Arbeit würde geleistet, wenn die ganze Kraft

$$2(a+b-2c)s_1'$$

ausschliesslich auf die A-Moleküle oder ausschliesslich auf die B-Moleküle einwirkte, während jede zweite Flüssigkeit sich passiv verhielte.

Diese Formel liefert sofort interessante Consequenzen. Wir sehen zunächst von der mischenden Wirkung der Diffusion gänzlich ab. Dann wird offenbar stets diejenige Strömung (derjenige Platzwechsel) stattfinden, bei der die Molecularkräfte positive Arbeit leisten. Nun ist s_1' wesentlich negativ, und der Klammerausdruck nur im Falle von Ueberadhäsion negativ. Mischende Strömung liefert also nur dann positive Arbeit, d. h. mischende Strömung wird nur dann stattfinden, wenn die Adhäsion grösser ist, als das Mittel der Cohäsionen. Im entgegengesetzten Falle bringt die entgegengesetzte Strömung positive Arbeit, d. h. bei Unteradhäsion findet scheidende Strömung der Flüssigkeiten infolge der Molecularkräfte statt. Wir müssen voraussetzen, dass die Strömung, welche die Molecularkräfte veranlassen, umso stärker ist, je mehr Arbeit hierdurch geleistet wird. Nun ist die Arbeit umso grösser, je grösser das Gefälle s_1' der Mischungscurve ist; sie ist also in der Nähe des Wendepunktes der Curve am grössten. Hieraus lässt sich der störende Einfluss beurtheilen, den die capillare Strömung (wenn wir mit diesem Namen die Strömung bezeichnen wollen, welche durch die Molecularanziehungen verursacht wird) auf die Diffusionserscheinungen ausüben wird. Wir können nämlich (unter gewissen Bedingungen) die Mischungscurve berechnen, welche sich ergeben müsste, wenn zwei in Berührung gebrachte Flüssigkeiten sich ausschliesslich unter Einfluss der Diffusion zu mischen beginnen. Im Falle von Unteradhäsion wird dann die Mischungscurve in der Gegend des Wendepunktes steiler verlaufen, als es die theoretischen Gesetze der reinen Diffusion verlangen, während im Falle von Ueberadhäsion die Mischungscurve dort zu flach verlaufen wird. Die theoretische Diffusionscurve wird sich also nur im Falle mittlerer Adhäsion rein darstellen.

Wir kommen nun zum interessantesten Punkte der ganzen vorliegenden Arbeit. Der Diffusionsstrom an einer bestimmten Stelle ist bekanntlich unabhängig von den Concentrationen s_1 und s_2, welche die beiden Flüssigkeiten daselbst haben, und hängt lediglich vom Gefälle s_1' der Mischungscurve ab. Ganz anders verhält es sich mit dem Capillarstrom. Es soll gezeigt werden, dass derselbe von den Concentrationen s_1 und s_2 abhängig ist, und dass wir ihn wenigstens approximativ ausdrücken können durch

$$w_1 = q(a+b-2c)s_1 s_2 s_1' \qquad (23$$

d. h. dass das Volumen w_1 von A pro Einheit von Zeit und Querschnitt nach rechts und das gleiche Volumen w_1 von B nach links strömen wird.

Wir machen vor allem die Annahme, dass der Capillarstrom der geleisteten Arbeit proportional ist, d. h. dass die Moleküle 2, 3, ... n-mal schneller wandern, wenn die bewegenden Kräfte 2, 3, ... n-mal grösser sind. Dies rechtfertigt im obigen Ausdruck für w_1 das Polynom $a + b - 2c$ und den Factor s_1'.

Wir machen zweitens nun die Annahme, dass die bewegenden Kräfte ausschliesslich auf die A-Moleküle wirken, und dass die B-Moleküle also eine ganz passive Rolle spielen. Der Capillarstrom des A, d. h. das Volumen, oder, was auf daselbe herauskommt, die Anzahl der A-Moleküle, die pro Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit strömt, ist dann einerseits proportional der Kraft $(a + b - 2c)s_1'$, welche auf jede Volumeinheit wirkend gedacht ist; andrerseits ist der Capillarstrom proportional der Concentration s_1 (denn wo n-mal mehr A-Moleküle vorhanden sind, dort strömen eben auch n-mal mehr Moleküle, da wir eben alle strömend denken). Der Capillarstrom ist dann

$$w_1' = Q(a + b - 2c)\, s_1\, s_1'.$$

Indem dieses A-Volumen durch die Querschnittseinheit strömt, wird die Stelle, die es verlassen hat, durch Mischungsflüssigkeit ausgefüllt, und wo es hintritt, dort verdrängt es ein gleiches Volumen Mischungsflüssigkeit. Diese Erscheinung kommt darauf hinaus, dass das Volumen w_1' von reinem A mit dem gleichen Volumen w_1' von Mischungsflüssigkeit den Platz getauscht hat. Nun enthält aber das letztere Volumen von A das Volumen $w_1' s_1$, von B das Volumen $w_1' s_2$. Bei diesem Platzwechsel gelangt also nach links effectiv das B-Volumen $w_1' s_2$, von A aber effectiv nach rechts das Volumen

$$w_1' - w_1' s_1 = w_1'(1 - s_1) = w_1' s_2.$$

Wenn wir hier den Werth von w_1' einsetzen, dann erhalten wir für die ausgetauschten Volumina

$$Q(a + b - 2c)\, s_1\, s_2\, s_1'. \qquad (24$$

Wenn wir annehmen, dass die ganze Kraft ausschliesslich auf die B-Moleküle wirkt und die A-Moleküle sich lediglich passiv verhalten, dann erhalten wir ganz denselben Ausdruck. Wir dürfen also annehmen, dass auch dann, wenn die bewegenden Kräfte sich auf A und B vertheilen, unser obiger Werth für w' in Giltigkeit bleibt.

Hiermit erscheint die Formel 23 gerechtfertigt, da sie sich von Formel 24 nur äusserlich durch das Symbol der Proportionalitätsconstanten unterscheidet.

Bestimmen wir nun das A-Volumen, das theils infolge der Diffusion (Diffusionsstrom) theils infolge der Molecularkräfte (Capillarstrom) pro Zeiteinheit durch die Querschnitttseinheit nach rechts strömt. Der Diffusionsstrom ist

$$w_1 = -p\, s_1'.$$

Der Capillarstrom ist

$$w_1' = +q\,(a + b - 2c)\, s_1\, s_2\, s_1'.$$

Der Totalstrom ist also

$$W_1 = [q\,(a + b - 2c)\, s_1\, s_2 - p]\, s_1'. \qquad (25$$

Die gleiche Menge $W_2 = W_1$ von B strömt dann gleichzeitig nach links.

Unsere Formel hat nun merkwürdige Consequenzen. Bei Ueberadhäsion, d. h. wenn $k = a + b - 2c$ negativ ist, ist das Binom nothwendig negativ, da beide Glieder dann negativ sind; s_1' ist wesentlich negativ, und hieraus folgt: Bei Ueberadhäsion findet in der Mischungsschicht nothwendig überall mischende (positive) Strömung statt. Auch bei Unteradhäsion oder positivem k ist das Binom negativ, solange p grösser ist, als das erste Glied. Nun ist der grösste Werth, den das Product $s_1 s_2$ erreichen kann, gleich $\frac{1}{4}$. Solange also gilt

$$p > \frac{1}{4} qk$$

ist auch bei Unteradhäsion die Strömung in der Mischungsschicht eine unbedingt mischende.

Das überraschendste Resultat finden wir bei grösserem positiven k, so das

$$p < \frac{1}{4} qk.$$

Das Product $s_1 s_2$ hat nämlich in der Mischungsschicht alle möglichen Werthe von o (an den Grenzflächen, wo $s_1 = 0$ oder $s_2 = 0$ ist) bis $\frac{1}{4}$ (in der Lamelle, wo A und B zu gleichen Volumentheilen gemischt erscheinen und welche wir die gleichtheilige Lamelle nennen wollen). Wenn $4p < qk$ ist, dann gibt es immer zwei an entgegengesetzten Seiten der gleichtheiligen Lamelle gelegene Schichten, in denen $p = qk s_1 s_2$ ist. Wir können nämlich schreiben

$$s_1 = \frac{1}{2} + x \qquad s_2 = \frac{1}{2} - x.$$

Dann ist

$$p = qk\left(\frac{1}{4} - x^2\right)$$

und hieraus

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4p}{qk}}.$$

Da nun x zweiwerthig ist, gibt es wie gesagt zwei Schichten mit reciproken Mischungsverhältnissen, wo $p = qks_1s_2$ ist. Wir wollen diese beiden Schichten die stromlosen Schichten nennen, weil in ihnen keine Strömung stattfindet, weil das Binom $(qks_1s_2 - p)$ für sie gleich Null ist. In der ganzen Mischungsmasse, welche zwischen den beiden stromlosen Flächen liegt, ist s_1s_2 grösser als in letzteren Flächen, da s_1 und s sich beide dort dem Werthe $\frac{1}{2}$ nähern. Für diese ganze Mittelregion ist also das Binom positiv, während s_1' negativ ist. Dann ist W_1 negativ, d. h. für $p < \frac{1}{4}qk$ findet in der Mittelschicht des Mischungsgebietes zwischen den beiden stromlosen Flächen scheidende (negative) Strömung statt, d. h. das A strömt dort nach links, das B aber nach rechts.

Anders verhält es sich in den äusseren Regionen der Mischungsschicht, rechts und links von den stromlosen Flächen. Dort nähert sich nämlich s_1s_2 dem Werthe Null, den das Product in den Grenzflächen auch erreicht. In diesen Seitenregionen ist also das Binom negativ, wodurch W_1 positiv wird. In den Seitenregionen findet also mischende Strömung statt, d. h. A strömt nach rechts, B nach links.

Welche Aenderungen eine gegebene Mischungscurve unter dem Einfluss dieser Gesetze erleidet ist in Fig. 7 durch immer schwächer

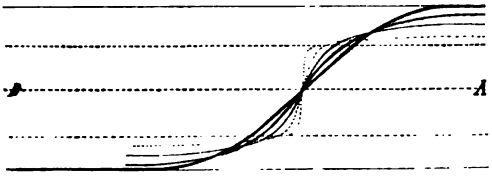


Fig. 7.

werdende Curven dargestellt. Das Endergebnis ist folgendes. Es bilden sich zwei scharf geschiedene Mischungen von A und B, deren jede in sich homogen ist. In der einen Mischung ist überall

$$s_1 = \frac{1}{2} + x \qquad s_2 = \frac{1}{2} - x.$$

In der anderen Mischung ist das Verhältnis das reciproke:

$$s_1 = \frac{1}{2} - x \qquad s_2 = \frac{1}{2} + x.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass p und q vom Mischungsverhältnis unabhängige Grössen sind. In Wirklichkeit ist das nicht zu erwarten. Wenig grosse Moleküle werden unter vielen kleinen Molekülen wahrscheinlich langsamer durch Diffusion vordringen, als wenig kleine Moleküle unter vielen grossen. Ein veränderliches p und k hat zur Folge, dass die beiden complementären Mischungen nicht mehr reciproke Mischungsverhältnisse zeigen werden.

Die praktische Bedeutung dieser Resultate liegt in dem Postulate, dass beispielsweise Wasser und Oel sich nur scheinbar absolut unvermischt erhalten; dass thatsächlich das Wasser wenigstens Spuren von Oel, Oel aber wenigstens Spuren von Wasser in sich aufnimmt. Die Forderung, dass beispielsweise das Oel wenigstens Spuren von Wasser aufnimmt, lässt sich im Sinne unserer Rechnungen etwa folgendermaassen motiviren:

Die Theorie der Diffusion, welche keine Molecularattractionen annimmt, führt zu dem Satze, dass in jeder Zeiteinheit aus dem Wasser in das Oel auf eine minimale Tiefe ziemlich viel Wasser eindringt; in grössere Tiefen gelangt in der Zeiteinheit weit weniger Wasser; eine verschwindend kleine Menge von Molekülen wird aber in der Zeiteinheit theoretisch fast mit der Geschwindigkeit eines frei fliegenden Moleküles tief in das Innere des Oeles vordringen. Theoretisch hat also die Diffusion eine fast absolute durchdringende Macht, d. h. wenigstens minimale Mengen des umgebenden Mittels werden dem umgebenen Mittel wohl unbedingt aufgedrängt. Nun tritt aber im Falle stärkerer Unteradhäsion die Molecularattraction in Geltung, welche die eingedrungenen Moleküle wieder herauszuziehen strebt. Während aber der einführende Strom von der schon vorhandenen eingedrungenen Menge des eindringenden Körpers unabhängig ist, und nur vom Gefälle der Mischungscurve abhängt, ist der ausführende Strom umso grösser, je mehr Moleküle des Eindringlings sich an einer gewissen Stelle befinden. Wo wenig ist, kann aber nur wenig ausfliessen, und wo viel ist, fliesst viel aus, wenn in beiden Fällen jedes einzelne Molekül mit

gleicher Kraft nach aussen gezogen wird. Wo also der Eindringling bereits eine höhere Concentration erreicht hat, dort erhält der ausführende Strom das Uebergewicht, und die Concentration wird erniedrigt. Wo jedoch der Eindringling nur noch eine geringe Concentration besitzt, vermag der sehr schwache ausführende Strom den Gegenstrom nicht zu paralysiren, und die Concentration steigt. Hieraus ist klar, dass je nach Maassgabe der Diffusionsconstanten und der Intensität der Molecularkräfte jeder Flüssigkeit von jeder Flüssigkeit wenigstens unnachweisliche Spuren aufnehmen muss.

Die soeben entwickelten Grundsätze involviren eine Theorie der Lösungen:

Bleiben wir bei Salz und Wasser. Wenn die Volumeinheit flüssigen Salzes sich in festes Salz verwandelt, nimmt sie das Volumen u_1 an, und hierbei leisten die Molecularkräfte die positive Arbeit e_1. Wenn Salz sich in Wasser löst, dann verwandelt sich theoretisch zuerst das Volumen $u_1 u$ von festem Salze in das Volum u flüssigen Salzes, und hierbei leisten die Molecularkräfte die negative Arbeit $-e_1 u$. Wenn sich dann dieses Volumen u flüssigen Salzes mit dem Volumen v reinen Wassers ohne Contraction, wie wir der Einfachheit wegen annehmen wollen, mischt, dann resultirt hieraus ein Arbeitsgewinn

$$e_2 = -\frac{uv}{u+v}(a+b-2c)$$

oder pro Volumeinheit der Mischung (wenn s_1 und s_2 die Concentrationen sind, so dass

$$s_1 = \frac{u}{u+v} \qquad s_2 = \frac{v}{u+v}$$

ist), ein Arbeitsgewinn der Molecularkräfte

$$c_2 = -s_1 s_2 (a+b-2c).$$

Die Bildung der in Rede stehenden Mischung involvirt also die Molecular arbeit

$$e = -\left[e_1 u + \frac{uv}{u+v}(a+b-2c)\right]$$
$$= -\left[e_1 + \frac{v}{u+v}(a+b-2c)\right]u.$$

Wenn die Adhäsion c sehr gross ist, wird dieser Werth positiv, d. h. es wird durch die Herstellung der Mischung positive Arbeit geleistet. Die Molecularkräfte fördern dann die mischende Wirkung der Diffusion. Je grösser v ist, d. h. je wasserreicher, je minder concen-

trirt die Lösung ist, umso kleiner kann die Ueberadhäsion sein, die zur Erzielung positiver Arbeit erforderlich ist. Umgekehrt muss die Ueberadhäsion schon sehr gross sein, wenn schon ein kleines v, also eine sehr concentrirte Lösung unter positiver Moleculararbeit sich herstellen soll. Im Falle von Unteradhäsion ist jedoch die Lösungsarbeit unbedingt negativ. Wenn aber negative Moleculararbeit geleistet wird, sobald die Salzmoleküle infolge der Diffussion sich von der Salzmasse ablösen und ins Wasser übergehen, dann müssen nothwendig Molecularkräfte vorhanden sein, welche die Salzmoleküle entgegen der Diffusion zurück zur Salzmasse zu führen streben, während gleichsam abstossende Molecularkräfte vorhanden sein müssen, sobald die Lösungsarbeit positiv ist.

Es liegt nun die Vermuthung nahe, dass die Lösung dann gesättigt sein wird, wenn ihre Herstellung ohne Moleculararbeit erfolgt, d. h. wenn die Concentration der Lösung nicht mehr so klein ist, dass e positiv ist, aber auch noch nicht so gross, dass e negativ wird, dass also Sättigung eintritt, wenn

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{v}{u+v}(a+b-2c) \\ &= s_2(a+b-2c). \end{aligned}$$

Dieser Schluss wäre falsch; die Sättigung darf erst bei höherer Concentration erwartet werden. Die Concentrationscurve des Salzes zeigt nämlich von der Oberfläche des Salzes an ein Gefälle, und der Salzstrom, der infolge der Diffusion in das Wasser eindringt, ist überall diesem Gefälle proportional. Der Diffusionsstrom ist also wesentlich ein mischender Strom. In dem Maasse, als die Concentration des Salzes im Wasser steigt, wird die Mischungscurve flacher und der Mischungsstrom demnach immer schwächer. Wenn aber das Salz derart sich löst und ins Wasser abströmt, wird pro Volumeinheit flüssigen Salzes die Arbeit

$$-\left[e_1+\frac{v}{u+v}(a+b-2c)\right]$$

verbraucht. Hieraus folgt aber, dass eine Kraft vorhanden sein muss, welche diesem Abströmen entgegenwirkt, welche dieser Arbeit proportional ist, und welche jedes einzelne Salzmolekül zurückzuführen strebt. Das Wasser wird gesättigt sein, wenn jedes Salzmolekül in jeder Zeiteinheit im Mittel durch die Diffusion, d. h.

durch die Zusammenstösse mit den Nachbarmolekülen und die durch den Reflex veranlassten Richtungsänderungen ebenso weit von der Salzoberfläche entfernt wird, als es sich gleichzeitig infolge der Molecularkräfte der Salzoberfläche nähert.

Auf Grund der hiermit skizzirten Leitgedanken lässt sich die Theorie der Lösungen sehr weit ausbauen, und sie bleibt in Uebereinstimmung mit den Beobachtungsthatsachen.

Die Trägheitscurve auf wagerechter Ebene bei dem Vorhandensein eines Reibungswiderstandes, der von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängt.

Von

F. Roth.

I.

Im XX. Bande dieser Zeitschrift S. 681 ff. habe ich die Lösung der Aufgabe veröffentlicht: Welches ist die Bahn eines freien Theilchens auf wagerechter Ebene, das durch eine unveränderliche Kraft nach bestimmter Himmelsrichtung fortgetrieben wird, bei Berücksichtigung der Umdrehung der Erde um ihre Axe und bei Einführung eines Reibungswiderstandes, der im geraden Verhältnisse der Geschwindigkeit wirkt? Die gesuchte Curve war eine sich verengende logarithmische Spirale, der gleichzeitig eine gleichmässige Verschiebung zukam, die für denjenigen, welcher in der Richtung der Kraft geht, immer nach derjenigen Seite erfolgte, nach der sich die Erde, vom nächsten Pole aus gesehen, nicht hindreht. Verschwindet die Kraft, so bleibt die Bahn eine logarithmische Spirale, aber sie steht dann in Beziehung zur Erdoberfläche still.

Die inzwischen von mir in dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlungen über relative Bewegung betreffen nicht die Niveaufläche, sondern eine sich drehende Scheibe, welche sich, wie wir schon öfters zur Erklärung gesagt haben, von der ersteren dadurch unterscheidet, dass, wenn sie still steht, ein ruhender Körper auf ihr an seiner Stelle beharrt, während er auf der wagerechten Ebene, wenn die Erde sich nicht drehte, durch die Schwerkraft nach den Polen zu getrieben werden würde.

Für die Physik der Erde ist jene erste Aufgabe von grösserer Wichtigkeit, wenn ich schon in dem im heurigen Februarhefte abgedruckten letzten Theile der späteren Abhandlung den Weg angegeben habe, wie man von den dort geltenden Voraussetzungen zu der wagerechten Ebene übergehen kann. Denn dieser Uebergang führt unter Umständen zu eigenthümlichen mathematischen Schwierigkeiten, deren vollständige Auflösung leicht denselben Umfang annehmen kann wie

die Schrift, von welcher er nur ein Theil ist. Die Annahme jedoch, dass die Reibung im einfachen geraden Verhältnis der Geschwindigkeit wirke, war eine willkürliche. Die Voraussetzung, dass der Widerstand der Reibung oder überhaupt eines flüssigen Mittels von dem Quadrate der Schnelligkeit des gehemmt sich bewegenden Körpers abhänge, ist jedenfalls ebenso berechtigt. Wir wollen daher im Nachstehenden den Versuch machen, die Bahn eines freien Theilchens auf einer wagerechten Ebene zu bestimmen, das nur seiner Trägheit folgt, aber durch einen Widerstand gehindert wird, der in der zuletzt bezeichneten Weise eine Function der relativen Geschwindigkeit ist.

Der Uebergang zu dem Falle, dass ausserdem eine der Richtung und Grösse nach unveränderliche Kraft wirkt, ist nach den bei den frühern, ähnlichen Aufgaben von uns angewandten Methoden leicht. Durch Ableitung nach t verschwindet die Beschleunigung der Kraft aus den ursprünglichen Differentialgleichungen; die Differentialcurve ist also von derselben Art wie die Trägheitsbahn, die wir jetzt aufsuchen wollen, und eine nochmalige Integration führt dann zu der Bahn, welche das freie Theilchen beschreibt, wenn ausser der Reibung noch die gegebene Kraft mit in Rechnung gesetzt wird.

Die Bedingungsgleichungen der Aufgabe, deren Lösung wir uns hier vorgenommen, sind nach dem, was wir in der früheren Arbeit im XX. Bande dieser Zeitschrift S. 684—687 dargethan haben, unter Beibehaltung der dort gebrauchten Bezeichnungsweise und der Annahmen über die Lage der x und der y:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2w \sin\varphi \cdot \frac{dy}{dt} - av^2 \cdot \cos(v, x),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2w \sin\varphi \cdot \frac{dx}{dt} - av^2 \cdot \cos(v, y),$$

mithin, da $\cos(v, x)$ gleich $(x' : v)$ u. s. f., unter Wiederbenutzung der Abkürzung k für $2w \sin\varphi$ $(2w \cos h)$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \cdot \frac{dy}{dt} - av \cdot \frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot \frac{dx}{dt} - av \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

Das Azimuth, welches man für die Axe der x wählt, ist gleichgiltig, wie an der angezogenen Stelle S. 686—687 gezeigt worden ist. Durch die tägliche Drehung der Erde werden demnach die längs einer wagerechten Ebene sich bewegenden Körper nach allen Himmelsrichtungen hin gleichmässig abgelenkt; doch gilt dies nur in den Grenzen, innerhalb deren die Geraden, welche eine Himmelsrichtung bezeichnen,

als miteinander gleichlaufend betrachtet werden können, oder, was auf dasselbe hinauskommt, solange das Stück eines Breitenkreises mit dem Theile der von Ost nach West gehenden kürzesten Linie vertauscht werden kann. Lässt man diese Beschränkung, die unserer jetzigen Aufgabe anhaftet, fallen, so treten die Folgerungen in ihr Recht, die ich im Schlussworte jener Abhandlung und in dem im folgenden Jahrgange des Repertoriums veröffentlichten Zusatze S. 508—514 ausgesprochen habe.

II.

Die Gleichungen 1 und 2 schreiben wir:

$$x'' = ky' - avx',$$
$$y'' = -kx' - avy'.$$

Daraus folgt:

$$x'x'' + y'y'' = -av(x'x' + y'y'),$$

d. i.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{dt} = -av^2$$

und nach Auflösung von $d(v^2)$

$$\frac{dv}{v^2} = -a \cdot dt,$$
$$\frac{1}{v} = at + C_1,$$

wobei für die Integrationsconstante C_1 durch Nullsetzung von v sich ergibt

$$C_1 = \frac{1}{v_0}.$$

Die Geschwindigkeit selbst wird bestimmt durch die Formel

$$v = \frac{1}{at + C_1}. \qquad (3$$

Betrachtet man die geradlinige Bewegung eines Körpers, der seiner Trägheit folgend die Strecke s zurücklegt, dabei aber durch einen Widerstand aufgehalten wird, welcher von dem Quadrate der Schnelligkeit abhängt, so hat man

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -a \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

und hieraus findet man, wenn die bei der Integration auftretende unveränderliche Grösse durch $\mathfrak{C}$ bezeichnet wird,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{at + \mathfrak{C}}.$$

So ergibt sich in unserem besonderen Falle eine Bestätigung des allgemeinen Gesetzes, das ich zuerst 1883 in einem an Herrn Dir. Hann gerichteten Briefe (Zeitschr. der österr. Ges. für Meteorologie, 1884, S. 41—43) ausgesprochen habe, dass nämlich auf wagerechter Ebene, wenn nur Tangentialkräfte wirken, die Axendrehung der Erde auf die Geschwindigkeit längs der relativen Bahn und mithin auch auf die Länge des zurückgelegten Weges gar keinen Einfluss ausübt. Die durchlaufene Strecke ist in beiden Fällen

$$s - s_0 = \frac{1}{a} \lg \cdot \left(a \cdot \frac{ds}{dt}_0 t + 1 \right).$$

Schreibt man die Gleichungen 1 und 2 in der Gestalt

$$\frac{dx'}{dt} = ky' - avx',$$
$$\frac{dy'}{dt} = -kx' - avy',$$

so findet man leicht, dass

$$x' \cdot \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} = -k(x' \cdot x' + y' \cdot y').$$

Setzen wir nun

$$x' = v \cdot \cos \varepsilon, \qquad y' = v \cdot \sin \varepsilon,$$

so folgt aus der letzten Gleichung:

$$v^2 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = -k \cdot v^2,$$
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -k \left[= -2w \cdot \sin \varphi \right]$$
$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -kt. \tag{4}$$

Dies ist wiederum ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes, den ich ebenfalls in jenem Briefe zuerst veröffentlicht habe: „Der Winkel, durch welchen die Richtung der Bewegung bestimmt wird, ändert sich nur mit der Zeit und ist ganz unabhängig von der Art des Reibungswiderstandes."

Rechnet man sich aus Gl. 4 t aus und setzt es in die Gl. 3 ein, so erhält man als Beziehung zwischen v und ε:

$$v \cdot \left[\frac{a(\varepsilon_0 - \varepsilon)}{k} + \frac{1}{v_0} \right] = 1,$$
$$v = \frac{k \cdot v_0}{k + a v_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon)}. \tag{5}$$

Zur Fortsetzung der Integration führen wir in die obenstehenden Formeln für x' und y' die Werthe von v und ε aus Gl. 3 und 4 ein. So bekommen wir

$$x = \int \frac{\cos(\varepsilon_0 - kt)}{at + C_1} dt + C_2, \tag{6}$$

$$y = \int \frac{\sin(\varepsilon_0 - kt)}{at + C_1} dt + C_3. \tag{7}$$

Setzen wir jetzt

$$at + C_1 = u,$$

so wird $\varepsilon_0 - kt$ zu

$$\varepsilon_0 + \frac{k}{a} \cdot C_1 - \frac{k}{a} u.$$

Schreiben wir ferner m für

$$\left(\varepsilon_0 + \frac{k}{a} \cdot C_1\right), \text{ d. i. für } \left(\varepsilon_0 + \frac{k}{a v_0}\right), \text{ und } \beta \text{ für } \frac{k}{a},$$

so wird $\overline{\varepsilon_0 - kt}$ zu $\overline{m - \beta u}$. Da nun ausserdem dt gleich $\frac{du}{a}$, so nehmen, abgesehen von den constanten Gliedern, die Gleichungen 6 und 7 die Gestalt an

$$x = \frac{1}{a}\int \frac{\cos(m - \beta u)\, du}{u}, \quad y = \frac{1}{a}\int \frac{\sin(m - \beta u)\, du}{u}.$$

$$x = \frac{\cos m}{a}\int \frac{\cos(\beta u)}{u} du + \frac{\sin m}{a}\int \frac{\sin(\beta u)}{u} du,$$

$$y = \frac{\sin m}{a}\int \frac{\cos(\beta u)}{u} du - \frac{\cos m}{a}\int \frac{\sin(\beta u)}{u} \cdot du.$$

Wir stossen somit auf den Integralsinus und den Integralcosinus, und zwar haben wir sie hier in derselben Form, wie sie Schlömilch in seinem Compendium der höheren Analysis, 1. Band § 78, ausgedrückt hat. Nach eben diesem Werke erhalten wir (Gl. 3 auf S. 359, Gl. 5 auf S. 360)

$$\int \frac{\sin \beta u}{u} \cdot du = C + \frac{1}{1} \cdot \frac{\beta u}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\beta^3 u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\beta^5 u^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots,$$

$$\int \frac{\cos \beta u}{u} du = C + lu - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 u^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4} \frac{\beta^4 u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots.$$

Um in die Art, wie diese Reihen fortschreiten, eine Einsicht zu erlangen, muss man für bestimmte Beispiele sich die Werthe der Constanten berechnen.

Unter dem Aequator, wo $\varphi = 0$, verschwindet mit $\sin\varphi$ auch k und β aus unseren Formeln. Legen wir dann die Achse der x in die Richtung der anfänglichen Bewegung, so wird, solange der Anfangsgeschwindigkeit ein endlicher Werth zukommt, auch m zu Null. Mithin bleibt (M, N und M' allgemein unveränderliche Grössen)

$$x = M + N \log.\,\text{nat.}\, u,\quad y' = M';$$

Die Bahn ist demnach in diesem Falle eine gerade Linie, welche mit der x-Axe gleiche Richtung hat. Dieses Ergebnis mag als Probe für unsere Entwickelungen dienen.

Legen wir diejenigen Zahlenwerthe zu Grunde, die wir in der im XX. Bande veröffentlichten Aufgabe bei dem dort berechneten Beispiele gebraucht haben, nehmen jedoch die Anfangsgeschwindigkeit zu 10 m, so wird

$$m = \frac{\pi}{180^0} \cdot 1^0\,21'\,11'',$$

und folglich

$$\frac{\cos m}{a} = 1999{,}4,\quad \sin\cdot\frac{m}{a} = 47{,}23.$$

Die Reihe für den Integral-Sinus und Cosinus convergirt sehr schnell; denn es ist jetzt β gleich 0,2362, also kleiner als

$$\frac{1}{4},\quad \beta^2 < \frac{1}{17},\quad \beta^3 < \frac{1}{75}$$

und

$$u = 0{,}0005 \cdot t + 0{,}1,$$
$$u^2 = 0{,}000\,000\,25\,t^2 + 0{,}0001 \cdot t + 0{,}01,$$
$$u^3 = 0{,}000\,000\,000\,125 \cdot t^3 + 0{,}000\,000\,075 \cdot t^2 + 0{,}000\,015\,t + 0{,}001.$$

Bei einer wirklichen Berechnung von x und y wird man daher, solange nicht t ungewöhnlich grosse Werthe annimmt, die höheren Potenzen von u vernachlässigen können.

Für beliebige andere Breiten und andere Reibungscoefficienten kann dies jedoch nicht mehr unbedingt gelten. Wenigstens kann β dann grösser als eins werden. Denn β als $2w \sin\varphi : a$ ist durch dieselbe Formel ausgedrückt wie nach der Darstellung von Guldberg und Mohn die Tangente des „normalen Ablenkungswinkels“ des Windes in den Luftwirbeln. Für diesen Winkel sind in dem Lehrbuche der Meteorologie von Sprung in einer Tabelle auf S. 122 verschiedene aus wirklichen Beobachtungen abgeleitete Werthe aufgeführt. Darunter findet sich eine grosse Anzahl, die mehr als 45° betragen, deren Tangente mithin den Werth 1 übersteigen würde.

III.

Bei der von uns angedeuteten Herleitung der Gleichungen 6 und 7 braucht man die Formeln

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos(\varepsilon_0 - kt)}{at + C_1}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\sin(\varepsilon_0 - kt)}{at + C_1},$$

wofür wir unter Anwendung der früheren und Einführung einer neuen Abkürzung schreiben

$$x' = \frac{1}{u}\cos T, \quad y' = \frac{1}{u}\sin T.$$

Daraus folgt durch Ableitung nach t:

$$x'' = \frac{k}{u}\sin T - \frac{a}{u^2}\cos T,$$

$$y'' = -\frac{k}{u}\cos T - \frac{a}{u^2}\sin T.$$

$$x'y'' - y'x'' = -(k : u^2).$$

Gl. 3 gibt uns

$$(\sqrt{x'x' + y'y'})^3 = \frac{1}{u^3},$$

mithin ist der Krümmungshalbmesser der gesuchten Bahn

$$\varrho = \frac{(x'x' + y'y')^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''} = -\frac{1}{ku}$$

oder

$$\varrho = -\frac{v}{2w\sin\varphi}, \tag{8}$$

ein Ausdruck, welcher vollkommen mit Formel 1 auf S. 42 des oben erwähnten Briefes an Herrn Dir. Hann übereinstimmt. Darin liegt wiederum die Bestätigung eines dort allgemein ausgesprochenen Gesetzes für den besonderen Fall, wo die Reibung im quadratischen Verhältnis der Geschwindigkeit wirkt.

Die geometrische Darstellung der zu findenden Bahn ist nur mit Hilfe einer punktweisen Zeichnung möglich, indem man nämlich die Ausdrücke für x und y in Reihen auflöst, die aufeinander folgenden Werthe derselben ausrechnet und in die Figur einträgt. Doch will ich im Nachfolgenden noch auf eine wunderbare Eigenschaft der fraglichen Curve aufmerksm machen, die sich durch blosses Nachdenken und durch analytische Entwickelung ohne Anwendung bestimmter Zahlen erkennen lässt.

Es ist nämlich erlaubt, jede ebene Curve, mithin auch die gesuchte, als die Evolvente einer anderen aufzufassen. Der Krümmungshalbmesser

der ersteren Curve ist dann der gespannte Faden, der sich von dem Umfange der zweiten, abgewickelten Linie abhebt. Rechnen wir nun die Bogenlänge der Evolute von dem Punkte an, wo das Ende des Fadens auflag, als die Abwickelung begann, und nennen das mit der Zeit veränderliche abgewickelte Stück dieser Krummen s_1, so ist

$$s_1 = \varrho,$$

und folglich aus Gl. 8 und Gl. 3

$$s_1 = -\frac{1}{k(at + C_1)}.$$

Dann wäre

$$\frac{ds_1}{dt} = +\frac{a}{k(at + C_1)^2},$$

und ferner

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -\frac{2a^2}{k(at + C)^3} = -2\sqrt{ak} \cdot \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (9$$

Wenn eine krumme Linie abgewickelt wird, so beschreibt das Ende des gespannten Fadens in jedem Augenblick ein Bogenelement, das rechtwinkelig ist zu der zugehörigen Berührenden der Evolute. Deshalb ist auch der Unterschied in den Richtungen der Bewegung des Fadenendes beim Beginn der Abwickelung und, wenn sie eine bestimmte Zeit gedauert hat, gleich dem Winkel zwischen den Tangenten am Anfange und am Ende des abgewickelten Curvenstückes. Ist nun ε_1 die Neigung der Berührenden der Evolute gegen eine gegebene Axe, so folgt daraus, dass

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = -k.$$

Es steht nun nichts im Wege anzunehmen, dass das freie Theilchen, dessen Bewegung wir in der vorliegenden Schrift untersuchen wollen, sich immer in dem Endpunkte des gespannten Fadens befinde, und dass gleichzeitig in der abgewickelten Curve ein anderes Theilchen an der Stelle sei, wo der Faden sich abhebt. Nach den Grundsätzen, die ich in dem eben wiederholt erwähnten Briefe aufgestellt habe, würde dann dieses zweite Theilchen genau dieselbe Bahn durchlaufen, als ob es in der Richtung der Anfangstangente mit der zugehörigen Schnelligkeit fortgestossen nur durch sein Beharrungsvermögen weitergetrieben, aber durch einen Reibungswiderstand gehemmt würde, dessen Coefficient $2\sqrt{ak}$ ist, und welcher im Verhältnis der $\frac{3}{2}$ten Potenz der Geschwindigkeit wirkt.

Ist

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt},\ b = 2\sqrt{ak},$$

so erhalten wir für die dynamischen Bedingungsgleichungen der relativen Bewegung der letzteren Art (Coordinaten entsprechend x_1 und y_1):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= k\cdot\frac{dy_1}{dt} - b\sqrt{v_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -k\cdot\frac{dx_1}{dt} - b\sqrt{v_1}\cdot\frac{dy_1}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (10$$

Ausdrücke, die durch Anwendung des oben benutzten Verfahrens geben

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{4\cos(\psi - kt)}{(bt + C_1)^2},\quad \frac{dy_1}{dt}\frac{4\sin(\psi - kt)}{(bt + C_1)^2},$$

wobei ψ den Anfangswerth von ε_1 bei $t = 0$ bezeichnet. Die weitere Integration bringt uns die Darstellung der Coordinaten in der Form

$$x_1 = D\int\frac{\cos(\beta u_1)}{u_1^2}du_1 + E\int\frac{\sin\beta u_1}{u_1^2}du_1,$$

y_1 dem entsprechend, sie führt uns also wiederum auf den Integralsinus und den Interpolarcosinus. Den Krümmungshalbmesser dagegen können wir mit Hilfe des von uns aufgestellten allgemeinen Satzes leicht berechnen; es ist

$$\varrho_1 = -\frac{v_1}{k} = -\frac{a}{k^2(at + C_1)^2}.$$

Denken wir uns die bisher betrachtete Evolute wieder durch Abwickelung einer anderen Krummen entstanden und bilden uns ein, dass das freie Theilchen, dessen Bewegung wir eben festzustellen versucht haben, am Endpunkte des gespannten Fadens befestigt sei, und dass in der jetzt abzuwickelnden Linie ein drittes Theilchen sich immer da aufhalte, wo der Faden sich abhebt, so haben wir, wenn wir die Stücke der zweiten Evolute mit dem Index 2 bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} s_2 = \varrho_1 &= -\frac{a}{k^2(C_1 + at)^2}, \\ \frac{ds_2}{dt} &= +\frac{2a^2}{k^2(C_1 + at)^3}, \\ \frac{d^2s}{dt^2} &= -\frac{6a^3}{k^2(C_1 + at)^4} = -c\cdot\left(\frac{ds_2}{dt}\right)^{\frac{4}{3}}, \end{aligned}\right\} \qquad (11$$

wo der Werth der unveränderlichen Grösse c aus der Zusammenstellung unmittelbar erhellt. Da nun in Betreff der Aenderung der Bewegungs-

richtung dasselbe gelten muss, wie oben bei dem Uebergang zur ersten Evolute, so können wir sagen, dass die zweite Evolute die Trägheitsbahn auf wagerechter Ebene in der Breite φ bei dem Vorhandensein eines Reibungswiderstandes vorstelle, der im Verhältnis einer Potenz der Geschwindigkeit steht, welcher der Exponent $\frac{4}{3}$ zukommt. Die Coordinaten dieser Curve x_2 und y_2 selbst können auch nur durch Auflösung in Reihen berechnet werden, da ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$x_2 = D' \int \frac{\cos(\beta u)\, du}{u^3} + E' \int \frac{\sin(\beta u)\, du}{u^3},$$

y_2 dem entsprechend.

Aus der Natur der bisherigen Folgerungen geht aber hervor, dass dieselben sich beliebig weiter fortsetzen lassen. Geht man immer zur Evolute der Evolute über, so ist der Krümmungshalbmesser der Evolvente gleich der Bogenlänge der abgewickelten Linie, und da dieser nach unserem allgemeinen Satze im Verhältnis der ersten Potenz derjenigen Geschwindigkeit steht, mit welcher die zugehörige Krumme durchlaufen wird, so bildet die Schnelligkeit der Bewegung in der Evolvente das Maass für die Curvenlänge der neuen Evolute. Nun wird die Geschwindigkeit eines Körpers längs der Bahn dadurch erhalten, dass man das durchlaufene Bogenstück nach t differentiirt. Folglich haben wir, da die Ableitung von x^{-m} nach t gleich

$$-m x^{-(m+1)} \cdot \frac{dx}{dt},$$

nach n-maliger Abwickelung:

$$\frac{d^2 s_n}{dt^2} = -c_n \left(\frac{ds_n}{dt}\right)^{\frac{n+2}{n+1}}.$$

In Betreff der Bewegungsrichtung würde wieder gelten:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt} = -2w \sin\varphi,$$

so dass wir uns die n^{te} Evolute als die Trägheitsbahn eines Körpers auf wagerechter Ebene vorstellen können, dem sich der Reibungswiderstand entgegenstellt (c_n absolute Zahl)

$$K_s = -c_n \cdot v^{\frac{n+2}{n+1}}.$$

Je grösser nun n, um so weniger unterscheidet sich der Bruch im Exponenten von v_n von der Einheit, und bei $n = \infty$ geht er in

diese über. Die unendlichste Evolute ist demnach die relative Bahn eines Körpers auf wagerechter Ebene, der sich nur unter dem Einflusse seines Beharrungsvermögens und eines tangentialen Widerstandes bewegt, der im geraden, directen Verhältnisse der Schnelligkeit wirkt. Diese Bahn kennen wir schon; es ist eine sich verengende logarithmische Spirale, die mit der gleichmässigen Winkelgeschwindigkeit $-2w\sin\varphi$ durchlaufen wird. Wickeln wir eine solche Curve ab, thun mit der Evolvente das Gleiche und so fort, so nähern sich die durch Abwicklung entstehenden Krummen immer mehr derjenigen, deren Aufsuchung den Vorwurf der gegenwärtigen Schrift bildete. So kommen wir zu dem Schlusse: Wenn die Reibung von dem Quadrate der Geschwindigkeit abhängt und jede treibende Kraft fehlt, so ist die Bahn auf wagrechter Ebene in Beziehung zu der sich drehenden Erde die unendlichste Evolute der logarithmischen Spirale.

Nun ist bekannt, dass bei Abwickelung einer logarithmischen Spirale das Ende des gespannten Fadens wieder eine solche Linie beschreibt. So scheint es denn, als ob wir als Lösung der vorliegenden Aufgabe gefunden hätten, dass die Bahn eine logarithmische Spirale sei, und dass uns mithin die Möglichkeit zu einer endlichen analytischen Darstellung der Coordinaten gegeben sei. Und doch ist diese Hoffnung nur ein Trugbild. Bezeichnet nämlich G eine Constante von der Art, dass

$$s_n = -G(at + C_1)^{-n},$$

so bekomme ich für c_n

$$c_n = \frac{a(n+1)}{\sqrt[+1]{Gna}}.$$

Wenn n unendlich gross ist, wird der Nenner unbestimmt, der Zähler dagegen, weil a immer eine endliche Zahl, unendlich gross, mithin auch c_n unbestimmt. Ist aber der tangentiale Widerstand, welcher sich der Bewegung in der unendlichsten Evolute entgegensetzt, unbestimmt, so ist diese Krumme nicht darstellbar, und ihre Abwickelung gibt keinen Sinn.

Zu einem ähnlichen Ergebnisse gelangt man, wenn man die unveränderlichen bestimmenden Stücke der unendlichsten Evolute der logarithmischen Spirale sucht. Das Verhältnis der Leitstrahlen im Nullpunkte der Zeit ist hierbei: Curve zur unendlichsten Evolute wie 1 : 0. Die von uns zuletzt abgeleitete eigenthümliche Beziehung kann daher keinen Anhalt geben, um einen endlichen Ausdruck für die Coordinaten der gesuchten Bahn zu erfassen. Doch hat sie uns den

Vortheil geboten, dass wir mit einem Male über die Natur aller der Trägheitscurven Aufschluss erhalten haben, bei denen der Reibungswiderstand von einer Potenz von v abhängt, deren Exponent die Form

$$\frac{n+2}{n+1}$$

hat.

Buxtehude, im Juli 1888.

Volumen und Temperatur der Körper, insbesondere der Flüssigkeiten [1]).

Von

Prof. Dr. **A. Weilenmann.**

Die Erscheinung, dass Wasser bei 4° die grösste Dichte habe, ist immer als eine Merkwürdigkeit bezeichnet worden, die mir viel zu denken gab. Die Thatsache der Abnahme des Ausdehnungscoefficienten mit Erniedrigung der Temperatur liess den Schluss ziehen, es müsse auch für die andern Flüssigkeiten zuletzt jener Coefficient Null und hierauf negativ werden. Mithin wäre das Verhalten des Wassers keine Ausnahme, sondern das allgemein giltige Gesetz, nur dass für die meisten Flüssigkeiten das Volumenminimum in gewöhnlichen Verhältnissen unter dem Gefrierpunkte liegt.

Es fehlt aber bis jetzt meines Wissens an einer Erklärung dieser Umkehrung. Das Folgende hat den Zweck, eine solche zu liefern und dieselbe mit den Ergebnissen der Beobachtung zu vergleichen.

Allgemein gilt die Hypothese, dass die Körper aus getrennten Molekülen bestehen, welche durch die Cohäsion zusammengehalten werden. Die Zwischenräume sind mit Aether ausgefüllt zu denken, der möglicherweise Atmosphären um die Moleküle bildet. Diesen Aether haben wir uns als ein Gas zu denken, dessen Moleküle, wie diejenigen des Körpers, in Bewegung sind und so gegen letztere einen Druck ausüben, der das Volumen zu vergrössern sucht. Dem wirkt die Cohäsion entgegen, welche wohl kaum etwas anderes ist, als die gewöhnliche Schwerkraft. Da ich mir eine Kraft nur als eine Eigenschaft sich bewegender Massen denken kann, so muss jene Kraft wohl in einem äusseren Drucke bestehen, wahrscheinlich, wie dies ja von Isenkrahe und anderen ausgesprochen wurde, verursacht durch die äusseren Aethermoleküle. Die Cohäsion würde dann mit der zweiten Potenz des Molecularabstandes abnehmen.

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Züricher Vierteljahresschrift Bd. 33 (1888).

Die Temperatur ist nach der allgemein angenommenen Definition nichts anderes als die kinetische Energie eines Moleküls, sei es ein Körper- oder Aethermolekül.

Die äusseren Aethermoleküle haben, um die Körpermoleküle auf einen gewissen Raum zusammen zu bringen, Arbeit zu leisten, indem der innere Gegendruck überwunden werden muss. Die Arbeit wandelt sich um in potentielle Energie. Der gesammte Betrag letzterer ist gleich der Arbeit, um die Körpermoleküle aus unendlicher Entfernung in die Lage im Inneren des Körpers zu bringen. Die kinetische Energie der Körpermoleküle wirkt diesem äusseren Drucke ebenfalls entgegen. Aber zu letzterem addirt sich jeder andere äussere Druck.

Bezeichnen wir die mittlere Distanz der Moleküle mit r, so lässt sich der gesammte äussere Aetherdruck darstellen durch:

$$A = \frac{k}{r^2} \tag{1}$$

wo k eine Constante ist. Die entsprechende Aenderung der potentiellen Energie von einem bestimmten Anfangszustande an mit der mittleren Distanz r_0 ist dann:

$$E_p' = -k \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}. \tag{2}$$

Die vom äusseren Drucke herrührende Aenderung der potentiellen Energie hängt sowohl von dem Drucke, als der Volumänderung ab. Wenn daher das anfängliche Volumen v_0, am Schlusse v unter dem Drucke p ist, so beträgt dieser Antheil an der Zunahme der potentiellen Energie

$$E_p'' = p\,(v - v_0). \tag{3}$$

Mithin erhalten wir als gesammte Aenderung der potentiellen Energie:

$$E_p = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} + p\,(v - v_0). \tag{4}$$

Bezeichnen wir mit t die gewöhnliche Temperatur, so ist derselben die Zunahme der kinetischen Energie eines Moleküls des Aethers oder des Körpers direct proportional, letztere mithin ausdrückbar durch die Form $\alpha + \beta t$. Ist ferner s die Zahl der Aethermoleküle, s_1 diejenige der Körpermoleküle, E_k die gesammte innere kinetische Energiezunahme, so wird:

$$E_k = (s + s_1)\,(\alpha + \beta t) \tag{5}$$

oder wenn $\frac{\alpha}{\beta} = m$ gesetzt wird:

$$E_k = \beta\,(s + s_1)\,(m + t). \tag{6}$$

Nach dem Principe der Erhaltung der Energie müssen die Werthe in Gl. 4 und 6 gleich sein, also:

$$\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} + p(v - v_0) = \beta(\varepsilon + \varepsilon_1)(m + t). \quad (7$$

Man erhält leicht durch Zerlegung des Körpers in Elementarwürfel von der Seite r

$$v = \lambda^3 r^3 \quad (8$$

wo λ eine Constante ist. Damit gibt Gl. 7:

$$\frac{k\lambda}{v^{\frac{1}{3}}} - \frac{k\lambda}{v_0^{\frac{1}{3}}} + p(v - v_0) = \beta(\varepsilon + \varepsilon_1)(m + t). \quad (9$$

Das Hauptmoment liegt nun in der Anzahl ε der inneren Aethermoleküle. Man ist aus verschiedenen Gründen genöthigt, anzunehmen, dass der Aether die Körper leicht zu durchdringen vermöge, d. h. wenn ein Körper im Raume sich bewege und so den Aether durchschneide, eine grosse Menge des letzteren nicht seitlich ausweiche, sondern wie durch die Maschen eines Siebes hindurch komme. Während bei Verhinderung der Verdunstung die Zahl der Körpermoleküle sicher unverändert bleibt, haben wir uns einen fortwährenden Austausch der inneren und äusseren Aethermoleküle zu denken, ähnlich wie man sich die Verdunstung zurechtlegt. Wir könnten den Vorgang als Aetherverdunstung bezeichnen. Steigt die Temperatur, so erhöht sich im Inneren die kinetische Energie, also auch die Geschwindigkeit, und es treten anfänglich mehr Moleküle aus als ein, ihre Anzahl im Körper vermindert sich, bis schliesslich wieder Gleichgewicht eintritt. Wir werden daher schreiben können:

$$d\varepsilon = -f(t)\,dt. \quad (10$$

Es handelt sich jetzt natürlich um die Festsetzung von $f(t)$.

Für den Gaszustand ist bei dem grossen Abstande der Körpermoleküle die Zahl der inneren Aethermoleküle in der Volumeneinheit gleich der äusseren. Es heben sich daher innere und äussere Aetherenergie auf, d. h. die Cohäsion wird Null, und Gl. 9 vereinfacht sich in

$$p(v - v_0) = \beta\varepsilon_1(m + t). \quad (11$$

Wählen wir m so, dass v_0 als sehr klein verschwindet, so bleibt:

$$pv = \beta\varepsilon_1(m + t) \quad (12$$

d. h. die bekannte Gasgleichung.

Für Flüssigkeiten und feste Körper muss Gl. 9 benutzt werden. Sie gibt:

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{v_0^{\frac{1}{3}}} + \frac{\beta}{k\lambda}(\varepsilon + \varepsilon_1)(m + t) - \frac{1}{k\lambda}p(v - v_0).$$

Wird statt des Volumens die Dichte $d = \frac{1}{v}$ eingeführt, so ergibt sich:

$$d^{\frac{1}{3}} = d_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta}{k\lambda}(\varepsilon + \varepsilon_1)(m + t) - \frac{p}{k\lambda}(v - v_0). \quad (13$$

Hier darf man unter gewöhnlichen Verhältnissen den äusseren Druck p vernachlässigen und folglich genähert schreiben:

$$d^{\frac{1}{3}} = d_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta}{k\lambda}(\varepsilon + \varepsilon_1)(m + t). \quad (14$$

Ich beschränke mich hier auf Flüssigkeiten. Natürlich kommt Gl. 10 in Betracht. Als erstes fiel mir ein, den Verlust an Aethermolekülen der Zahl derselben proportional zu setzen, also:

$$d\varepsilon = -\varrho\varepsilon dt \quad (15$$

und dem entsprechend

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{b^t}. \quad (16$$

Gl. 14 kann dann geschrieben werden:

$$d^{\frac{1}{3}} = \nu + \sigma(m + t) + \lambda\frac{(m + t)}{b^t}. \quad (17$$

Für Wasser stimmen Beobachtung und Rechnung unter Annahme der Werthe

$$m = 273;\ \log b = 0{,}002117;\ \nu = 0{,}46524;$$
$$\log\sigma = 0{,}699649 - 4;\ \log\lambda = 0{,}163730 - 3$$

bis auf einen Unterschied von höchstens drei Einheiten der vierten Decimale im Volumen miteinander überein.

Das Resultat schien mir noch nicht befriedigend genug, weil das Wasser von den verschiedensten Beobachtern auf das Sorgfältigste untersucht war. Endlich fand ich in dem Ausdrucke

$$d\varepsilon = -\varrho\frac{dt}{m + t} \quad (18$$

oder

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \gamma\log(m + t);\ \gamma = \frac{\varrho}{\log e};\ e = 2{,}7182818 \quad (19$$

einen Werth, der die wünschenswerthe Uebereinstimmung von Beobachtung und Rechnung ergab. Aus Gl. 14 folgt dann:

$$d^{\frac{1}{3}} = d_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta}{k\lambda}\left[\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \gamma\log(m + t)\right](m + t) \quad (20$$

oder

$$d^{\frac{1}{3}} = d_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\beta\gamma}{k\lambda}\left[\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\gamma} - \log(m + t)\right](m + t). \quad (21$$

Setzen wir:

$$d_0{}^t = \nu; \quad \frac{\beta\gamma}{k\lambda} = \sigma; \quad \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{\gamma} = \eta$$

so geht Gl. 21 über in

$$d^t = \nu + \sigma\left[\eta - \log(m+t)\right](m+t). \tag{22}$$

Diese Gleichung hat gegenüber Gl. 17 den Vortheil grösserer Einfachheit, indem sie eine Constante weniger besitzt. Die von Rosetti für Wasser aufgestellte empirische Gleichung

$$v = 1 + \alpha(t-4)^3 - \beta(t-4)^{2,6} + \gamma(t-4)^3$$

zeigt fünf Constante, α, β, γ, 4, d. h. die Temperatur des Dichtigkeitsmaximums, und den Exponenten 2,6, indess Gl. 22 nur deren 4 hat. Will man nämlich die Temperatur der Maximaldichte als bekannt voraussetzen, so hat, wie wir sofort sehen, mein Ausdruck 22 nur drei Constante, ν, σ und m, also jedenfalls eine weniger als die Rosetti'sche Formel.

Es sei allgemein t_0 die Temperatur des Dichtigkeitsmaximums. Dann gibt Gl. 22

$$\frac{d\,d^t}{dt} = \sigma\left[\eta - \log(m+t) - \log e\right] \tag{23}$$

folglich für das Dichtemaximum:

$$\eta = \log e + \log(m+t_0) = \log e\,(m+t_0) \tag{24}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Hiermit erhalten wir:

$$d^t = \nu - \sigma\left[\log e\,(m+t_0) - \log(m+t)\right](m+t) \tag{25}$$

oder

$$d^t = \nu + \sigma(m+t)\log\frac{e(m+t_0)}{(m+t)}. \tag{26}$$

Für Wasser ergaben sich folgende Werthe der Constanten:

$$\nu = 0{,}992713; \quad m = 34^0; \quad t_0 = 4^0; \quad \log\sigma = 0{,}644907 - 4.$$

Für die eigentliche Rechnung ist es wohl einfacher, zu setzen

$$\varepsilon = \sigma \log e\,(m+t_0) \tag{27}$$

also hier $lg\,\varepsilon = 0{,}948983 - 4$; $\varepsilon = 0{,}000889167$ und mithin

$$d^t = \nu + \varepsilon(m+t) - \sigma(m+t)\log(m+t). \tag{28}$$

Um zu zeigen, wie weit die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und der Rechnung nach Gl. 28 gehe, stelle ich die Tabelle (S. 665) der Wasservolumina zusammen, die Dichte bei 4^0 gleich 1 gesetzt.

Die erste Reihe nach den Temperaturen gibt die Einheit mit den zwei ersten Decimalen, indess die weiteren Ziffern in den folgenden

Rubriken enthalten sind, da nur in diesen Abweichungen auftreten. Unter K stehen die Zahlen von Kopp, dann folgen diejenigen von Despretz, Jolly, Pierre. R_1 gibt die Beobachtungen von Rosetti; dann kommen Hagen und Matthiessen an die Reihe. R_2 gibt die Rosetti'schen Mittelwerthe, V die revidirten Angaben von Volkmann und W endlich die nach Gl. 28 ermittelten Werthe, denen R_2 zu Grunde gelegt wurde. Es wird wohl Niemand behaupten können, dass dieselben weniger Anspruch auf Giltigkeit erheben dürften als die andern.

t		K	D	J	P	R_1	H	M	R_2	V	W
— 10°	1,00	—	—	—	180	—	—	—	185	—	172
— 5	1,00	—	—	—	071	—	—	—	070	—	067
0	1,00	012	013	013	012	014	013	—	013	012	013
4	1,00	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
10	1,00	025	027	026	027	025	027	027	025	026	026
15	1,00	082	087	085	085	083	085	089	084	085	084
20	1,00	169	179	173	172	174	172	181	174	173	172
30	1,00	419	433	423	420	428	425	435	425	425	426
40	1,00	765	773	763	764	774	771	773	770	770	770
50	1,01	189	205	188	194	191	199	196	195	197	197
60	1,01	672	698	695	724	686	701	696	691	694	695
70	1,02	237	255	238	306	253	268	265	256	261	254
80	1,02	871	885	900	949	884	893	895	887	891	887
90	1,03	552	566	583	642	566	572	581	567	574	572
100	1,04	311	315	312	378	312	297	315	312	323	312

Es liegen auch Beobachtungen vor von Hirn für höhere Temperaturen (Annales de Chimi et de Physique, 4me série, tome X, page 43).

Es ist aber hier nicht mehr möglich, den Einfluss des Druckes zu vernachlässigen, da, um das Sieden zu verhindern, unter einem Drucke von 10,5 m Quecksilber gearbeitet wurde. Die Reihe reicht bis ca. 180°. Was aber gewöhnlich publicirt wird, sind Rechnungsresultate nach einem empirischen, von Hirn selbst aufgestellten Ausdrucke. Dabei liest man, dass die Angaben sich bezögen auf die Dichte 1 bei 0°, während einfach vom Despretz'schen Werthe 1,04315 bei 100° ausgegangen wird, der aber die Dichte 1 bei 4° zur Grundlage hat. Wenn auch die Rechnungsresultate die Beobachtungen genügend genau darstellen mögen, so habe ich es vorgezogen, die directen Beobachtungsergebnisse zu benutzen. Dabei habe ich auch den Zusammendrückungscoefficienten berücksichtigt, welcher nach Grassi

gleich 0,000044 für die Atmosphäre zu setzen ist. So ergibt sich bei 100° aus dem Rosetti'schen Mittelwerthe 1,04312, bei Erhöhung des Druckes um 10,5 m Quecksilber, das Volumen zu 1,04249. Weiter ist zu beachten, dass die Temperaturbestimmung mit einem Quecksilberthermometer ausgeführt worden ist, und derselben nicht die äusserste Genauigkeit zugeschrieben werden darf. Es wird daher nicht zu verwundern sein, wenn die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung höchstens bis zur vierten Decimale geht, weichen ja auch selbst zwischen 0 und 100° die verschiedenen Beobachtungen in der gleichen Stelle voneinander ab.

Zur Ausführung der Rechnung muss auf Gl. 13 zurückgegangen, bezw. 28 durch das letzte Glied von 13 ergänzt werden. So erhalten wir:

$$dt = \nu + \varepsilon(m+t) - \sigma(m+t)\log(m+t) - \eta p(v - v_0). \quad (29$$

Da sich die Zahlen auf das Volumen bei 100° beziehen, so setze ich der Einfachheit wegen $v_0 = 1{,}04249$. Ferner genügt es, zur Berechnung des Druckeinflusses den ersten genäherten Werth von v zu benutzen, wie er sich aus Gl. 29 unter Weglassung des letzten Postens ergibt. Was den Druck selbst anbelangt, so sind zwei Theile zu berücksichtigen. Erstens drückt die Quecksilbersäule von 10,5 m, denn der Atmosphärendruck fällt, als in der früheren Berechnung der Constanten eigentlich inbegriffen, ausser Betracht. Da ferner die Gl. 29 sich statt auf das Volumen nur auf eine Dimension bezieht, so ist von den 10,5 m nur der dritte Theil in Betracht zu ziehen, d. h. 350 cm. Aber ausserdem tritt ein anderer, von allen Seiten wirkender Druck hinzu; es ist die Spannkraft des Dampfes. Die Flüssigkeit kommt zwar nicht zum Sieden, aber wir müssen uns doch vorstellen, dass zwischen der ganzen Flüssigkeitsoberfläche, den Gefässwänden und der Quecksilberfläche sich eine, wenn auch sehr dünne Dampfschicht von der entsprechenden Sättigungsspannkraft bilde, die, als ringsum wirkend, in ihrem ganzen Betrage zu den 350 cm zu addiren sind. 76 cm fallen davon zwar ausser Betracht, die Spannkraft bei 100°, da dies in den früheren Constanten implicite enthalten ist. Bezeichnen wir daher die Spannkraft mit s, so wäre zu setzen:

$$p = 350 + s - 76 = 274 + s. \quad (30$$

Weiter ist zu beachten, dass durch Druck das Dichtemaximum auf tiefere Temperaturen verlegt wird und zwar nach den Angaben von Tait auf ca. 50 Atmosphären 1°. Das bringt auf 10,5 m Quecksilberdruck ungefähr 0,3°, welchen Betrag ich trotz seiner Kleinheit in Berücksichtigung zog. Dem entsprechend wird $t_0 = 3{,}7°$ und nach Gl. 27 dann mit dem früheren Werthe von σ, $\log \varepsilon = 0{,}9482403 - 4$. Natürlich

muss auch ν, die Nulldichte, sich ändern, und für $t = 100^0$ haben wir $v = 1{,}04249$ oder $d^t = 0{,}986225$ und daraus, da der letzte Posten in Gl. 29 hier wegfällt, $\nu = 0{,}993115$.

Die directen Beobachtungen ergeben für $t = 181^0{,}95$ das Volumen $v = 1{,}12878$ und $d^t = 0{,}960424$. Für diese Temperatur ist $s = 787{,}59$ cm. (Regnault), folglich $p = 1061{,}59$ cm. Mit diesen Daten folgt aus Gl. 29: $\log \eta = 0{,}33387 - 5$. Nach einer früher gemachten Bemerkung können wir Gl. 29 mit genügender Genauigkeit, der leichten Berechnung wegen, schreiben:

$$d^t = \nu + \varepsilon (m + t) - \sigma (m + t) \log (m + t) - \eta p (v' - v_0), \quad (31$$

wo v' der unter Weglassung des Gliedes mit p berechnete Näherungswerth ist, welcher auch zur Ermittlung von η diente. Die Constanten wären somit:

$$\nu = 0{,}993115; \quad \log \varepsilon = 0{,}9482403 - 4; \quad \log \sigma = 0{,}6449068 - 4;$$
$$\log \eta = 0{,}33387 - 5; \quad m = 34; \quad v_0 = 1{,}04249.$$

Dabei bemerke ich ausdrücklich, dass zur Ermittlung dieser Werthe von den Hirn'schen Daten nur eine einzige Bestimmung, die bei $181{,}95^0$ zur Ableitung des Druckeinflusses benutzt wurde.

Mit diesen Daten ergibt sich folgende Vergleichstabelle:

t	p cm	Volumen	
		Hirn	Rechnung
100°	—	1,0425	1,0425
109,54	379,9	1,0500	1,0503
119,70	421,7	1,0590	1,0592
129,47	473,8	1,0681	1,0683
140,17	547,0	1,0790	1,0790
151,00	641,7	1,0904	1,0905
160,68	747.2	1,1016	1,1016
171,60	893,2	1,1149	1,1150
181,95	1061,6	1,1288	1,1288

Geringe Aenderungen der Angaben des Quecksilberthermometers würden vollständige Uebereinstimmung herbeiführen. Ferner ist zu beachten, dass aus Mangel an anderen Daten über die Ausdehnung des Kupferbehälters, der das zu untersuchende Wasser enthielt, der Ausdehnungscoefficient des Kupfers constant genommen werden musste. Die unter Hirn gegebenen Zahlen sind direct aus dessen Beobachtungen berechnet. Ich will in kurzem das Verfahren skizziren. Nach Hirn's Versuchen war der Inhalt des kupfernen Wasserbehälters bei 0^0 $v_0 =$

$= 7{,}9254$ l, der Ausdehnungscoefficient des Gefässes gefunden $\gamma =$ $= 0{,}00005024$ und somit das Volumen v bei t^0

$$v = v_0 (1 + \gamma t).$$

Da 0,999871 die Wasserdichte bei 0°, so fasst der Behälter bei dieser Temperatur 7,924376 kg Wasser. Bei 100°, dem specifischen Volumen 1,04249 entsprechend, befinden sich darin noch 7,640568 kg. Die Beobachtungen Hirn's beginnen aber mit 101,7° und laufen nach dessen Ermittlungen bis dahin noch 0,008767 kg aus, d. h. bei 101,7° befinden sich im Dilatometer noch 7,631801 kg Wasser. Das bei weiterer Frwärmung austretende Wasser verdrängt eine gewogene Masse Quecksilber Q, indem jenes eine bestimmte Temperatur t_1 annimmt. Bei dieser hat das Wasser beim Druck von 10,5 m Quecksilber oder 13,8 Atmosphären ein bestimmtes Volumen v_1. Wird mit q der kubische Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers bezeichnet, so erhalten wir als ausgeflossene Wassermasse:

$$w = \frac{(1 + q\,t_1)\,Q}{13{,}596 \cdot v_1}. \tag{32}$$

Die noch im Dilatometer befindliche Wassermasse beträgt dann:

$$m = 7{,}631801 - w \text{ kg} \tag{33}$$

folglich das specifische Volumen des Wassers:

$$v = \frac{v_0(1 + \gamma t)}{m}. \tag{34}$$

Z. B. Von 101,7° bis 181,95° flossen aus: $Q = 7{,}4146$ kg Hg. bei $t_1 = 28°$. Bei dieser Temperatur ist der Zusammendrückungscoefficient des Wassers 0,0000453, sein Volumen nach Rosetti's Mittelwerthstabelle 1,003682 bei Atmosphärendruck, folglich

$$v_1 = 1{,}003682 - 0{,}0000453 \times 13{,}8 \times 1{,}003682 = 1{,}003055$$

also

$$w = 0{,}546434 \text{ kg}; \; m = 7{,}085367; \; v = 1{,}12878.$$

Trotz der gewiss vollständig befriedigenden Uebereinstimmung will ich nicht behaupten, dass die unter Gl. 18 gemachte Annahme die absolut richtige sei; aber sie genügt vollständig. Es ist insbesondere zu bemerken, dass für $t = -34^0$ $d^{\frac{1}{3}} = v$ und unter dieser Temperatur sowohl Gl. 28 als auch Gl. 31 illusorisch werden.

Sollte Gl. 18 doch der richtige Ausdruck sein, so müssten wir nothwendigerweise den experimentell wohl nicht erwiesenen Schluss ziehen, dass es unmöglich sei, selbst bei Anwendung eines noch so grossen Druckes das Wasser unter — 34° flüssig zu erhalten. Dafür würde zwar der Umstand sprechen, dass nach Mousson ca. 13000 At-

mosphären Druck nöthig waren, um Eis bei einer Temperatur von — 18° flüssig zu machen.

Es ist wohl von Interesse, die gefundenen Ausdrücke auch an anderen Flüssigkeiten zu prüfen. Dieselben sind zwar kaum so eingehend untersucht worden wie das Wasser, und es wird auch nicht derselbe Grad der Uebereinstimmung zu erwarten sein, wie bei letzterem. Eine ausgiebige Beobachtungsreihe liegt mir vor für Alkohol in Verbindung der älteren Beobachtungen von Kopp (Poggendorf Annalen Bd. 12, 1847, S. 54), die von 0° bis 80° reichen, mit denen von Recknagel (Münchener Sitzungsber. Bd. 2, 1866, S. 327), welche das Intervall von — 40° bis + 40° umfassen. Während ersterer die Temperaturen mit dem Quecksilberthermometer ermittelt, benutzt letzterer hierzu das Luftthermometer. Es zeigte sich, dass σ und $(m + t_0)$, also auch ε, dieselben Werthe besitzen wie bei Wasser, nämlich:

$$\log \varepsilon = 0{,}948983 - 4;\ \log \sigma = 0{,}644907 - 4;\ m + t_0 = 38°.$$

Ferner ergab sich $m = 233°$; $\nu = 1{,}03649$.

Nachfolgende Tabelle enthält die Vergleichung von Beobachtung und Rechnung (Gl. 28). Sie sind nur auf vier Decimalen angegeben, da auch die einzelnen Versuchsreihen um mehrere Einheiten dieser Stelle voneinander abweichen.

Die erste Reihe enthält die Temperaturen, die zweite (B) die beobachteten, die dritte (R) die berechneten Volumina.

t	B	R	t	B	R
— 40°	0,9608	0,9610	+ 20°	1,0213	1,0212
— 30	0,9702	0,9700	+ 30	1,0324	1,0326
— 20	0,9798	0,9795	+ 40	1,0441	1,0444
— 10	0,9898	0,9893	+ 50	1,0562	1,0566
0	1,0000	0,9996	+ 60	1,0691	1,0694
+ 10	1,0105	1,0102	+ 70	1,0828	1,0827
			+ 80	1,0973	1,0964

Wenn ich alle Constanten aus den Daten des Alkohols bestimmt hätte, so wäre natürlich die Uebereinstimmung eine weitergehende geworden; aber es lag mir daran, einzelne des Wassers benutzen zu können.

Nun hat Recknagel auch noch eine Vergleichung des Alkoholthermometers mit dem Luftthermometer gegeben, die bis 80° geht. Das Volumen des Weingeistes im Thermometer sei v_0 bei 0°, k das Volumen eines Theilstriches, t' die Angabe des Alkoholthermometers,

t diejenige des Luftthermometers, γ der kubische Ausdehnungscoefficient des Glases und m die Alkoholmasse. Dann ist das Volumen bei t^0 gleich $(v_0 + kt')\,(1 + \gamma t)$ und somit die Dichte des Alkohols:

$$d = \frac{m}{(v_0 + kt')(1 + \gamma t)} = \frac{m}{v_0}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{k}{v_0}\,t'\right)(1 + \gamma t)} \tag{35}$$

somit wegen der Kleinheit des Bruches $\frac{k}{v_0}$ und von γ

$$d^1 = \left(\frac{m}{v_0}\right)^1 \frac{1}{\left(1 + \frac{kt'}{3\,v_0}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{3}\,t\right)} = \left(\frac{m}{v_0}\right)^1 \frac{1}{1 + \frac{k}{3\,v_0}\,t' + \frac{\gamma}{3}\,t}$$

oder

$$d^1 = \left(\frac{m}{v_0}\right)^1 \left(1 - \frac{k}{3\,v_0}\,t' - \frac{\gamma}{3}\,t\right) = \tag{36}$$
$$= \nu + \varepsilon\,(m + t) - \sigma\,(m + t)\log\,(m + t).$$

Dies gibt, wenn α, β, γ Constante sind:

$$t' = \alpha - \beta t + \gamma\,(m + t)\log\,(m + t). \tag{37}$$

Nun wird

$$\frac{dt'}{dt} = \beta + \gamma \log e - \gamma \log\,(m + t) \tag{38}$$

und für das Dichtemaximum

$$\beta = \gamma\,[\log e + \log\,(m + t_0)], \tag{39}$$

wobei nach dem vorhergehenden

$$m = 233^0 \qquad m + t_0 = 38^0,$$

also

$$\log \beta = \log \gamma + 0{,}30407. \tag{40}$$

Die Beobachtungen bei 0^0 und -80^0 geben dann ferner $\alpha = -682{,}01$, $\log \gamma = 0{,}09217$, somit auch $\log \beta = 0{,}39624$ und damit folgende Vergleichung zwischen den von Recknagel gegebenen (I) und den nach Gl. 37 berechneten Werthen (II) von t':

t	0^0	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80
t'	I. 0	$-9{,}6$	$-19{,}1$	$-28{,}2$	$-37{,}0$	$-45{,}6$	$-53{,}9$	$-61{,}9$	$-69{,}5$
	II. 0	$-9{,}64$	$-19{,}01$	$-28{,}12$	$-36{,}99$	$-45{,}58$	$-53{,}87$	$-61{,}86$	$-69{,}50$

Die Recknagel'schen Werthe sind in Wirklichkeit nur aus den anderweitigen Volumbeobachtungen zwischen $+40^0$ und -40^0 berechnet, und letztere von -40^0 bis -80^0 interpolirt nach dem Ausdrucke

$$v = 1{,}0000 + 0{,}00104\,t + 0{,}0000015\,t^2.$$

Zur weiteren Untersuchung habe ich noch die Ausdehnungsbeobachtungen einiger Flüssigkeiten durch Kopp benutzt. Bei Methylalkohol konnten die Werthe von ε und σ, somit auch $(m + t_0)$ wieder gleich genommen werden wie bei Wasser. Dagegen ergab sich: $m = 269$, $\nu = 1{,}04937$, und damit folgende Vergleichung der beobachteten und berechneten Volumina:

t	B	R	t	B	R
0°	1,0000	1,0000	40°	1,0475	1,0481
10	1,0115	1,0114	50	1,0605	1,0612
20	1,0232	1,0233	60	1,0742	1,0746
30	1,0351	1,0355	65	1,0815	1,0815

Während wir bei den drei bis jetzt besprochenen Flüssigkeiten ε und σ mithin auch $(m + t_0)$, dieselben Werthe erhielten, weichen die drei Fettsäuren: Ameisensäure, Essigsäure, Buttersäure von jenen ab, jedoch in der Art, dass die erwähnten Constanten auch für letztere drei Stoffe gleichwerthig sind, nämlich:

$\log \varepsilon = 0{,}56635 - 4$; $\log \sigma = 0{,}41024 - 3$; $m + t_0 = 9{,}96°$.

Für die Ameisensäure ergab sich ferner:

$$m = 173;\ \nu = 1{,}03582,$$

und hieraus die Vergleichstabelle:

t	B	R	t	B	R
0°	1,0000	1,0001	60°	1,0631	1,0631
10	1,0100	1,0098	70	1,0746	1,0748
20	1,0202	1,0198	80	1,0865	1,0867
30	1,0305	1,0301	90	1,0987	1,0990
40	1,0411	1,0408	100	1,1115	1,1116
50	1,0519	1,0518	105	1,1180	1,1180

Für die Essigsäure ist

$$m = 212;\ \nu = 1{,}04874$$

also:

t	B	R	t	B	R
0°	1,0000	0,9997	70°	1,0782	1,0791
10	1,0106	1,0104	80	1,0907	1,0917
20	1,0213	1,0211	90	1,1036	1,1046
30	1,0321	1,0319	100	1,1172	1,1178
40	1,0432	1,0434	110	1,1313	1,1313
50	1,0545	1,0550	115	1,1386	1,1383
60	1,0662	1,0669			

Buttersäure:

$$m = 200;\ \nu = 1{,}04468.$$

t	B	R	t	B	R
0°	1,0000	1,0000	80°	1,0901	1,0902
10	1,0105	1,0102	90	1,1027	1,1029
20	1,0212	1,0207	100	1,1157	1,1159
30	1,0320	1,0317	110	1,1291	1,1294
40	1,0431	1,0427	120	1,1430	1,1431
50	1,0544	1,0540	130	1,1574	1,1573
60	1,0660	1,0658	140	1,1724	1,1715
70	1,0778	1,0778	150	1,1879	1,1864

Die angeführten Beispiele ergeben also folgende Zusammenstellung:

$$\log \varepsilon = 0{,}948983 - 4;\ \log \sigma = 0{,}644907 - 4;\ m + t_0 = 38^0$$

			m	ν
Wasser	$\frac{H}{H}$	O	34	0,99271
Aethylalkohol	$\frac{C_2H_5}{H}$	O	233	1,03649
Methylalkohol	$\frac{CH_3}{H}$	O	269	1,04937

$$\log \varepsilon = 0{,}56635 - 4;\ \log \sigma = 0{,}41024 - 4;\ m + t_0 = 10^0$$

			m	ν
Ameisensäure	$\frac{CHO}{H}$	O	173	1,03582
Essigsäure	$\frac{C_2H_3O}{H}$	O	212	1,04874
Buttersäure	$\frac{C_4H_7O}{H}$	O	200	1,04468.

Hieraus würde sich ergeben, dass jedenfalls eine bestimmte Uebereinstimmung zwischen der chemischen Constitution und den Ausdehnungsconstanten besteht. Welcher Art dieselbe aber sei, vermag ich zur Zeit noch nicht zu übersehen. Die Erwartung, dass sämmtliche Alkohole dieselben Werthe von ε und σ besitzen, wird z. B. nicht erfüllt durch den Amylalkohol $\frac{C_5H_{11}}{H}$O, für welchen aus den Kopp'schen Beobachtungen erhalten wird:

$$m = 187;\ \nu = 0{,}98909;\ \log \varepsilon = 0{,}24301 - 3;$$
$$\log \sigma = 0{,}87189 - 4;\ m + t_0 = 82{,}4^0.$$

Was übrigens unter B angeführt ist, sind nicht die directen Kopp'schen Beobachtungen, sondern von ihm durch bis zur dritten Potenz der Temperatur reichende Interpolationsformeln berechnet. Die

einzelnen Versuchsreihen weichen bis zu mehreren Einheiten der vierten Decimale voneinander ab, und ist überdies zu erwarten, dass die Rechnungsresultate zweier ganz verschiedener Ausdrücke nicht völlig übereinstimmen werden. Eine Fehlerquelle liegt natürlich auch darin, dass die Temperaturen durch Quecksilberthermometer gegeben sind.

Die Gl. 28 ist in Bezug auf m transcendent, und ich will hier zeigen, wie man einen sehr angenäherten Werth dafür erhalten kann, wenn eine Beobachtungsreihe vorliegt.

Für Amylalkohol ist für 60° $d^1 = 0{,}98116$, für 70° $d^1 = 0{,}97770$, daher die Differenz $= -0{,}00346$, folglich bei $t = 65°$ der angenäherte Werth des Differentialquotienten gleich $-0{,}000346$, und ähnlich in anderen Fällen. Wir können also die Werthe des ersten Differentialquotienten als angenähert bekannt voraussetzen und sollen dieselben mit a bezeichnet werden. Dann lautet Gl. 23:

$$a = \varepsilon - \sigma \log (m + t) - \sigma \log e$$

oder

$$\sigma \log (m + t) = \varepsilon - \sigma \log e - a. \qquad (41$$

Mit Benutzung dieses Werthes geht 28 über in

$$d^1 = \nu + (m + t)\,\sigma \log e + a\,(m + t). \qquad (42$$

Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \nu + \sigma m \log e &= x \\ \sigma \log e &= y \\ d^1 - at &= s, \end{aligned}\right\} \qquad (43$$

so bekommen wir

$$s = x + ty + am. \qquad (44$$

Hier sind s, t und a bekannt und können somit die drei Constanten x, y und m berechnet werden.

Es wäre von Interesse gewesen, die Untersuchung jeweilen bis zur kritischen Temperatur zu verfolgen und eine Vergleichung mit den Ergebnissen von Van der Waals, de Heen, Clausius, Avenarius, Grimaldi, Nadeschdin etc. anzustellen. Es mangeln mir aber augenblicklich die nöthigen Daten und wird sich dies vielleicht später machen lassen. Uebrigens betrachte ich die Sache durchaus nicht als abgeschlossen. Gl. 10 kann noch auf verschiedene Art interpretirt werden. Dann ist es auch nicht ganz sicher, dass in so kleinen Distanzen, wie es die Molecularabstände sind, die Schwerkräfte mit der zweiten Potenz der Entfernung abnehmen. Das Hauptgewicht lege ich darauf, dass es gelungen ist, durch das Princip der Veränderlichkeit der Aethermolekülzahl im Innern eines Körpers einen Ausdruck zu erhalten, der dem Verhalten des Wassers vollständig gerecht wird, seine Ausnahmestellung beseitigt und zugleich ungezwungen zu den Gasgesetzen führt.

Ueber die Einführung in die beiderlei elektrischen Systeme.

Von

A. Kurz.

Angeregt durch Chwolson's Notiz desselben Betreffs S. 294—297 erlaube ich mir vorzuschlagen, statt des dem Neuling fremderen „magnetischen Feldes" mit der magnetischen Kraft zu beginnen, wie ich nachher zeigen werde.

Vorher möchte ich noch an dem Sprachgebrauche rütteln „die Dimension", während es sich meines Erachtens um den Plural handelt, d. i. um die drei Exponenten $x\,y\,z$ im allgemeinen Ausdrucke

$$M^x\,L^y\,T^z.$$

Wie im elektrostatischen Systeme die elektrische Kraft gleich 1 mal

$$\frac{e\,e_1}{r^2}$$

gesetzt werden kann, was zur Dimensionirung des Elektricums e im elektrostatischen Systeme führt: so ist im elektromagnetischen Systeme die magnetische Kraft gleich 1 mal

$$\frac{\mu\,\mu_1}{r^2},$$

also für e dort und μ hier

$$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{3}{2} \quad z = -1.$$

Auch hat man noch jenen Factor 1 beibehalten im Biot-Savart'schen Gesetze

$$\text{Kraft} = \frac{i\,ds \cdot \mu \sin\alpha}{r^2} \text{ in beiden Systemen,}$$

während der Factor C nothwendig wird für die elektrische Kraft im elektromagnetischen Systeme

$$C \cdot \frac{e\,e_1}{r^2}.$$

Wegen der vorletzten Gleichung (Biot-Savart) wird

$$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2} \quad z = 0$$

für das Magneticum (magnetische Masse) im elektrostatischen Systeme und für das Elektricum (elektrische Masse) im elektromagnetischen Systeme,

(i gleich Elektricum durch Zeit).

Und wegen der letzten Gleichung wird C gleich dem Quadrate der kritischen (Licht-) Geschwindigkeit.

Nun zum Potential (elektrisch wie magnetisch): Zur Einführung dieses Begriffes zwingt uns das Princip der Arbeit:

Masse mal Potential gleich Arbeit,

wobei das elektrische Potential gemeint ist, wenn die elektrische Masse der erste Factor ist und analog das magnetische Potential.

Da beide Potentiale in den beiderlei Systemen vorkommen können (in welchen alsdann auch die zugehörige Masse zu nehmen ist), so liegen also vier Aufgaben der Dimensionirung vor, welche durch obiges Princip sofort erledigt werden können. So, um mit Chwolson's citirtem Aufsatze Fühlung zu bekommen, ist das elektrische Potential im elektrostatischen System

$$v = e : \varrho,$$

über dessen Herkommen Verfasser sich nicht näher ausspricht (es als bekannt voraussetzend).

Dieselben Dimensionen muss auch das magnetische Potential im elektromagnetischen System erhalten, weil e und μ in den beiden Systemen dieselben Dimensionen haben. (Vom Verf. nicht erwähnt.)

Dagegen erwähnt Chwolson, was unsere dritte der vier Aufgaben sein kann, das elektrische Potential V im elektromagnetischen Systeme, welches, da

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \cdot (\text{Dim. } V) = M L^2 T^{-2}$$

(das ist Arbeit), die Dimensionen hat

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = -1.$$

Endlich viertens das magnetische Potential W im elektrostatischen System

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \cdot (\text{Dim. } W) = M L^2 T^{-2}$$

liefert

$$\text{Dim. } W = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$$

(vom Verf. nicht erwähnt).

Von diesem allgemeineren Gesichtspunkte aus scheint mir der vorletzte Absatz in Chwolson's Mittheilung in Wegfall kommen zu müssen; derselbe ist wahrscheinlich dadurch entstanden, weil das oben genannte v ohne Begründung eingeführt wurde, und nur das V den Titel und Zweck der Mittheilung bildet.

Dieses kann dann allerdings, in Anwendung desselben Princips, wie dort auch aus der

$$\text{Kraft} = C \cdot \frac{e\, e_1}{\varrho^2},$$

gefunden werden, indem man das eine ϱ vom Nenner als Factor zur Kraft setzt, also

$$\text{Arbeit} = \frac{Ce}{\varrho} \cdot e_1,$$

so dass

$$V = C\frac{e}{\varrho}$$

(S. 296 steht als Gl. 7 $v = C\frac{e}{\varrho}$) resultirt. Aber mir scheint dies eher ein, wenn auch kleiner Umweg, zu sein.

Zum Schlusse komme ich nochmals auf das eingangs erwähnte magnetische Feld. Dies bringt auch Herwig in seinen „Physikalischen Begriffen etc." erst nach dem Potential. Gewiss kann man es ebenso gut vorher einführen, indem man von μ auf $(\mu 2l)$, das magnetische Moment, übergeht und, was diesem noch zum allgemeinen Begriffe des Drehungsmomentes abgeht, als das genannte Feld definirt. Aber über das Feld zum Potential zu gehen, ist gemäss Obigem wieder ein wenn auch nicht grosser, Umweg [1]).

1) Zu S. 296 Z. 6 v. u.: Der „um C grössere Werth" als u ist $C + u$, nicht $C \cdot u$. Ich bekämpfe auch den noch weit herrschenden Ausdruck „C mal grösser" für $C \cdot u$, der „C mal so gross" heissen sollte.

Im Verlag von R. Oldenbourg in München und Leipzig ist erschienen:

Leitfaden

zur

Anfertigung mikroskopischer Dauerpräparate

von

Otto Bachmann.

Lehrer an der kgl. Ackerbauschule in Landsberg a. L.

Mit 87 Abbildungen. Preis broschirt M. 4.—. geb. M. 5.—.

Über 500 Illustrationstafeln und Kartenbeilagen.

Verlag des Bibliograph. Instituts in Leipzig.

Achtzig Aquarelltafeln.

3000 Abbildungen im Text.

MEYERS

KONVERSATIONS-LEXIKON

VIERTE AUFLAGE.

Das 1. Heft und den 1. Band liefert jede Buchhandlung zur Ansicht.

256 Hefte à 50 Pfennig. — 16 Halbfranzbände à 10 Mark.

(12.10)

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdriefsen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden."

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(10/10)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (9|10)

Im Verlage von **Quandt & Händel** in **Leipzig** ist erschienen; zu beziehen durch alle Buchhandlungen:

Einführung in das physikalische Praktikum.

Von **R. T. Glazebrook** und **W. N. Shaw**, Demonstratoren der Physik am Cavendish-Laboratorium in Cambridge. Deutsch herausgegeben von **W. Schlösser.** Mit 86 Fig. Preis 7 M. 50 Pf.

Physikalische Demonstrationen.

Anleitung zum Experimentiren im Unterricht an Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und Gewerbschulen. Von Dr. **Ad. F. Weinhold**, Professor an den techn. Staatslehranstalten in Chemnitz. Mit 4 lithogr. Tafeln und 517 Holzschnitten. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Preis 22 M. 50 Pf. (13|10)

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Ueber den gegenwärtigen Stand

der

elektrischen Beleuchtung.

Bericht

an den Verein der Gas- und Wasserfachmänner Deutschlands

erstattet von

Dr. Schilling sen.

Octav. 45 Seiten. *Brochirt Preis 70 Pf.*

22

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 11. Heftes.

Weitere Beobachtungen über atmosphärische Elektricität. Von Prof. Franz Exner. S. 677.
Der Fernmessinductor, ein neues elektrisches Instrument. Von Dr. Paul Moennich. S. 696.
Ueber das elektrische Verhalten des Quarzes. II. Von Dr. Paul Czermak. S. 702.
Ueber störende Einflüsse am Bunsen'schen Photometer und diesbezügliche Abänderungen. Von Dr. B. Nebel. S. 724.
Ein Feind der Isolation elektrischer Hausleitungen. Von Dr. B. Nebel. S. 731.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist **soeben** erschienen:

Der sechste Jahrgang 1889
des
Kalender für Elektrotechniker.
Herausgegeben von
F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant gebunden Preis 4 M.

Der vorliegende Jahrgang hat wiederum eine gründliche Umarbeitung und an vielen Stellen Erweiterungen erfahren. Es war das eifrigste Bestreben des Herausgebers dem Kalender jene Qualitäten zu verleihen, welche denselben befähigen ein täglicher Begleiter und zuverlässiger Rathgeber der Elektrotechniker zu sein. Die für den Arbeitstisch bestimmte mit dem vorigen Jahrgang ausgegebene Beilage ist dem neuen Jahrgange nicht wieder beigegeben worden, da sich wesentliche Aenderungen nicht für nöthig erwiesen. Die Verlagshandlung hat noch eine Anzahl dieser Beilagen, welche Käufern des neuen Jahrganges, die den vorigen nicht besitzen, gegen Vergütung von 60 Pf., noch zu Diensten stehen; das Inhaltsverzeichniss dieser Beilage ist abgedruckt im Inseratentheile der Nr. 1 des Centralblattes für Elektrotechnik 1888. Der Inhalt des neuen Jahrganges wolle aus Nachstehendem gefl. ersehen werden.

Inhaltsverzeichniss des Taschenbuches.

Seite

I. Mathematik.

1. Die Logarithmen der natürlichen Zahlen 2
2. Die trigonometrischen Zahlen . . 4
3. Die Logarithmen der trigonometrischen Zahlen 5
4. Tabelle der Quadrate, Cuben, Quadrat- u. Cubikwurzeln, Reciproken, natürl. Logarithmen, Kreisumfang und Kreisinhalt aller natürlichen Zahlen von 1—1000 11
5. Tabelle zur Verwandlung von gemeinen Logarithmen in natürliche und umgekehrt 34
6. Die ersten 12 Potenzen der Zahlen 1 — 12 35
7. Maass- und Gewichtstabellen . 35
   Metrisches Maass 35
   England 36
   Russland 36
   Reduction des Metermasses auf englisches Maass und umgekehrt 37
8. Logarithmen oft vorkommend. Zahlen 39
9. Dimensionen der Erde 39

II. Physik.

A. Mechanik 40
   Tafel der specifischen Massen oder Dichtigkeiten einiger Körper . 40
B. Akustik 42
C. Optik 43
   1. Lichtmessungen (Photometrie) . 43
   2. Reflexion 56
   3. Refraction (Linsen) 56
   4. Dispersion 56
D. Wärme 57
   1. Thermometer 57
   2. Ausdehnung durch die Wärme . 58
   3. Dichte des Wassers bei Temperaturen von 0° und 100° C. . 58
   4. Tabelle für die Werthe von $1 + 0{,}00366\,t$ von $-2°$ bis $+30°$ C. 59
   5. Schmelzpunkte verschied. Substanzen 59
   6. Schwindmaasse 59
   7. Siedepunkte verschiedener Substanzen bei 760 mm Druck . . 59
   8. Tabelle d. Spannkraft d. Wasserdampfes in Atmosphären für die Temperatur von 100° bis 330°C. 60
   9. Latente Wärme 60
   10. Mechanisches Aequivalent der Wärme 60
   11. Specifische Wärme 60
   12. Innere Wärmeleitung 61
   13. Aeussere Wärmeleitung . . . 62
   14. Verbindungswärme 62
E. Magnetismus und Elektricität . . 64
   1. Westliche Declination der Magnetnadel für Deutschland . . 64
   2. Horizontale Intensität des Erdmagnetismus 65
   3. Pole, Axe, Moment und Intensität der Magnetisirung von Stabmagneten 65
   4. Herstellung der Stahlmagnete . 66
   5. Magnetisches Feld 66
   6. Magnetische Induction . . . 68
   7. Magnetische Permeabilität und Susceptibilität 68

Seite

   8. Magnetisirung von Eisen und Stahl 69
   9. Hysteresis 70
   10. Einfluss der Temperatur auf die Magnetisirung 72
   11. Elektrische Spannungsreihen . 72
   12. Ohm'sches Gesetz 73
   13. Capacität 73
   14. Kirchhoff'sche Gesetze . . . 74
   15. Berechnung des Widerstandes in körperlichen Leitern . . 76
   16. Ampère'sches Gesetz 78
   17. Induction 81
   18. Joule'sches Gesetz 82

III. Elektrotechnik.

A. Elektrisches Maassystem 83
   a) Absolutes elektromagnetisches Maassystem 83
   b) Vergleich zwischen absolutem elektromagnetischen und elektrostatischem System 83
   c) Praktisches vom Pariser Congress 1881 adoptirtes Maassystem . 83
   d) Grössere technische Einheiten . 84
   e) Vergleichstabellen 84
B. Tabellen über das elektrische Verhalten der Körper 85
   a) Metalle 85
   b) Kohlenstäbe 95
   c) Isolatoren 96
   d) Flüssigkeiten 96
   e) Specifische Inductionscapacität . 97
   f) Tabelle über Polarisation . . 98
   g) Tabelle der thermoelektr. Kraft 98
   h) Der absolute Nullpunkt der Elektricität 98
C. Elektrische Messmethoden . . . 98
   1. Elektricitätsmenge 99
   2. Stromstärke 100
   3. Spannung 108
   4. Widerstand 116
      Construction der Widerstandskästen 140
   5. Capacität 142
      Herstellung der Condensatoren 144
   6. Effect 145
D. Dynamoelektrische Maschinen . 149
   a) Schaltungen 149
   b) Construction und Prüfung der Dynamomaschinen 152
      Wechselstrommaschinen . . . 163
      Transformatoren 163
   c) Die gebräuchlichsten Dynamomaschinen 164
E. Elektrische Beleuchtung 180
   a) Bogenlicht 180
   b) Construction und Herstellung der Glühlampen 183
   c) Beleuchtungsstärke, Berechnung der erforderlichen Lichtstärke . 187
   d) Systeme der Stromvertheilung . 189
   e) Einrichtung der Centralen . . 190
   f) Berechnung der Leitungen . . 190
   g) Ausführung der Leitungen . . 192
   h) Sicherheitsvorschrift für elektrische Anlagen 197
   i) Beanspruchung der Centralen und Gestehungskosten des Lichts . . 202
F. Elektrochemie 203
   a) Die galvanischen Batterien . . 203
      1. Elektromotorische Kraft und Widerstand 203
      2. Effect 206

Seite

      3. Herstellung einiger Elemente 206
         Normalelemente 207
   b) Accumulatoren 209
   c) Elektrolyse 215
   d) Galvanoplastik 216
      1. Allgemeine 216
      2. Die Bäder 217
   e) Elektrometallurgie 220
G. Die elektrische Kraftübertragung . 225
   a) Die Theorie in erster Annäherung 225
   b) Genauere Theorie 225
   c) Berechnung v. Kraftübertragungen 226
H. Elektrische Kraftvertheilung . . 227
J. Construction und Prüfung der Blitzableiter 227
K. Telegraphen-Technisches 231
   a) Leitungsmaterial 231
      1. Hölzerne Stangen 231
      2. Eiserne Stangen, Träger, Stützen der Isolationsvorrichtungen . 232
      3. Isolatoren 232
      4. Leitungsdraht 232
      5. Angabe über die zu Telegraphen-Anlagen gebräuchlichsten Sorten der Telegraphendrähte . 233
      6. Zusammenstellung der Bedingungen für die Prüfung von Telegraphendrähten 233
      7. Spannung und Durchhang von Telegraphenleitungen . . . 233
      8. Vergleichende Zusammenstellung der Versuchsergebnisse mit Telegraphen- und Telephondrähten 239
      9. Vergleichstabelle von Telephondrähten aus verschiedenem Material bei gleichem Leitungswiderstande von 68 SE. für 1 Km und + 150 C. 240
   b) Bestimmung von Fehlern in den Leitungen 241
      1. Fehlerbestimmungen bei oberirdischen Leitungen . . . 241
      2. Fehlerbestimmungen bei Kabeln 243
   c) Erdleitungen 250
      1. Herstellung von Erdleitungen 251
      2. Messen von Erdleitungswiderständen 251
   d) Das Morse-Alphabet 252
   e) Sprechgeschwindigkeit 253

IV. Gemeinnütziches.

Deutsches Reichspostwesen 254
Deutsches Reichstelegraphenwesen . 256
Disconto-Tabelle 257
Wechselstempel im Deutschen Reich . 258
Münztabelle 258
Normen für die Berechnung des Honorars für maschinentechnische und Ingenieurarbeiten 259
Geographische Lage einiger Städte im mittleren Europa, bezogen auf den Meridian von Ferro 262
Tabelle der im elektrotechnischen Theil gebrauchten Symbole 264

Bezugsquellen.
Kalendarium und Notizkalender
für jeden Tag. Von Anfang November 1888 bis Ende December 1889.
Notizblatt für Adressen.
Fachliche Anzeigen.
Verzeichniss der Elektrotechniker als Beilage

Weitere Beobachtungen über atmosphärische Elektricität[1]).

Von

Prof. **Franz Exner.**

In einer Abhandlung „Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft“ [2]) habe ich jene Beobachtungen mitgetheilt, die ich in fortlaufender Reihe von August 1886 bis Mai 1887 über das Potentialgefälle an der Erdoberfläche bei normalem Wetter angestellt habe; dieselben ergaben eine gewisse Relation zwischen dieser Grösse und dem Wassergehalte der Luft, derzufolge einem jeden Dunstdruck ein bestimmter Werth des Potentialgefälles zukommt.

Da die absoluten Messungen auf diesem Gebiete immer noch sehr spärliche sind, indem die Beobachtungen der Luftelektricität an fixen Stationen [3]) nur relative, mit denen anderer nicht vergleichbare Werthe liefern, so habe ich im Hochsommer 1887 noch eine weitere Reihe von Messungen unternommen; der hauptsächlichste Zweck derselben war der, durch Vergleichung mit den Resultaten des vorangegangenen Jahres die Frage zu entscheiden, ob eine durch mehrere Wochen fortgesetzte Beobachtungsreihe im Stande ist, einen verlässlichen Mittelwerth zu liefern. Es hat sich dabei gezeigt, dass trotz der beträchtlichen Schwankungen der Einzelwerthe die Mittel der älteren und der diesjährigen Beobachtungen in fast vollkommener Uebereinstimmung stehen. Man kann demnach einen aus mehrwöchentlichen Beobachtungen bei normalem Wetter abgeleiteten Mittelwerth als verlässlich ansehen; dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass der Werth des Dunstdruckes während dieser Zeit nur unerheblich schwankt, so dass es gestattet ist, einfach das Mittel desselben mit dem der Potentialgefälle zu combiniren. Im vorliegenden Falle z. B. schwankte der Dunstdruck zwischen 8 und 12 mm; wie in der eingangs erwähnten Publication ausführlich gezeigt ist, ver-

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Sitzungsberichten der Wiener Akad. Bd. 97 (1888).

2) Wiener Akad. Bd. 96 S. 149 (1887).

3) Es wäre dringend zu wünschen, dass alle Beobachtungen an fixen Stationen durch einmalige Reduction mittels transportabler Apparate auf den Werth für die freie Ebene zurückgeführt würden.

läuft aber die Curve, welche die Abhängigkeit des Potentialgefälles vom Dunstdruck darstellt, innerhalb dieser Grenzen nahezu linear, so dass man ohne weiteres den Mittelwerth der beobachteten Potentialgefälle, als dem Mittelwerth der Dunstdrucke entsprechend, ansehen kann.

Die Beobachtungen erstreckten sich hauptsächlich auf die Dauer normalen schönen Wetters; der Beobachtungsort war St. Gilgen am Wolfgangsee im Salzkammergut, durch seine fast absolut staubfreie Luft zu derartigen Messungen sehr geeignet. (Auch von den älteren Beobachtungen wurde ein Theil in St. Gilgen angestellt.) Die Messungen des Potentialgefälles geschahen alle mittels der schon früher beschriebenen transportablen Apparate [1]); zum Theil wurde auf einer sehr grossen, ganz frei gelegenen Wiese beobachtet, zum Theil aber am Fenster eines kleinen, vollkommen isolirt stehenden Häuschens. Für letzteren Fall war es nothwendig die Werthe auf die freie Ebene zu reduciren und mussten zu diesem Zwecke Reductionsbeobachtungen durch gleichzeitige Messung am Fenster und auf der Wiese vorgenommen werden. Die Flamme am Fenster hatte dabei selbstverständlich eine bestimmte Distanz von der Wand des Hauses, die durch Verlängern des die Lampe tragenden Stabes beliebig geändert werden konnte. Diese Controlbeobachtung wurde an drei verschiedenen Tagen zu wiederholten Malen ausgeführt und ergab für einen Punkt in bestimmter Wanddistanz am Fenster und einen von bestimmter Höhe im Freien die folgenden Verhältniszahlen (der an beiden Punkten beobachteten Potentiale):

12. August: 1,05, 1,00
13. „ : 1,00, 1,00, 0,97
15. „ : 1,00.

Man sieht daraus, dass dieses Verhältnis, wie es ja auch sein muss, merklich constant bleibt; die Flamme am Fenster befand sich dabei 2 m von der Wand und 3,5 m vom Erdboden; die auf der Wiese hatte eine Höhe von 1,55 m. Diese Messungen wurden an vollkommen schönen Tagen ausgeführt; es muss jedoch bemerkt werden, dass derartige Reductionen sich auch bei nicht normalem Wetter, z. B. bei bedecktem Himmel, ausführen lassen, wenn nur nicht plötzliche Aenderungen im elektrischen Zustande in der Nähe des Beobachtungsortes selbst vor sich gehen, wie z. B. bei starkem Wind und Regen.

Da derartige Reductionsbeobachtungen voraussichtlich noch sehr oft werden angestellt werden, so will ich hier gleich eine Beobachtung über den Einfluss der Höhe des Grases auf das Resultat der Messung erwähnen.

Die vorstehenden Reductionsmessungen wurden bei frisch geschorener Wiese ausgeführt, liefern also jedenfalls den richtigen Werth;

1) Wiener Akad. Bd. 95 S. 1084 (1887).

dagegen wurden an zwei vorangegangenen Tagen für dieselben beiden Punkte die Zahlen erhalten:

24. Juli: 1,18,
25. „ : 1,19. 1,16.

Im Mittel also 1,18. An diesen Tagen stand die Wiese noch hoch und es zeigt sich deutlich, wie die Halme trotz ihrer geringen Querdimension das Potential in einer Höhe von 1,55 m herabdrücken (die Höhe der Halme betrug bis zu 0,5 m), denn das Verhältnis erscheint jetzt um 18 % geändert.

Ich gehe nun an die Mittheilung der Beobachtungen, soweit sie sich auf die Grösse des Potentialgefälles bei schönem Wetter beziehen; sie umfassen die Zeit vom 19. Juli bis 18. September 1887, während welcher es möglich war, an 33 normalen Tagen 130 Beobachtungen anzustellen. Die Resultate derselben finden sich in der folgenden Tabelle I. In derselben ist ausser dem Datum noch unter h die Stunde der Beobachtung, unter t die Lufttemperatur, unter p und f Dunstdruck und relative Feuchtigkeit und schliesslich unter $\frac{dV}{dn}$ das auf die freie Ebene und 1 m reducirte Potentialgefälle in Volt angegeben. Die Werthe von p und f wurden durch gleichzeitig ausgeführte Psychrometerablesungen gewonnen. Bezüglich des Vorzeichens von $\frac{dV}{dn}$ sei erwähnt, dass dasselbe ausnahmslos das positive war, d. h. der Punkt in der Luft hatte stets ein höheres Potential als die Erde.

Tabelle I.
(St. Gilgen 1887. Normal.)

Datum	h	t	p	f	$\frac{dV}{dn}$
VII. 19.	9½ a.	17,3	12,4	85	88
„	4¾	22,2	12,8	64	88
„	6½	19,8	12,0	70	88
„	7½	18,8	11,5	71	99
20.	8½ a.	17,0	12,6	88	56
„	11	19,2	13,4	81	81
„	1	21,5	13,5	71	85
22.	12	20,4	13,9	78	100
24.	1 p.	18,5	11,1	70	98
„	4	18,6	11,1	70	82
„	6	17,8	10,7	70	100
„	8	14,5	10,0	82	127
„	11	12,4	9,7	91	116
25.	8 a.	15,0	9,9	78	99
„	11	16,2	11,1	80	53
„	1	20,0	11,1	64	58

Datum	h	t	p	f	$\frac{dV}{dn}$
VII. 25.	4	20,6	11,7	65	86
„	7	16,4	9,9	71	109
27.	8½ a.	15,4	11,6	89	93
29.	10 a.	17,2	12,8	88	80
„	12	21,5	13,5	71	76
„	2	22,0	13,2	67	80
„	7	17,6	13,2	88	88
30.	7 a.	14,8	12,0	96	64
„	10	18,0	12,3	80	69
„	12	20,6	13,1	73	74
„	1½	22,0	12,0	61	64
„	11	14,6	10,7	87	80
31.	8 a.	15,4	12,5	76	70
„	9	16,4	11,3	81	79
„	12	20,0	12,3	71	50
„	2	23,0	12,3	60	53
„	11	15,4	11,3	87	80
VIII. 1.	8 a.	16,4	12,7	92	74
7.	5½ p.	19,0	12,0	74	80
„	7 p.	16,5	10,7	76	63
9.	9 a.	19,2	10,4	63	63
„	8 p.	18,4	9,8	62	82
12.	11 a.	15,5	9,6	74	76
„	3	15,8	9,5	71	106
13.	9 a.	14,4	10,3	85	77
„	10	15,2	10,6	83	80
„	8 p.	14,4	10,6	87	82
15.	9 a.	16,4	10,0	79	80
„	11	15,4	10,8	83	93
„	11½	17,4	11,5	78	74
„	4	11,8	9,6	94	93
20.	12	14,0	9,5	80	79
„	3 p.	16,0	9,9	73	82
„	4½	14,0	9,5	80	88
23.	9½ a.	9,6	8,2	92	114
„	11	11,6	8,8	87	85
„	2	14,8	9,0	72	73
„	4	13,8	8,9	76	129
„	11	7,8	7,5	94	100
24.	9½ a.	10,6	8,6	91	106
„	12	13,1	9,4	85	77
„	2	15,0	8,6	68	88
„	4	14,6	8,9	72	108
„	7½	11,0	8,3	85	124
„	11	7,8	7,3	93	116
25.	8½ a.	9,8	8,6	95	103
„	12	14,8	9,8	78	111
„	2	16,0	10,0	74	93
„	3	15,8	10,0	75	108
„	5	15,2	10,4	81	99
„	7½	11,2	8,9	90	111
„	8	10,6	8,6	91	116
„	9	10,2	8,6	93	129
„	10	9,2	8,2	95	74
„	11	9,2	8,2	95	69
26.	8½ a.	11,2	9,8	99	77
„	12	16,0	10,7	79	78

Datum	h	t	p	f	$\frac{dV}{dn}$
VIII. 26.	1	16,2	11,4	83	74
„	2	19,2	11,6	70	74
27.	9 a.	13,4	10,4	91	77
„	12	14,8	10,9	87	63
„	1½	18,8	11,5	71	68
„	5½	17,4	11,5	78	77
„	8	14,0	10,0	85	93
„	12	11,8	9,3	91	63
28.	7 a.	11,8	9,8	96	79
„	10	14,6	11,3	91	80
„	11	16,1	11,9	87	68
„	12	17,0	12,6	88	77
„	1	18,8	12,4	77	68
„	4½	19,8	13,6	80	77
„	5½	19,2	13,4	81	84
„	7	17,6	13,2	88	77
„	8	16,0	12,2	96	74
„	9	15,4	11,9	91	76
„	11½	14,2	11,2	94	81
29.	8 a.	15,4	11,8	90	84
30.	4½ p.	18,0	12,9	94	84
31.	9 a.	15,0	11,7	92	93
„	12	18,2	13,4	86	88
„	3½	19,8	13,0	76	80
„	5	19,0	13,2	81	88
„	7	16,6	12,3	87	79
„	10	14,4	11,4	94	68
IX. 2.	9½ a.	15,0	11,9	91	63
„	11½	17,4	12,1	82	63
„	2	21,4	13,0	68	43
„	4½	20,2	13,7	78	91
4.	9½ a.	15,9	12,0	89	79
„	10½	17,3	12,4	85	74
7.	8½ a.	13,8	11,3	97	80
„	9½	14,2	11,2	94	85
„	10	14,9	11,5	91	74
„	12½	18,6	13,1	83	55
„	3	21,0	13,8	75	96
„	5½	18,9	13,3	82	77
11.	8½ a.	12,4	10,2	95	58
„	10½	13,2	10,2	91	77
„	1½	15,4	8,9	68	84
16.	12	13,8	10,0	86	53
„	3½ p.	14,6	9,7	78	85
„	6½	11,8	9,1	88	100
17.	1½ p	16,0	10,0	74	93
„	5	13,8	10,2	87	85
„	6	12,8	10,0	91	80
18.	10 a.	13,5	10,3	90	53
„	11	13,7	10,5	91	63
„	12	16,0	10,4	77	53
„	1	17,3	10,7	73	68
„	3	17,2	10,8	74	106
„	3½	16,2	11,1	81	80
„	4	15,8	11,1	83	84
„	4½	14,4	10,4	86	72
„	5	13,8	10,3	88	74

Die Zahlen der vorstehenden Tabelle lassen deutlich die Abnahme des Potentialgefälles mit wachsendem Dunstdruck erkennen, obgleich, da letzterer nur innerhalb ziemlich enger Grenzen schwankte, der Effect auch nur ein geringer ist. Gerade deshalb sind diese Messungen aber geeignet, den ursprünglich ausgesprochenen Zweck zu erfüllen und für einen bestimmten Dunstdruck einen aus möglichst vielen Beobachtungen abgeleiteten Mittelwerth des Potentialgefälles zu ergeben.

Um die Zahlen etwas übersichtlicher zu machen, wurden die Beobachtungen nach der Stärke des Dunstdruckes in Gruppen getheilt, so dass einer jeden ein Druckintervall von 1 mm zukam; innerhalb einer jeden dieser Gruppen wurden die Mittel des Dunstdruckes, p_m und der Potentialgefälle, $\left(\frac{dV}{dn}\right)_m$, gebildet und finden sich dieselben in der Tabelle II angeführt.

Tabelle II.

Zahl der Beobachtungen	p_m	$\left(\frac{dV}{dn}\right)_m$
16	8,4	104
18	9,5	89
30	10,4	80
27	11,4	78
21	12,3	73
81	13,3	80

Es ist hier wohl entschieden eine Abnahme des Potentialgefälles mit steigendem Dunstdruck wahrzunehmen; nur der letzte Werth der Tabelle II scheint zu hoch zu liegen.

Um nun ein Urtheil darüber zu erlangen, mit welcher Genauigkeit sich der einem bestimmten Dunstdrucke zukommende Werth des Potentialgefälles aus einer grösseren Zahl von Beobachtungen ermitteln lässt, müssen wir die vorstehenden Zahlen mit den analogen aus den Messungen von 1886 vergleichen. Zu dem Zwecke stelle ich aus der betreffenden, schon citirten Publication die Werthe von 1866 mit den neueren zusammen; die Mittelwerthe der Dunstdrucke für die einzelnen Gruppen stimmen zufällig, mit einer einzigen Ausnahme, in beiden Jahren überein. Für 1886 sind die Werthe von 12,0 mm und alle darüber (das sind natürlich nur wenige) in eine Gruppe zusammengezogen, ich habe deshalb auch für 1887 das Gleiche gethan und setze nun die Werthe für beide Jahre in Tabelle III nebeneinander. —
(Siehe S. 683.)

Man sieht aus diesem Vergleiche, dass die absoluten Werthe selbst für die einzelnen Gruppen in genügender Uebereinstimmung stehen; diese muss man aber sogar als eine überraschend gute bezeichnen, wenn man bedenkt, wie variabel im Laufe des Tages, oft im Laufe von Stunden die hier gemessene Grösse ist und in welch hohem Maasse sie durch oft sehr unscheinbare Fehlerquellen beeinflusst wird.

Tabelle III.

1886			1887		
Zahl der Beobachtungen	p_m	$\left(\frac{dV}{dn}\right)_m$	Zahl der Beobachtungen	p_m	$\left(\frac{dV}{dn}\right)_m$
14	8,4	106	16	8,4	104
16	9,5	97	18	9,5	89
12	10,4	84	30	10,4	80
14	11,4	74	27	11,4	78
10	12,5	68	39	12,8	76

Wie schon einmal erwähnt wurde, verläuft die Curve, welche das Potentialgefälle als Function des Dunstdruckes darstellt, innerhalb der hier eingehaltenen Grenzen desselben nahezu linear, so dass es gestattet ist, das Mittel aus allen Dunstdrucken und das Mittel aus allen zugehörigen Potentialgefällen als correspondirende Werthe anzusehen.

Bilden wir diese Mittel, so erhalten wir aus den neuen Beobachtungen von 1887 (130 an Zahl) die zusammengehörigen Werthe:

$$p = 10{,}9 \text{ mm und } \frac{dV}{dn} = 83.$$

Suchen wir gleicherweise aus sämmtlichen 66 Beobachtungen von 1886, die denselben Dunstdrucken entsprechen, also aus den in Tabelle III aufgeführten, die Mittelwerthe, so erhalten wir:

$$p = 10{,}3; \frac{dV}{dn} = 87.$$

Der Werth des Potentialgefälles erscheint hier etwas höher als für 1887, das hängt aber mit dem etwas geringeren mittleren Dunstdruck für 1886 zusammen, wie sich sofort ergibt, wenn man für letzteres nur die 52 Beobachtungen mit Dunstdrücken zwischen 9,5 und 12,5 mm in Rechnung zieht. Es resultirt dann nämlich ein mittlerer Dunstdruck, der fast genau mit dem von 1887 zusammenfällt und dem entsprechend stimmen auch die Mittel für die Potentialgefälle sehr gut überein. Zwischen 9,5 und 12,5 mm erhält man für 1886 die Werthe:

$$p = 10{,}8;\ \frac{dV}{dn} = 82;$$

diese stimmen aber so vollkommen mit denen des Jahres 1887

$$\left(p = 10{,}9;\ \frac{dV}{dn} = 83\right),$$

dass man wohl berechtigt ist, zu sagen: Der Mittelwerth aus einer bei normalem Wetter durch mehrere Wochen fortgesetzten Beobachtungsreihe liefert mit grosser Genauigkeit den wahren Werth.

Wie aus den älteren Beobachtungen, so geht auch aus den vorliegenden klar hervor, dass die relative Feuchtigkeit ohne directen Einfluss auf die Grösse des Potentialgefälles ist.

Ordnet man die 130 Messungen so in Gruppen, dass alle bei einer relativen Feuchtigkeit zwischen 60 und 70 % ausgeführten in die erste, die zwischen 70 und 80 % in die zweite u. s. f. kommen und bildet man nun gruppenweise die Mittelwerthe für die Feuchtigkeitsprocente und für das Potentialgefälle, so erhält man die

Tabelle IV.

Zahl der Beobachtungen	f %	$\frac{dV}{dn}$
11	65	67
38	74	82
45	84	76
36	93	79

Hierin lassen sich keine regelmässigen Unterschiede erkennen, was die früher schon ausgesprochene Meinung, dass zwischen relativer Feuchtigkeit und Potentialgefälle ein Zusammenhang nicht besteht, sehr wahrscheinlich macht.

Ausser den vorstehenden 130 Messungen bei normalem Wetter habe ich während der gleichen Zeit (Juli bis September 1887) auch noch zahlreiche Beobachtungen bei anormalem Witterungszustande ausgeführt, deren Resultate ich hier, wenigstens für einige charakteristische Fälle, noch mittheilen möchte.

1. Es wird vielfach die Thatsache behauptet — und nicht selten auch zur Erklärung der Gewittererscheinungen herangezogen — dass eine Wolke ein Leiter der Elektricität sei, d. h. eine zusammenhängende

leitende Masse bilde. Von der Unrichtigkeit dieser Anschauung kann man sich in einem breiten Gebirgsthale leicht überzeugen, wenn man das Potentialgefälle beobachtet, während dichte Wolkenmassen den Himmel bedecken und gleichzeitig ringsum auf den begrenzenden Bergen aufliegen. Wären die Wolkenmassen als Ganzes leitend, so müsste das Potentialgefälle dann immer gleich Null gefunden werden; das ist aber keineswegs der Fall, wie die folgenden Beobachtungen zeigen.

Tabelle V.

Datum	$\frac{dV}{dn}$	Wetter
26. VII. 11^h a.	40	Himmel ganz mit Nimbus bedeckt; eine Stunde darauf Regen.
13. VIII. 5^h p.	30	Himmel ganz mit dichtem Nimbus und Cumulus bedeckt; eine Stunde später tritt Regen ein.
21. VIII. 3^h p.	— 140	Himmel dicht mit Nimbus und Cumulus bedeckt; später Regen.
8. IX. 10^h a.	40	Diese Beobachtung geschah nach dem Aufhören des Regens; allseitig dichte Nimbus bis ins Thal.
15. IX. 10^h a.	55	Wie bei der vorhergehenden Beobachtung.

Bei allen diesen Beobachtungen lagen die Wolken unmittelbar auf den Bergen auf und es hätte, wären dieselben leitende Massen, sich keine elektrische Wirkung unterhalb derselben ergeben sollen, da man doch schwerlich das Vorhandensein bedeutender elektrischer Massen in dem Raume zwischen Wolken und Erde annehmen wird. Wie übrigens die später noch mitzutheilenden Beobachtungen im Nebel, also innerhalb einer Wolke, lehren, ergibt sich auch da stets ein deutliches Potentialgefälle, meist stärker als bei normalem Wetter, was absolut nicht möglich wäre, wenn die Wolke als Ganzes leiten würde. Man muss somit nach diesen Beobachtungen die Vorstellung von leitenden Wolkenmassen entschieden fallen lassen.

Die vorstehenden Beobachtungen sind nur einige Beispiele aus zahlreichen ähnlichen; das negative Potentialgefälle, das zuweilen schon vor Eintritt des Regens sich ergibt, ist insoferne interessant, weil es beweist, dass nicht erst durch den fallenden Regen diese starken negativen Massen erzeugt werden, sondern dass die Wolken an und für sich negativ elektrisch sind. Dafür spricht auch der Umstand, dass bei minder intensiver Anhäufung derselben das Potentialgefälle zwar noch nicht ins negative übergeht, seiner absoluten Grösse nach aber wesentlich vermindert erscheint. Diesem Zeichenwechsel entsprechend

beobachtet man auch nicht selten ein unmessbar kleines Potentialgefälle, das aber stets bald in dem einen oder anderen Sinne zu wachsen beginnt.

2. Zieht bei sonst heiterem Himmel ein Gewitter gegen den Beobachtungsort, so zeigt sich stets ein abnorm hoher Werth des Potentialgefälles, dessen Vorzeichen gewöhnlich anfangs das positive, später aber das negative ist, wie dies schon vor langer Zeit von Palmieri beobachtet wurde.

Der Zeichenwechsel vollzieht sich stets innerhalb kurzer Zeit, oft genügen wenige Minuten um einen deutlichen positiven Werth in einen ebenso deutlichen negativen übergehen zu lassen. Steht das Gewitter über dem Beobachtungsorte, so ist das Potentialgefälle stets negativ; rasche Schwankungen in der Grösse, zuweilen auch im Vorzeichen, scheinen mehr localen Einflüssen in nächster Nähe des Beobachtungsortes zugeschrieben werden zu müssen.

Da Messungen über die absolute Grösse des bei Gewittern auftretenden Potentialgefälles bisher nicht vorliegen, so will ich einige Fälle speciell anführen; dieselben beziehen sich nur auf die Zeit vor Eintritt oder nach Aufhören des Regens am Beobachtungsorte, da während desselben die beobachtete Grösse ganz von der local fallenden Regenmenge beeinflusst ist. Die Beobachtungen wurden mit Hilfe der Doppellampe angestellt; mit der einen Lampe war das Gehäuse des übrigens isolirten Elektroskopes verbunden, mit der anderen die Aluminiumplättchen. Die Höhendifferenz betrug gewöhnlich nur 5 cm, wodurch selbstverständlich eine grosse Ungenauigkeit der Beobachtungen hervorgerufen wird, so dass die Werthe wohl nur ihrer Grössenordnung nach als richtig anzusehen sind; eine genauere Messung hätte übrigens bei dem raschen Wechsel der zu messenden Grössen während eines Gewitters kaum einen besonderen Werth.

Beobachtung vom 20./VII. 1887, 5 Uhr p. Starkes Gewitter im Anzug. Der Himmel dicht mit Nimbus bedeckt, im Zenith starke dunkle Cumuli. Es waren noch keine Blitze sichtbar und noch kein Regen gefallen. Das Potentialgefälle hielt sich durch eine Viertelstunde ziemlich constant auf — 1700 Volt pro Meter, erreichte aber in einzelnen Momenten auch den Werth von $-3000\frac{V}{m}$.

Beobachtung vom 28./VII. 1887, 4 Uhr p. Gewitter aus West. Während des Anzuges desselben zeigte das Potentialgefälle einen sehr hohen positiven Werth; derselbe ging bald durch Null in einen noch höheren negativen über. Die Beobachtung mit der Doppellampe ergab noch vor Eintritt des Regens (bei dicht bewölktem Himmel) ein ziem-

lich constantes Potentialgefälle von $-3400\,\frac{V}{m}$. Dasselbe steigerte sich mit Eintritt des Regens noch sehr bedeutend, konnte aber mit dem Elektroskop nicht mehr gemessen werden; das negative Vorzeichen blieb nach dem Regen noch ungefähr eine Stunde.

Beobachtung vom 30./VII. 1887, 5 Uhr p. Starkes Gewitter aus West; der Himmel mit Nimbus und Cumuli ganz bedeckt. Die Messung ergab vor Beginn des Regens ein Potentialgefälle von $-8000\,\frac{V}{m}$. Dasselbe war sehr variabel und erreichte in einzelnen Momenten noch höhere, nicht mehr messbare Werthe, ging aber nicht unter $-5000\,\frac{V}{m}$ herunter.

Man sieht aus diesen Zahlen, welch' riesige Potentialdifferenzen durch locale Anhäufung von Wolken, resp. von Wassertröpfchen, auch ohne Regen erzeugt werden können.

3. Dass bei Nebel, wie er des Morgens besonders schönen Tagen voranzugehen pflegt, das Potentialgefälle einen ausnahmsweise hohen positiven Werth hat, ist schon seit den Untersuchungen Dellmann's bekannt; da aber auch hier absolute Messungen bisher fehlen, so will ich im Folgenden einige diesbezügliche Zahlen anführen. Es muss dabei bemerkt werden, dass man bei Nebel oft sehr schwankende Resultate erhält, dass dieses Schwanken aber mit Bewegungen in der Nebelmasse selbst zusammenzuhängen scheint; solange der Nebel feststeht, sind auch die erhaltenen Zahlen nahezu constant, sowie aber ein Zusammenballen und Verdichten der Nebelmasse eintritt — wie dies der Auflösung derselben vorherzugehen pflegt — wächst das Potentialgefälle bedeutend, um während des Verschwindens des Nebels oder doch bald nachher seinen normalen Werth anzunehmen.

Beobachtung vom 29./VII. 1887. Es sind hier und bei den folgenden Beobachtungen nur die Zeit, die Potentialgefälle in Volt pro Meter und der Zustand des Himmels angegeben; alle Beobachtungen beziehen sich auf die Morgenstunden schöner Tage.

7^h	$+200$—250 . .	Dichter Nebel in leichter Bewegung.
8^h	$+180$	Nebel löst sich auf.
10^h	$+\ 80$	Nebel weg; Himmel klar.

Um 9 Uhr war der Nebel vollständig weg; das Potentialgefälle hat von da ab seinen normalen Werth. (Vergl. das betreffende Datum in Tabelle I.)

Beobachtung vom 23./VIII. 1887.

8^h	$+100$	Dichter Nebel, ruhig.
$8^1/_4{}^h$	$+100$	Nebel senkt sich dicht.

$8^h\,30'$	$+125$	Nebel bleibt ruhig.
$9^h\,30'$	$+114$	Nebel weg; Himmel klar.

(Vergl. Tabelle I.)

Beobachtung vom 24./VIII. 1887. Dichter Nebel bis zum Boden; die Beobachtungen beginnen um 8 Uhr und wurden alle 2 Minuten Ablesungen gemacht. Der Gang war ein sehr regelmässiger, so dass es genügt, hier nur jede fünfte Ablesung (alle 10 Minuten) anzuführen.

$8^h\,0'$	$+78$	Nebel steht fest.
10	$+75$	
20	$+95$	
30	$+110$	Nebel in Bewegung.
40	$+138$	
50	$+190$	
$9^h\,0'$	$+162$	
10	$+118$	Nebel fast ganz weg.
20	$+106$	
30	$+106$	

Um $9\frac{1}{2}$ Uhr war der Nebel verschwunden und das Potentialgefälle nimmt von da ab seinen normalen Werth an. (Vergl. Tabelle I.)

Beobachtung vom 25./VIII. 1887. Dichter Nebel; am Boden bis ca. 20 m Höhe frei.

$7^h\,30'$	$+130$	Nebel dicht.
35	$+125$	
40	$+160$	Nebel sehr dicht.
41	$+200$	
43	$+120$	Nebel zerreisst.
45	$+160$	
47	$+130$	
55	$+115$	
$8^h\,0'$	$+116$	
6	$+130$	
12	$+116$	
14	$+110$	
$8^h\,20'$	$+106$	Nebel ganz weg.
25	$+108$	
30	$+103$	

Um 8 Uhr 30 Minuten war das Potentialgefälle wieder normal. (Vergl. Tabelle I.)

Aehnlich wie die vorstehenden verliefen alle Beobachtungen bei Nebel; die charakteristischen schnellen Schwankungen im Potentialgefälle müssen wohl den Bewegungen der Nebelmasse in der Nähe des Beobachtungsortes zugeschrieben werden.

Niedrigere als die normalen Werthe wurden bei Anwesenheit von Nebel nur zweimal beobachtet, und zwar an Tagen, wo nach Abzug des Nebels sich der Himmel nicht rein, sondern mit feinen Cirrhi oder

Federwolken überzogen zeigte; die beobachteten Werthe lagen zwischen 40 und 60 Volt, und blieben dieselben auch während der darauffolgenden Tagesstunden beträchtlich unter dem normalen Werthe.

4. Es kann vorkommen, dass an ganz heiteren Tagen der Werth des Potentialgefälles weit unter dem normalen bleibt, doch tritt dies immer nur bei abnormen Witterungsverhältnissen ein, wie sich solche zumeist durch schnell wechselnde Windrichtung am Erdboden, durch das Vorhandensein von kleinen, zerissenen Federwolken in grosser Höhe, durch besondere Klarheit der Luft oder bleiernen Dunst am Himmel manifestiren. Als Beispiel möge die folgende Beobachtung dienen, der auch Dunstdruck (p) und relative Feuchtigkeit (f) beigesetzt sind.

Beobachtung vom 6./VIII. 1887.

Zeit	$\frac{dV}{dn}$	p	f	Bemerkung
9h 30'	+ 25	9,3	76	Himmel ganz klar, aber starke weisse Färbung.
12h	+ 25	9,5	68	Himmel klar, schnell wechselnder Ost- und Westwind.
1h	+ 50	10,2	66	Ditto, Luft besonders durchsichtig.
4h	+ 40	9,3	64	Ditto.
8h	+ 50	8,6	80	Ditto, starke weisse Abenddämmerung.

Beobachtungen wie die vorstehende lassen in der Regel auf einen Umschlag des Wetters schliessen; namentlich wenn an normalen Tagen das Potentialgefälle continuirlich sinkt, kann man den Eintritt bewölkten Himmels oder eines Gewitters innerhalb weniger Stunden mit Sicherheit erwarten. Als Beispiele hierfür mögen die folgenden Beobachtungen dienen.

Beobachtung vom 12./VIII. 1887.

Zeit	$\frac{dV}{dn}$	p	f	Bemerkung
3h	+106	9,5	71	Vollkommen normales Wetter.
4h 30'	+ 63	9,5	71	Noch ganz normal, nach einer Viertelstunde zeigen sich einzelne Federwolken und Westwind.
5h	+ 42	9,4	71	Viele Federwolken, Westwind.
8h	—	—	—	Himmel dicht bewölkt.

Hier geht der ersten mit dem Auge wahrnehmbaren Aenderung in der Atmosphäre eine sehr deutliche Abnahme des Potentialgefälles voraus. Das zeigt sich auch bei der folgenden Beobachtung, die sich auf eine vorübergehende Störung des normalen Wetters bezieht.

(Siehe S. 690.)

Nachdem am 15./VIII. schönes Wetter herrschte, vollzog sich im Laufe des 16. der Umschlag zu schlechtem Wetter, das die folgenden drei Tage anhielt; dieser Wetterumschlag wird durch die nachstehende Messung illustrirt.

Beobachtung vom 13./VIII. 1887.

Zeit	$\frac{dV}{dn}$	p	f	Bemerkung
10^h	+80	10,6	83	Wetter ganz klar und normal.
12^h	+33	11,2	78	Ditto, nach einer Viertelstunde zeigen sich kleine Federwolken.
1^h	+43	10,8	61	Viel Federwolken.
5^h	+30	—	—	Himmel dicht bewölkt.
6^h	—	—	—	Sturm mit Regen.
7^h	—	—	—	Aufheiterung.
8^h	+82	10,6	87	Himmel wieder klar und normal.

Beobachtung vom 16./VIII. 1887.

Zeit	$\frac{dV}{dn}$	p	f	Bemerkung
7^h	+100	10,1	89	Wetter ganz klar und normal.
9^h	+ 22	10,1	78	Südwind, Himmel klar, bald darauf Federwolken.
10^h	+ 20	—	—	Himmel bewölkt.
4^h	—	—	—	Sturm, Himmel dicht bewölkt.
8^h		—	—	Gewitter, Regen.

Diese wenigen Beobachtungen werden genügen, um darzuthun, dass auch bei anscheinend normalem Wetter ein abnormes Potentialgefälle beobachtet werden kann, dass man daraus aber auch mit Sicherheit auf eine wesentliche Veränderung im Zustand der Atmosphäre am Beobachtungsorte oder in der Nähe desselben schliessen kann.

5. Dass bei Regenwetter oder Gewittern das Potentialgefälle ein negatives Vorzeichen hat, gehört zu den gewöhnlichen Erscheinungen; anders verhält sich die Sache bei normalem Wetter. Unter allen meinen, während drei Jahren fortgesetzten Beobachtungen findet sich nur eine einzige, wo bei vollkommen klarem Himmel und anscheinend ganz normalem Wetter dieses negative Vorzeichen auftrat. Allerdings währte diese Erscheinung nur 15 Minuten, dadurch schon ihren anormalen Charakter bekundend, und war bald von sichtbaren Zeichen einer Veränderung in der Atmosphäre gefolgt.

Beobachtung vom 7./VIII. 1887. Der Morgen war klar und anscheinend ganz normal; um 8 Uhr zeigte das Potentialgefälle aber schon den ausnahmsweise niedrigen Werth von + 44 — 50 Volt. Plötzlich ging dasselbe ins negative über, nahm sehr schwankende Werthe an und erreichte in einzelnen Momenten die Grösse — 140 Volt. Dies währte ungefähr eine Viertelstunde, worauf das Potentialgefälle wieder einen positiven Werth von 35 — 45 annahm.

Während dieser Zeit und der folgenden Stunde war am Himmel absolut nichts aussergewöhnliches zu bemerken (Wind und Bewölkung war Null); aber um 9 Uhr zeigten sich zuerst in grosser Höhe stark zerrissene Federwolken, die im Laufe der nächsten Stunden an Mächtigkeit zunahmen, während gleichzeitig an der Erdoberfläche ein schnelles Wechseln von Ost- und Westwind bemerkbar war.

Erst um 5 Uhr p. hatte der Himmel wieder seinen normalen Zustand und das Potentialgefälle den Werth + 80 erreicht. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass diese plötzlichen abnormen Schwankungen entsprechenden gleichzeitigen Veränderungen in der Atmosphäre zuzuschreiben sind und nicht etwa localen Störungen in der Nähe des Beobachtungsortes; wenigstens konnte an letzterem trotz sorgfältiger Untersuchung durchaus kein Grund zur Störung (Rauch, Staub etc.) entdeckt werden.

6. Mit grosser Regelmässigkeit konnten an normalen Tagen zwei deutliche Maxima beobachtet werden; dieselben fielen Ende August um 8 Uhr morgens und um 7 Uhr abends.

Bemerkenswerth ist, dass diese Störungen zeitlich immer scharf begrenzt und von nicht langer Dauer — höchstens bis zu einer Stunde — waren. Ich theile im folgenden einige Beobachtungen mit, indem ich statt der vielen Zahlen die betreffenden Curven setze. Als Abscissen sind die Stunden des Tages, als Ordinaten die zugehörigen Potentialgefälle in Volt pro Meter aufgetragen. Während der normalen Tageszeit wurde ungefähr stündlich beobachtet, zur Zeit der Maxima aber continuirlich und die Ablesungen alle drei Minuten, wenn nöthig sogar alle halben Minuten notirt.

Beobachtung vom 25./VIII. 1887 (Fig. 1). Beobachtungszeit von 12 Uhr Mittag bis Mitternacht. Himmel die ganze Zeit klar. Der

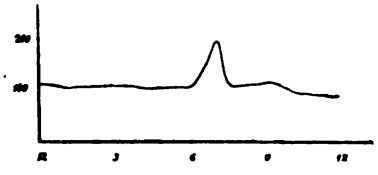


Fig. 1.

Gang der relativen Feuchtigkeit und des Dunstdruckes war während dieser und aller folgenden Beobachtungen ein ganz regelmässiger ohne irgend eine Störung zur Zeit der Maxima. Die Curve zeigt das Abendmaximum um 7 Uhr.

Beobachtung vom 27./VIII. 1887 (Fig. 2). Beobachtungszeit von 9 Uhr Früh bis Mitternacht. Himmel durchaus klar.

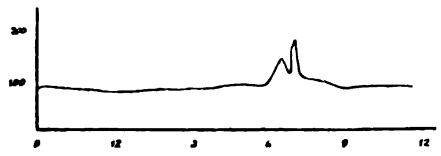


Fig. 2.

Beobachtung vom 28./VIII. 1887 (Fig. 3). Beobachtungszeit von 5 Uhr Früh bis Mitternacht. Himmel durchaus klar. Die Curve zeigt die beiden Maxima.

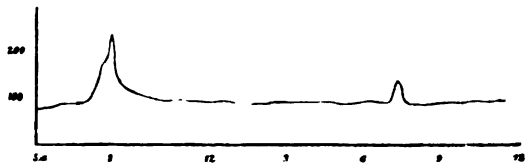


Fig. 3.

Beobachtung vom 31./VIII. 1887 (Fig. 4). Beobachtungszeit von 7 Uhr früh bis 11 Uhr nachts. Himmel durchaus klar.

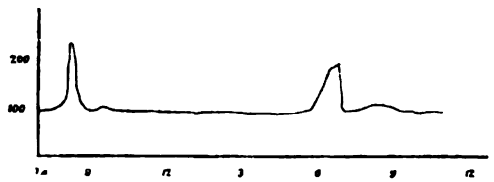


Fig. 4.

Beobachtung vom 2./IX. 1887 (Fig. 5). Beobachtungszeit von 7 Uhr früh bis 5 Uhr abends. Himmel durchaus klar.

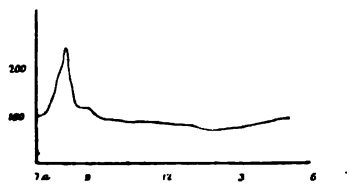


Fig. 5.

Es geht aus diesen Beobachtungen unzweifelhaft die Existenz zweier Maxima hervor; wenn einzelne Beobachter, wie z. B. Mascart

in Paris, nur deren eines fanden, so liegt dies offenbar an den Verunreinigungen, denen die Luft in grossen Städten ausgesetzt ist.

Das Morgenmaximum scheint das abendliche an Intensität zu übertreffen.

Ein Ausbleiben der Maxima zu den betreffenden Stunden trat immer nur an Tagen mit anormalem Witterungscharakter ein; bei jenen Beobachtungen, die zur Ermittlung des normalen Potentialgefälles dienten (Tab. I), wurden die Stunden der Maxima durchwegs ausgeschieden.

7. Eine nicht uninteressante Messung wurde am 26./VIII. 1887 ausgeführt; es wurde gleichzeitig am Ufer des St. Wolfgangsees beobachtet und auf der Höhe eines flachen Bergrückens in unmittelbarer Nähe desselben. Die Höhendifferenz beider Beobachtungsorte ergab sich aus einer Barometermessung zu 540 m. Bis 9 Uhr vormittags war das Wetter normal; um diese Stunde zeigten sich in der Höhe unregelmässige Cirrhi und Federwolken, deren Erscheinen von einem bedeutenden Abfalle im Werthe des Potentialgefälles begleitet war. Diese Unregelmässigkeit dauerte bis 12 Uhr, wo der Himmel wieder rein wurde.

Von den gleichzeitigen Beobachtungen oben und unten ist nun ein auffallender Sprung im Werthe des Potentialgefälles besonders bemerkbar, der sich an beiden Stationen in gleicher Weise fühlbar machte.

Es wurden nämlich als Potentialgefälle beobachtet:

$$9^h\,30' \left\{\begin{matrix}\text{unten } 37\\ \text{oben } 95\end{matrix}\right\} \text{Volt pro Meter,}$$

$$10^h\,30' \left\{\begin{matrix}\text{unten } 53\\ \text{oben } 140\end{matrix}\right\} \text{Volt pro Meter.}$$

Nun haben zwar die absoluten Werthe von oben keine bestimmte Bedeutung, da der Beobachtungsort sich nicht auf einer Ebene befand; wohl lassen sich aber die Variationen von oben mit jenen von unten vergleichen und da ergibt sich, dass, während das Potentialgefälle unten auf das 1,43fache seines Werthes stieg, dasselbe oben das 1,47fache seines früheren Werthes erreichte. Aus dieser Gleichheit der Variation folgt aber, dass die störende Ursache sich jedenfalls oberhalb, wahrscheinlich aber sehr weit oberhalb der beiden Beobachtungsorte befand. Es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass diese Ursache in der durch das Erscheinen der Cirrhi und Federwolken angezeigten Veränderung der höheren Luftschichten zu suchen ist.

8. Im Gegensatze zu den vorstehend besprochenen Störungen scheinen die täglichen Maxima bei normalem Wetter ihre Ursache in Veränderungen der untersten Luftschichten zu haben. Dafür spricht schon das plötzliche Auftreten und Verschwinden der abnorm hohen

Potentialgefälle, denn wären diese durch Veränderungen hoher Luftschichten bedingt, so wären dazu mindestens Stunden erforderlich; die starken Variationen im Laufe weniger Minuten weisen dagegen mit Nothwendigkeit auf eine örtlich nahe Ursache hin.

Ich habe deshalb auch vermuthet, dass auf einigermaassen hoch gelegenen Punkten, z. B. Berggipfeln, die täglichen Maxima gar nicht oder doch nicht in dem Maasse ausgesprochen erscheinen würden, wie in der Ebene; es ist dies eine Consequenz der Anschauungen über die Ursache der Luftelektricität, die ich in früheren Arbeiten schon ausführlich entwickelt habe.

Für die Grösse des Potentialgefälles an der Erdoberfläche ist in erster Linie die in den untersten Luftschichten vorhandene Elektricitätsmenge maassgebend; geht von dieser ein Theil an die Erde selbst, z. B. bei Thaubildung, so muss sich dadurch das Potentialgefälle ändern. Anders verhält sich die Sache für einen hoch gelegenen Punkt; auf dessen Potentialgefälle ist nur die gesammte, unterhalb befindliche elektrische Ladung von Einfluss, nicht aber deren Vertheilung. Ob daher durch irgendwelche Ursachen in den unteren Luftschichten eine Aenderung der Elektricitätsvertheilung eintritt oder nicht, ob ein grösserer oder geringerer Theil der Elektricität aus der Luft an die Erde übergeht, das ist für das oben gemessene Potentialgefälle ohne Einfluss. Deshalb vermuthete ich ein allmähliches Verschwinden der täglichen Maxima mit zunehmender Höhe.

Leider konnten in dieser Richtung bisher nur zwei Beobachtungen angestellt werden; diese bestätigen jedoch die ausgesprochene Vermuthung vollständig.

Beobachtung vom 18./IX. 1887 (Fig. 6). Es wurde gleichzeitig am Ufer des St. Wolfgangsees und auf der Spitze des Schafberges in 1780 m Höhe beobachtet. Da für letzteren Ort die absoluten Werthe wieder keine fixe Bedeutung haben, so konnte der Standort für die Beobachtung beliebig gewählt werden, blieb aber natürlich für alle Messungen derselbe. Da das Potentialgefälle in so grosser Höhe ein sehr bedeutendes ist, so musste mit Rücksicht auf die grosse Empfindlichkeit der Elektroskope ein elektrisch ziemlich geschützter Punkt in geringer Höhe über dem Erdboden als Standort der Flamme benutzt werden; die Höhe der letzteren betrug nur 0,35 m. Das Wetter war normal. Die Ablesungen wurden tagsüber ungefähr stündlich, zur Zeit der Maxima aber continuirlich vorgenommen. In der folgenden Fig. 6 sind die Resultate graphisch dargestellt; die ausgezogene Linie gibt die Beobachtungen unten, die punktirte Linie die von der Bergspitze wieder. Die Beobachtungszeit war von 11^h vormittags bis 8 Uhr abends.

Beobachtung vom 19./IX. 1887 (Fig. 7). Beobachtungszeit von 7 Uhr früh bis 10 Uhr vormittags; im übrigen gilt ganz dasselbe wie

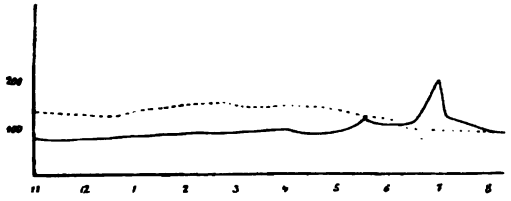


Fig. 6.

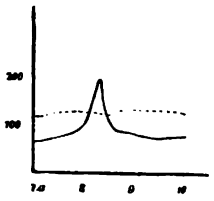


Fig. 7.

bei der vorhergehenden Messung. Zu bemerken ist nur, dass mit dem Nachmittag desselben Tages Trübung des Himmels eintrat.

Die vorstehenden Messungen zeigen für die Ebene deutlich das Abend- und Morgenmaximum, während von keinem derselben sich in 1780 m Höhe eine Andeutung vorfand; es scheint somit ausser Zweifel, dass die Ursache dieser Maxima in Veränderungen der Luftschichten unterhalb obengenannter Höhe zu suchen ist.

Der Fernmessinductor [1]), ein neues elektrisches Instrument.

Von

Dr. **Paul Moennich,**

Privatdocent der Physik an der Universität Rostock.

Der Fernmessinductor dient dazu, die Angaben von Thermometern, Barometern etc. auf elektrischem Wege von einem Orte nach einem anderen hin zu übertragen, so dass ein Beobachter von einer Station aus sich zu jeder beliebigen Zeit Aufschluss verschaffen kann über den jeweiligen Stand eines an einem entfernten Orte aufgestellten derartigen Messinstrumentes.

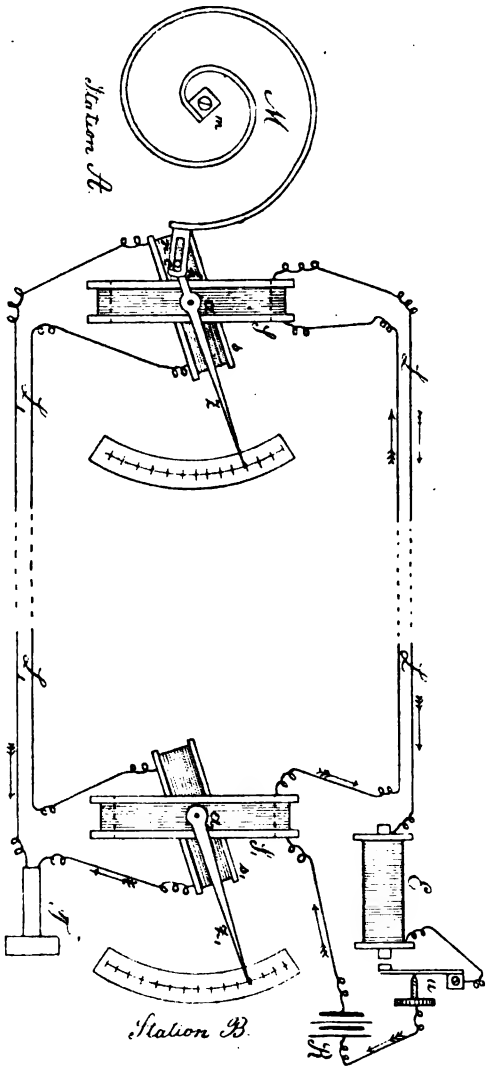
Im folgenden soll das Princip des Fernmessinductors dargelegt werden und zwar an einer zur Uebertragung von Temperaturangaben bestimmten Vorrichtung. Die folgende Zeichnung (S. 697) stellt einen solchen Apparat dar.

Zur Messung der Temperatur dient das auf der Station A aufgestellte spiralförmige Metallthermometer M, welches in der Mitte bei m festgelegt ist. In der Nähe dieses Thermometers befinden sich zwei cylinderförmige Drahtspulen von verhältnismässig nur geringen Dimensionen, eine grössere S und eine kleinere s. Die grössere hohle Spule steht fest, während die kleinere, im Innern der grösseren befindliche um eine Axe a leicht gedreht werden kann. Mit der kleineren Drahtrolle ist ein Zeiger z fest verbunden, welcher durch einen kleinen Hebelarm h nach hinten eine kurze Verlängerung erfährt. Die Thermometerspirale M trägt an ihrem äusseren Ende einen mit einem Spalt versehenen Ansatz r. Mittels dieses Ansatzes, welcher über einen am äusseren Ende des Hebelarms befindlichen, nach oben vortretenden Knopf c greift, bewegt das Metallthermometer den auf eine Scala weisenden Zeiger z. Da die kleine leicht drehbare Spule s mit dem Zeiger fest verbunden ist, so folgt sie jeder Bewegung desselben und zwar in der Art, dass jeder von ihr eingenommenen Stellung eine ganz bestimmte Temperaturangabe des Metallthermometers entspricht.

---

1) Der Apparat ist in mehreren Staaten patentirt. Die Fabrikation ist der Firma G. A. Schultze in Berlin, Schmidstrasse 42, übertragen worden.

Schickt man nun durch die grössere feststehende Spule S einen intermittirenden elektrischen Strom, so werden in der kleinen Spule s fortdauernd Inductionsströme erzeugt. Die Intensität dieser Ströme hängt wesentlich ab von der Lage der beiden Drahtspulen zu einander. Die Inductionsströme erlangen ihr Maximum, wenn die Windungsebenen beider Rollen einander parallel sind, d. h. wenn die kleinere Rolle sich ganz innerhalb der grösseren befindet. Die Stärke derselben nimmt aber bei der Drehung der kleineren Spule fortwährend ab, wenn die Windungsebenen der beiden Spulen sich mehr und mehr der aufeinander senkrechten Lage nähern. Ist diese letztere Stellung erreicht, so verschwinden die Inductionsströme gänzlich. Dieselben erscheinen jedoch wieder, allerdings in entgegengesetzter Richtung fliessend, sobald bei fortgesetzter Drehung die senkrechte Lage überwunden ist, um dann, von neuem allmählich anwachsend, bis zu einem zweiten Maximum nach Wiedereintritt der Parallelität der Windungsebenen gesteigert zu werden.



Aus dem soeben Gesagten folgt, dass jeder bestimmten Stellung der kleineren Rolle, also auch jeder besonderen Temperaturangabe des Metallthermometers, eine relativ ganz bestimmte Intensität der Inductionsströme entsprechen muss.

Um nun die Temperaturangaben von einem entfernten Orte aus controliren zu können, ist folgende Einrichtung getroffen worden.

An der Beobachtungsstation B befindet sich ein ähnliches Rollensystem als am Orte A. Die Spulen S_1 und s_1 stimmen mit den am Orte A befindlichen Spulen S resp. s in allen Theilen genau überein. Die grössere Rolle S_1 steht fest, die kleinere mit dem Zeiger z_1 verbundene Rolle s_1 lässt sich dagegen nach Belieben mit der Hand um die Axe a_1 drehen. Die Scala, auf welche der Zeiger z_1 weist, ist der Grösse nach genau dieselbe als die an der Station A befindliche.

Schickt man nun durch die beiden grösseren stationären Spulen S und S_1, welche durch die gut isolirte Drahtleitung L miteinander verbunden sind, von der Beobachtungsstation B aus mittels der mit einem elektromagnetischen Stromunterbrecher E combinirten Batterie R einen intermittirenden Strom, so müssen, wie aus dem Vorhergehenden leicht ersichtlich, die inducirenden Kräfte dieser beiden Spulen jederzeit genau dieselben sein. Daraus folgt nun ohne weiteres, dass die Inductionsströme, welche in den drehbaren Rollen s und s_1 entstehen, stets — aber auch nur dann — einander gleich sein müssen, wenn die relativen Stellungen dieser beiden Spulen dieselben sind, d. h. wenn die Zeiger an beiden Stationen genau auf die gleichen Scalentheile weisen.

Bei der Controle des Thermometerstandes auf der Station A vom Orte B aus handelt es sich also nur darum, diejenige Stellung des Zeigers z_1 zu finden, bei welcher der in der Spule s_1 entstehende Inductionsstrom mit dem am Orte A erzeugten genau dieselbe Intensität besitzt. Die zu diesem Zwecke nothwendige Bestimmung der Stromgleichheit lässt sich nun sehr einfach in folgender Weise ausführen.

Man verbindet die beiden Spulen s und s_1 durch die gut isolirte Doppelleitung L_1 miteinander und zwar in der Art, dass die beiden Inductionsströme den Stromkreis in entgegengesetzter Richtung durchfliessen müssen. Bei Gleichheit der Ströme heben dieselben einander auf, so dass die Leitung alsdann völlig stromlos erscheint. Als Galvanoskop verwendet man am zweckmässigsten ein mit den beiden Spulen s und s_1 in denselben Stromkreis eingeschaltetes Telephon T. Selbst bei nur sehr geringen Unterschieden der beiden Stromstärken lässt das Telephon ein deutlich hörbares knatterndes Geräusch vernehmen, welches jedoch vollständig verschwindet, sobald Stromgleichheit eingetreten ist.

Um eine Ablesung mit dem Apparate vorzunehmen, verfährt man folgendermaassen. Nachdem mittels der Batterie R der elektromagnetische Stromunterbrecher E in Thätigkeit gesetzt worden, hält man das Telephon an das Ohr und dreht, wenn ein Geräusch vernehmbar, die Spule s_1 mit der Hand solange um die Axe a_1, bis das Telephon vollständig verstummt ist. Der Zeiger z_1 weist dann genau auf den-

jenigen Scalentheil, welcher dem jeweiligen Stande des Thermometers auf der Station *A* entspricht.

Die bisher nach dem vorstehend erörterten Princip ausgeführten Apparate haben ihre praktische Brauchbarkeit zur Genüge bewiesen. Selbst bei verhältnismässig nur kleinen Rollendimensionen erfolgt die Uebertragung der Angaben ohne jegliche Schwierigkeit für den Beobachter mit grosser Genauigkeit, ja man könnte sagen mit Haarschärfe.

Der Fernmessinductor eignet sich zur Uebertragung der Angaben aller derjenigen Messinstrumente, welche eine drehende Zeigerbewegung ausführen können. Handelt es sich um die Uebertragung von Barometerangaben, so wählt man am zweckmässigsten ein Wagebarometer und befestigt die kleine drehbare Spule des Aufgabeinstrumentes an der Axe desselben.

Für Schwerhörige eignet sich die Anwendung des Telephons als Horchapparat selbstverständlich nicht. Dasselbe kann aber, wie Fröhlich gezeigt hat, auch zur objectiven Darstellung [1]) benutzt werden, wenn man die Schwingungen der Telephonmembran auf eine kleine Gasflamme überträgt und diese dann im rotirenden Spiegel beobachtet. Solange die Membran noch in Schwingung begriffen, also solange das Telephon noch von Strömen durchflossen wird, zeigt sich das zu einem Streifen auseinandergezogene Flammenbild am oberen Rande gezackt. Die Zacken verlieren sich jedoch, sobald nach Verschwinden des Stromes die Membran zur Ruhe gekommen ist.

Bei der praktischen Ausführung des Fernmessinductors müssen verschiedene Vorsichtsmaassregeln beobachtet werden, wenn der Apparat gut und sicher functioniren soll. So ist vor allen Dingen darauf zu achten, dass sich in der unmittelbaren Nähe der Spulen keine grösseren Metallmassen (kleine Schrauben etc. schaden nicht) befinden, welche das Gleichgewicht der Inductionsströme stören und dadurch das zu einer scharfen Einstellung nothwendige vollständige Verschwinden des knatternden Geräusches im Telephon verhindern können. Die Thermometerspirale *M* ist aus diesem Grunde in einer Entfernung von mindestens mehreren Centimetern von der Axe des Rollenpaares anzubringen. Ferner muss die Leitung L_1, welche die beiden drehbaren Spulen *s* und s_1 miteinander verbindet, aus einer Schlaufe bestehen, damit etwa in derselben von anderen in der Nähe befindlichen Leitungsdrähten (z. B. *L*)

1) Fröhlich, Optische Darstellung der Vorgänge im Telephon mit Anwendungen. Elektrotechnische Zeitschrift 1887 S. 210. — Ferner derselbe, Handbuch der Elektricität und des Magnetismus, Berlin 1887 S. 291. — Vergl. auch Wallentin, Neuere Forschungen in der Phonographie und Telephonie. Elektrotechnische Rundschau 1888 und Centralzeitung für Optik und Mechanik 1888.

inducirte Ströme, welche die Sicherheit der Uebertragung stören würden, keine Einwirkung ausüben können.

Für die Leitung L genügt unter Umständen ein einziger Draht, da die Erde zur Zurückführung des von der Batterie R gelieferten Stromes benutzt werden kann.

Der Fernmessinductor erfordert also zwischen den beiden Stationen wenigstens drei voneinander isolirte Leitungsdrähte. Hierin scheint auf den ersten Blick ein Uebelstand zu liegen. Die Vorrichtung hat aber vor anderen ähnlichen Zwecken dienenden Apparaten neben ihrer Zuverlässigkeit und Einfachheit der Construction noch den besonderen Vorzug, dass trotzdem selbst für weitere Strecken und bei Aufstellung mehrerer Instrumente auf derselben Station kein wesentlicher Aufwand von Leitungsmaterial nöthig wird, da einerseits wegen der nur geringen erforderlichen Stromstärke dünne Drähte Verwendung finden, andrerseits aber die drehbaren Spulen sämmtlicher Inductoren hintereinander in dieselbe Schlaufenleitung eingeschaltet werden können. Bei dieser letzteren Anordnung lassen sich die einzelnen Apparate freilich nicht gleichzeitig, sondern nur nacheinander controliren, was aber wohl nicht als Uebelstand anzusehen ist, da man die sämmtlichen Beobachtungen doch immerhin innerhalb eines kurzen Zeitabschnittes anstellen kann. Für die grösseren stationären Spulen müssen allerdings, wenn die Erde als Rückleitung benutzt wird, ebenso viele einzelne Drähte, als Apparate auf der Station vorhanden, angewendet werden. Jedoch dürfte sich vielleicht auch hier ohne Schwierigkeit eine Verminderung der Anzahl der Leitungen erreichen lassen, indem durch einen geeigneten elektromagnetischen Umschalter ein und derselbe Draht mehreren Apparaten nacheinander dienstbar gemacht würde.

Obgleich der Fernmessinductor in erster Linie für technische Zwecke, so z. B. in Verbindung mit einem Metallthermometer als Temperatur-Controlapparat für Centralheizungsanlagen, Malzdarren etc. Verwendung finden soll, so dürfte derselbe doch auch für manche wissenschaftlichen Beobachtungen von Nutzen sein. Ich erinnere hier nur an meteorologische Stationen, welche sich an Orten befinden, die nicht zu allen Jahreszeiten zugänglich sind, wie dies z. B. bei Gipfeln von hohen Bergen der Fall ist. Eine derartige, mit mehreren Fernmessinductoren, welche der Reihe nach mit Thermometern, Barometern und Hygrometern combinirt sind, ausgerüstete Station könnte dem Meteorologen zu jeder Zeit die gewünschten Daten selbst auf beträchtliche Entfernungen hin liefern.

Zur Ablesung mehrerer verschiedenartiger Instrumente (Thermometer, Barometer, Hygrometer) auf einer Station könnte ein und derselbe Controlapparat dienen. Derselbe müsste zu diesem Zwecke mit

mehreren nebeneinander liegenden, einzeln nach den betreffenden Messinstrumenten justirten Scalen versehen werden.

Handelt es sich um die Ablesung mehrerer gleichartiger Instrumente, so ist es unter Umständen gar nicht einmal nöthig, verschiedene Scalen an dem Controlapparat anzubringen. Es lassen sich z. B. bei Anwendung von Metallthermometern für manche Zwecke (Centralheizungsanlagen, Darren etc.) sämmtliche Apparate einer Anlage ohne grosse Schwierigkeit derartig in Uebereinstimmung miteinander bringen, dass eine einzige Scala für die Controle aller genügt. Eine Darlegung des zur Erreichung dieser Uebereinstimmung bei der Fabrikation angewandten Verfahrens, welches auch wohl nur technische Kreise interessiren dürfte, muss ich mir an dieser Stelle des beschränkten Raumes wegen versagen.

Ueber das elektrische Verhalten des Quarzes. II.[1]

Von

Dr. **Paul Czermak.**

II. Elektrooptische Versuche.

Beobachtet man durch ein Quarzparallelepiped, wie es in dem vorhergehenden Abschnitte[2]) beschrieben ist, in der Richtung der optischen Axe, das concentrische Ringsystem, welches durch ein schwach convergentes Lichtbündel erzeugt ist, so bemerkt man, wenn zwei gegenüberliegende Flächen des Parallelepipedes, die mit Belegen versehen sind, stark geladen werden, eine Deformation der Ringe zu scheinbar schwach excentrischen Ellipsen. Die Gestalt dieser Ellipsen ist dieselbe, welche man auch beim Comprimiren oder Dilatiren des Krystalles senkrecht zu seiner optischen Axe erhält. Es sind demnach keine Ellipsen, sondern Lemniscaten, die ebenfalls sehr schwache Excentricität besitzen. Eine Ellipse und Lemniscate von sehr schwacher Excentricität sind aber für den Anblick kaum voneinander zu unterscheiden. Dies zeigt auch ihre Formel.

Die Gleichung der Lemniscate:

$$(x^2 + y^2)^2 - (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = a^2 b^2$$

lässt sich darstellen in der Form:

$$x^2 + y^2 = ab\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{8}\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 b^4}(x^2 - y^2)^2 + \ldots\right].$$

Ist $a = b = r$, so haben wir den ursprünglichen Kreis. Sind a und b noch sehr wenig voneinander verschieden, so kommt nur das erste Glied der Reihe in Betracht und dann haben wir noch eine Gleichung zweiten Grades; erst wenn der Unterschied von a und b so gross geworden ist, dass das nächste Glied der Reihe mit allen Gliedern vierter Ordnung zur Geltung kommt, fängt die Lemniscate an von der Ellipse abzuweichen.

Beim mechanischen Deformiren des Quarzes liegt nun die grosse Axe der Lemniscate stets in der Richtung der Compression. Beim

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 97 (1888).

2) Vergl. S. 511 dieses Bandes.

Elektrisiren ist die Lage dieser Axe aber nicht durch die Richtung der Elektrisirung bestimmt, sondern sie ist abhängig von der Orientirung der geladenen Seitenflächen gegen die piëzoelektrischen Axen des Quarzes.

Aus den Versuchen von Röntgen und Kundt ergab sich folgendes: Sind die beiden geladenen Flächen senkrecht zu einer piëzoelektrischen Axe des Quarzes, also die Richtung der elektrisirenden Kräfte parallel zu einer polaren Richtung, so ist die Achse der Lemniscate entweder parallel oder senkrecht zu der piëzoelektrischen Axe und zwar hängt dies von dem Vorzeichen der Elektricität ab, welche man den beiden Enden der piëzoelektrischen Axe zuführt.

Die Enden der piëzoelektrischen Axe sollen so bezeichnet werden, wie das Vorzeichen jener Elektricität ist, welche beim Druck an ihnen auftritt. Führt man dann Elektricität zu, welche mit dem Vorzeichen der piëzoelektrischen Axe übereinstimmt, so liegt die Achse der Lemniscate senkrecht zu der piëzoelektrischen Axe, also so als ob der Quarz in dieser Richtung dilatirt wäre. Führt man aber Elektricität zu, welche entgegengesetztes Vorzeichen hat mit der Bezeichnung der piëzoelektrischen Axe, so liegt die Axe der Lemniscate parallel der piëzoelektrischen Axe, also gerade so als ob der Quarz in dieser Richtung comprimirt würde.

Die zweite Lage, welche bei den vorerwähnten Versuchen noch untersucht wurde, war jene, wo die elektrisirten Flächen senkrecht zu einer Axe fehlender Piëzoelektricität standen. Dann lag die grosse Axe der Lemniscate gegen diese Axe fehlender Piëzoelektricität um 45° geneigt. Beim Wechseln der Ladung änderte sich ihre Lage um 90°

Diese beiden Versuche konnte ich an Quarz I studiren, da er die verlangte Orientirung hatte. Quarz II jedoch bot eine Zwischenlage und konnte an ihm eine neue Lage der Lemniscatenaxen beobachtet werden.

Bevor ich jedoch zu den Versuchen übergehe, will ich eine kleine Betrachtung voranschicken, welche in ähnlicher Weise wie bei den Druckversuchen die Spannungscurve, hier bei den elektrooptischen Versuchen, die Lage und die Grössenverhältnisse der Lemniscatenaxen, bei beliebiger Orientirung der Flächen gegen die piëzoelektrischen Axen, gibt. Natürlich auch hier nur mit dem Vorbehalte einer ersten Annäherung.

Durch die bisherigen Versuche ist festgestellt, dass piëzoelektrische Krystalle beim Elektrisiren in der Richtung einer piëzoelektrischen Axe, sich auch in dieser Richtung comprimiren oder dilatiren. Durch die äusseren elektrischen Kräfte wird die innere Polarität der Moleküle vermindert oder vermehrt, je nachdem das Zeichen der Elektricität

gleich oder entgegengesetzt ist, wodurch eine Dilatation oder Compression in dieser Richtung eintritt. Es wird daher wieder erlaubt sein, anzunehmen, dass, wenn die Richtung der Elektrisirung mit einer polaren Richtung einen Winkel einschliesst, die in dieser Richtung eintretende Compression oder Dilatation, dem Cos. dieses Winkels und der äusseren Ladung proportional ist.

Stellen daher wieder 1, 2, 3 in Fig. 1 die drei polaren Richtungen eines Quarzes dar und ist E die Richtung der Elektrisirung, wobei wir uns denken, dass auf der einen Seite positive Elektricität zugeführt wird, während die andere Seite zur Erde abgeleitet ist, so wird in der

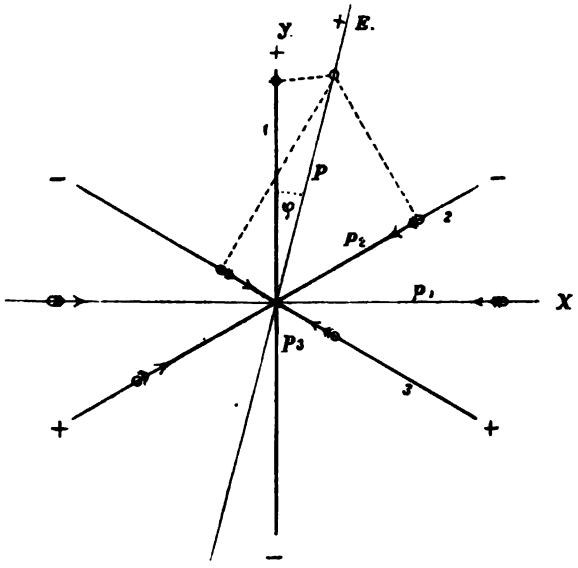


Fig. 1.

Axe 1 eine Dilatation hervorgerufen, da das Ende derselben gleichbezeichnet ist mit der äusseren Ladung. Diese Dilatation kann aber ersetzt werden durch eine Compression in dazu senkrechter Richtung.

Wäre p die Compression, welche durch die äussere Ladung in einer piëzoelektrischen Axe hervorgerufen würde, wenn die Richtung der Elektrisirnng in diese Axe fiele, so ist die in Axe 1 hervorgerufene und in senkrechter Richtung zur Geltung kommende Compression

$$p_1 = p \cos \varphi$$

wenn φ der Winkel ist, welchen die Richtung der Elektrisirung mit der polaren Richtung 1 einschliesst.

In der Axe 2 wird eine Compression

$$p_2 = p \cos (60^0 - \varphi) = \frac{p}{2} [\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi]$$

erzeugt, welche in diese Axe selbst fällt, da das Ende derselben entgegengesetzt bezeichnet ist mit der äusseren Ladung.

Ebenso wird in Axe 3 eine Compression

$$p_3 = p \cos (60^0 + \varphi) = \frac{p}{2}[\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi]$$

erzeugt.

Diese drei Drucke setzen sich zu einer Resultirenden zusammen, deren Lage die Lage der Lemniscatenaxen und deren Grössenverhältnisse bei verschiedenen Richtungen der Elektrisirung die Grössenverhältnisse der Lemniscaten bestimmen.

Legen wir ein Coordinationssystem so, dass die Axe 1 die Y-Axe und die zwischen 2 und 3 liegende Axe fehlender Piëzoelektricität, die X-Axe ist, so sind die Componenten der drei Compressionen nach den Coordinatenaxen:

$$X = p_1 + p_2 \cos 30^0 + p_3 \cos 30^0 = p_1 + \sqrt{\frac{3}{4}}(p_2 + p_3)$$

$$Y = p_2 \cos 60^0 - p_3 \cos 60^0 \qquad = \frac{1}{2}(p_2 - p_3).$$

Es sind nämlich immer jene drei Componenten der drei Kräftepaare zusammen zu setzen, welche innerhalb des spitzen Winkels von 60° liegen.

Die Lage der Resultirenden ist daher gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{p_2 - p_3}{2p_1 + \sqrt{3}(p_2 + p_3)}$$

oder wenn man für die $3p_i$ die Werthe setzt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi \qquad (1$$

Diese Formel ist giltig für $-30^0 \leqq \varphi \leqq +30^0$, da beim Ueberschreiten dieser Grenzen entweder p_2 oder p_3 in der Formel das Zeichen wechselt, während in Wirklichkeit wegen des Ueberganges der Compression zur Dilatation ein Sprung um 90° eintritt.

Hätten wir angenommen, dass zur äusseren Ladung negative Elektricität verwendet worden wäre, so hätte sich die Darstellung in gleicher Weise gemacht nur wird dann:

$$X = -p_2 \cos 60^0 + p_3 \cos 60^0$$
$$Y = p_1 + p_2 \cos 30^0 + p_3 \cos 30^0$$

so dass dann:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

also der negative reciproke Werth von früher, d. h. es ist die Lage der grossen Axe um -90^0 von der vorhergehenden verschieden. Beim Umkehren der Ladung springt auch stets die grosse Axe in die Lage der kleinen und die kleine Axe wird zur grossen.

Was den Werth der Resultirenden betrifft, so ist:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Nun ist ausgeführt:

$$X^2 = \frac{p^2}{4}(2 + \sqrt{3})^2 \cos^2 \varphi$$

$$Y^2 = \frac{p^2}{4} 3 \sin^2 \varphi$$

daher:

$$R = \frac{p}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 \cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi} \qquad (2$$

Um den Verlauf der Lage und Grösse der Resultirenden bei verschiedenen Richtungen der Elektrisirung besser übersehen zu können, sind in folgender Tabelle I fünf Lagen berechnet. Zählt man noch den Winkel α nicht von der X-Axe aus, sondern von einer zur Elektrisirungsrichtung senkrechten Richtung, so ist dieser Winkel $\alpha' = \alpha + \varphi$.

Tabelle I.

φ	α	α'	R
-30^0	-15^0, $+165^0$	-45^0, $+135^0$	$1{,}673\,p$
-15^0	$-7{,}1$, $+172{,}9$	$-22{,}1$, $+157{,}9$	$1{,}816\,p$
0^0	0^0, 180^0	0^0, 180^0	$1{,}866\,p$
$+15^0$	$+7{,}1$, $-172{,}9$	$+22{,}1$, $-157{,}9$	$1{,}816\,p$
$+30^0$	$+15^0$, -165^0	$+45^0$, -135^0	$1{,}673\,p$

Die Resultirenden für die Lagen 0^0, $\pm 15^0$ und $\pm 30^0$ verhalten sich also wie $1 : 0{,}97 : 0{,}89$, sind daher nur wenig voneinander verschieden.

In Fig. 2 sind diese drei Lagen noch graphisch dargestellt.

a) Elektrische Messungen.

Um die Veränderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes quantitativ zu studiren, ist es vor allem nöthig, sehr hohe elektrische Spannungen mit dem erforderlichen Genauigkeitsgrade messen zu können.

Zu diesem Zwecke eignet sich am besten eine Wage, welche direct die Anziehung der elektrischen Kräfte misst. Die Anordnung der ganzen Einrichtung, welche ich gebrauchte, war im ganzen jener gleich, welche Quincke in seinen „Elektrischen Versuchen", Wied. Ann. Bd. 19,

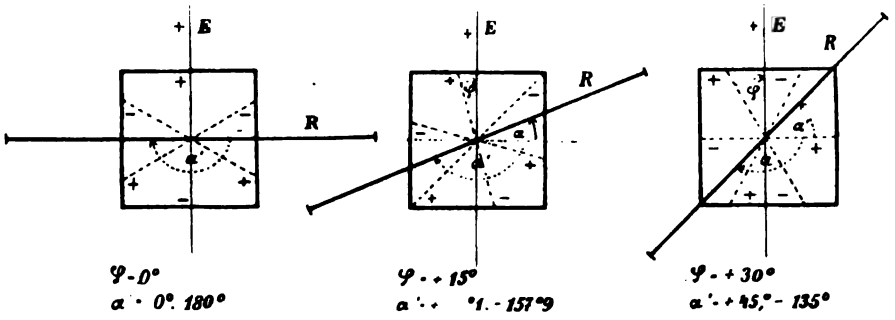


Fig. 2.

S. 559, angibt. Jedoch zwei, wie ich glaube, vortheilhafte Aenderungen, hatte ich insoferne angebracht, als ich an der Wage einen Condensator mit Schutzring und einen Telephoncontact benutzte, welcher genau den Moment des Gleichgewichtes markirte. Da die Einrichtung sehr gut und bequem functionirte, und die Messungen einen ziemlichen Grad von Genauigkeit erreichten, so will ich im folgenden die ganze Einrichtung mittheilen.

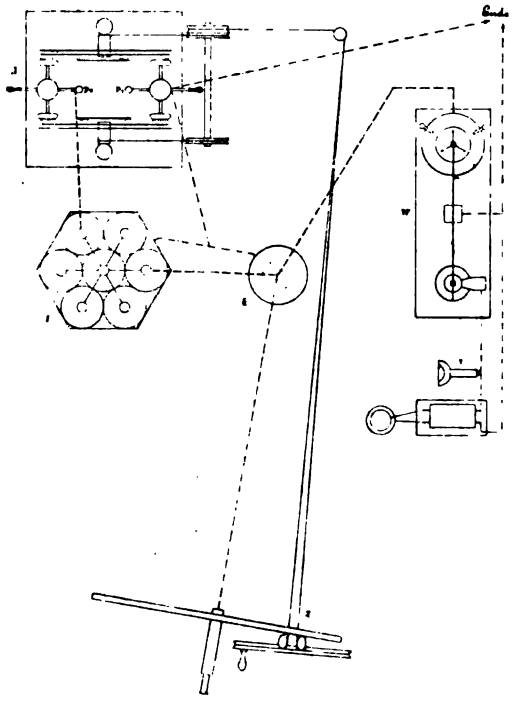


Fig. 3.

Eine grosse zweischeibige Influenzmaschine J (Fig. 3) diente zur Erzeugung der nöthigen Elektricitätsmengen. Der eine Pol p_1 derselben war zur Erde abgeleitet, während der andere p_2 mit einer grossen Leydnerbatterie L in Verbindung gesetzt werden konnte. Die innere Belegung der Batterie stand wieder in Verbindung mit einem Righischen Elektrometer E und der Wage W. Das äussere Belege der

Batterie, der Schutzmantel des Elektrometers, und die nicht isolirten Theile der Wage waren ebenfalls zur Erde abgeleitet.

Der wesentlichste Bestandtheil der Einrichtung ist die Wage, welche in Fig. 4 in $^1/_5$ der natürlichen Grösse dargestellt ist. Eine ziemlich empfindliche Wage wurde zu dem Zwecke des Potentialmessens ganz umgebaut. An Stelle der einen Wagschale wurde die kleine Platte c eines Condensators mit Schutzring gehangen. Sie war mit drei Silberdrähten befestigt, deren Länge an Schräubchen s corrigirt werden konnte. Ferners konnte man vermittels der kugeligen Mutter k die ganze Platte in der Führung F heben und senken. Auf dem anderen Ende des

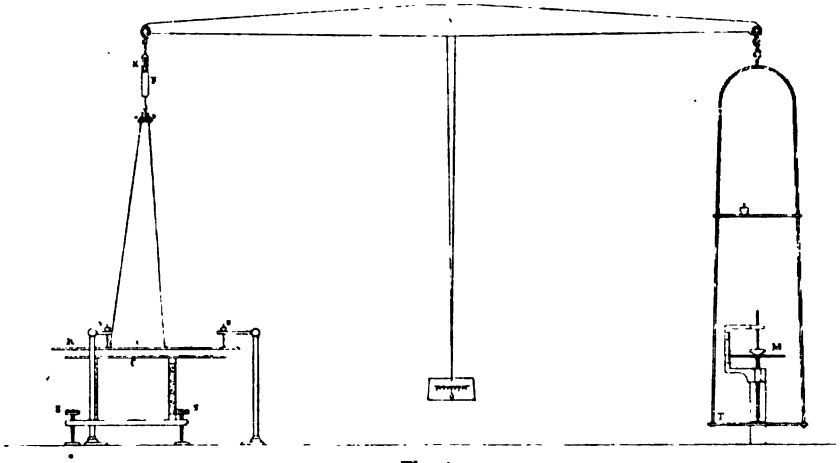


Fig. 4.

Wagebalkens blieb die ursprüngliche Wagschale, nur wurden die Gewichte auf das obere Tischchen t gelegt, während das untere F genau in der Mitte ein polirtes Stahlstück eingenietet hatte. Nun wurde die Platte und Schale so austarirt, dass bei guter Justirung der Wage der Zeiger derselben genau auf die Nulle der Theilung einspielte. Hierauf legte ich auf die Condensatorplatte ein kleines Uebergewicht, dadurch hob sich die Wagschale. Gerade über dem Stahlplättchen des unteren Schalentischens ragte aber an einem starken, am Boden des Wagekastens verschraubten Messingarme eine Mikrometerschraube M hinein, so dass, wenn sich die Wagschale hob, sie gegen diese Schraube treffen musste. Vermittelst dieser Schraube brachte ich die Schale wieder durch Herabschrauben in ihre Gleichgewichtslage, was am Einspielen des Zeigers an der Theilung sehr genau beurtheilt werden konnte. Dadurch war die Mikrometerschraube auf den Moment des Gleichgewichtes eingestellt.

Unterhalb der kleinen beweglichen Platte des Condensators ruhte auf drei Schellacksäulen isolirt eine grosse Platte *C*. War die kleine Platte mit einer Libelle horizontal gestellt, so wurde sie nach Auflegen eines Uebergewichtes und Hinaufdrehen der Mikrometerschraube der grossen Platte genähert. Diese war vorher auch horizontal gestellt worden und konnte man den Parallelismus der Platten am besten beurtheilen, wenn sie so weit genähert waren, dass sie sich fast berührten. Durch Corrigiren an den Fussschrauben *S* wurde getrachtet, die feine Lichtlinie, welche man zwischen beiden Platten sah, von zwei aufeinander senkrechten Richtungen aus, gleichmässig dick und beim Auflegen der beweglichen Platte gleichmässig verschwinden zu machen. Leider waren die Platten nicht so gut polirt, dass man dies hätte vollkommen erreichen können. Die untere grosse Platte hatte sogar in der Mitte eine Mulde, welche mit dem Sphärometer ausgemessen und in Rechnung gezogen wurde.

Waren die beiden Platten justirt, so wurde die bewegliche Platte mittels der Mikrometerschraube wieder in ihre Gleichgewichtslage zurückgeführt und nun der Schutzring *R*, welcher an drei Silberdrähten hing, in die Ebene der beweglichen Platte gestellt. Dies konnte man an den Correctionsschräubchen *s'* erreichen und an dem Einspielen der beiden spiegelnden Flächen von der Unterseite beobachten.

Die Distanz der Platten wurde in folgender Art gemessen. Die bewegliche Platte befand sich in der Gleichgewichtslage und auf ihr ein kleines Uebergewicht. Nun wurde mit der Mikrometerschraube um mehrere ganze Umdrehungen hinaufgeschraubt, bis die bewegliche Platte der unteren Platte bis auf einige Zehntel eines Millimeters genähert war. Diesen kleinen Abstand, welcher durch die Spiegelung in der unteren Platte verdoppelt wurde, mass ich aus einer Entfernung von über einen Meter vermittelst eines Helmholtz'schen Ophthalmometers. Da ich die Glasplatten des Ophthalmometers nach beiden Seiten drehte, so dass die Doppelbilder abwechselnd an beiden Rändern sich berührten, wodurch die doppelte Breite gemessen wurde, so war die wirkliche Distanz der Condensatorplatten nur der vierte Theil der gemessenen. Nach einer Drehung der Glasplatten des Ophthalmometers um 180° wurde die Messung wiederholt. Darauf wurde die bewegliche Platte durch Herabdrehen der Mikrometerschraube wieder in die Ebene des Schutzringes zurückgeführt und zugleich auch in ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage, worauf die Wage zur Messung bereit war.

Um nun mit dieser Wage das Righi'sche Elektrometer zu aichen, wurde folgendermaassen verfahren. Das Uebergewicht auf der Condensatorplatte wurde entfernt und auf das obere Tischchen *t* der Wagschale eine bestimmte Anzahl von Grammen gelegt. Darauf wurde

die Arretirung der Wage so viel gehoben, dass sie den herabsinkenden Wagearm wieder nahe der Gleichgewichtslage zurückführte. Das Stahlstückchen auf der Wagschale schwebte dann kaum einen halben Millimeter unterhalb der Spitze der Mikrometerschraube. Dann wurde vom Beobachtungsfernrohre des Elektrometers aus, die Influenzmaschine durch eine Transmission T in Bewegung gesetzt und die Leydnerbatterie geladen. Das Steigen des Elektrometers zeigte den Fortgang der Ladung an. Bei einem gewissen Grade der Ladung wurde endlich die Anziehung der geladenen Condensatorplatte auf die bewegliche so gross, dass sie dieselbe anzog und dadurch das Stahlplättchen der Wagschale gegen die Mikrometerschraube drückte. Dadurch wurde aber ein Telephon t zu lauten Tönen gebracht, da das Stahlblatt und die Mikrometerschraube seinen Contact bildeten. In dieser Stellung haben die Condensatorplatten den gemessenen Abstand, nur ist die Anziehung noch grösser als die aufgelegten Uebergewichte, denn die Wagschale wird ja gegen die Mikrometerschraube noch angedrückt. Ist alles gut isolirt (ich verwandte zu den Leitungen Messingdrähte, welche in Glasröhren eingezogen waren, und wo der Zwischenraum noch mit Paraffin ausgegossen war) und unterbricht man die Zuleitung von der Influenzmaschine zur Batterie, so bleibt das Elektrometer auf einem bestimmten Theilstriche stehen und das Telephon tönt fort. Nun näherte ich durch Ziehen an einer Schnur, ebenfalls vom Beobachtungsfernrohre aus, der Batterie einen isolirten zugespitzten Draht. Dadurch strahlte die Batterie etwas Elektricität aus und das Elektrometer sank. Dieses Ausstrahlen hatte man durch verschiedenes Annähern des Drahtes so in der Gewalt, dass man das Elektrometer rasch oder nur um Zehntel Theilstriche sinken machen konnte. War nun das Potential soweit gesunken, dass die bewegliche Platte im Gleichgewicht war, dass aber die Anziehung auf dieselbe gerade so gross war, als die aufgelegten Uebergewichte, so wurde die Wagschale nicht mehr gegen die Mikrometerschraube gedrückt und das Telephon verstummte momentan. Der Theilstrich des Elektrometers, auf welchem in diesem Momente das Fadenkreuz stand, war durch diese Beobachtung geaicht. Nun brauchte man nur die Batterie mit der Influenzmaschine wieder zu verbinden und eine halbe Umdrehung der Transmission genügte gewöhnlich, um die Batterie so viel nachzuladen, dass die bewegliche Platte wieder herangezogen wurde. Man konnte dann den Versuch sofort wiederholen ohne sich vom Fernrohre zu entfernen.

Um das Elektrometer vollständig durchzuaichen, beginnt man z. B. mit einem Uebergewichte von 1 Gramm und geht von Gramm zu Gramm aufwärts, bis die Spannung endlich so gross ist, dass ein Funke zwischen den Condensatorplatten überschlägt, d. h. ich hatte immer eine Funken-

strecke eingeschaltet, welche auf eine etwas geringere Distanz eingestellt war, als der Abstand der Platten betrug. Es schlug dann der Funke früher hier über. Durch Ueberbrücken des Funkenmikrometers wurde auch die Batterie und die mit derselben verbundenen Theile, also das Elektrometer und die untere Condensatorplatte zur Erde abgeleitet und so immer der Nullpunkt des Elektrometers beobachtet. Dieser geht der elastischen Nachwirkung wegen immer in der Richtung des Ausschlages etwas nach, da man leider an einem solchen Elektrometer nicht beiderseitige Ausschläge erzeugen kann. Doch betrug dieses Wandern des Nullpunktes, selbst bei 400 Scalentheilen Ausschlag nie mehr als 5 bis 6 Theilstriche. Um die Präcision beurtheilen zu können, mit welcher diese Messungen vor sich gingen, erlaube ich mir das Tableau eines vollständigen Aichungsversuches von 1 bis 22 Grammen mitzutheilen. Die erste Spalte der Tabelle II enthält die Anzahl der aufgelegten Uebergewichte, die zweite den Stand des Nullpunktes vor und nach der dreimal wiederholten Gleichgewichtsbestimmung an der Wage. Das scheinbare Abweichen dieser drei Ablesungen stimmt fast immer genau mit einer gleichen Aenderung des Nullpunktes überein, so dass die Beobachtungen meist bis auf die Zehntel der Theilstriche gleich waren.

Tabelle II.

(24. Juni 1887.) Plattendistanz vor der Aichung: 6,6029 cm,
„ nach „ „ 0,6001 cm.

Gramme	Ruhelage	Ausschlag	n	Δn	Gramme	Ruhelage	Ausschlag	n	Δn
1	516.0	509,5			4	516,2	487,8		
		509,4					487,7		7,40
	516.3	509.4				516,0	487,7		
	516,15	509,43	6,72			516,10	487,73	28,37	
2	516,3	502,4			5	516,1	480,7		
		502,3		7,25			480,5		7,10
	516,3	502,3				515,9	480,4		
	516,30	502,33	13,97			516,00	480,53	35,47	
3	516,3	495,3			6	515,9	472,8		
		495,2		7,00			472,7		7,63
	516,1	495,2				515,7	472,6		
	516,20	495,23	20,97			515,80	472,70	43,10	

Gramme	Ruhelage	Ausschlag	n	Δn	Gramme	Ruhelage	Ausschlag	n	Δn
7	515,7	465,0			15	515,5	400,2		
		465,0		7,45					8,67
	515,4	465,0				514,6	399,5		
	515,55	465,0	50,55			515,05	399,85	115,20	
8	515,7	457,3			16	514,9	390,9		
		457,3		7,68			390,7		8,62
	515,3	457,2				514,0	390,3		
	515,50	457,27	58,23			514,45	390,63	123,82	
9	515,5	449,4			17	514,6	381,7		
		449,3		7,75			381,7		8,76
	515,0	449,1				513,7	381,3		
	515,25	449,27	65,98			514,15	381,57	132,58	
10	515,4	441,6			18	514,5	373,0		
		441,4		7,72			372,7		8,70
	514,8	441,2				513,4	372,3		
	515,10	441,40	73,70			513,95	372,67	141,28	
11	515,2	433,3			19	513,9	363,8		
		433,2		8,02			363,7		8,45
	514,7	433,2				513,1	363,8		
	514,95	433,23	81,72			513,50	363,77	149,63	
12	514,9	424,8			20	514,0	355,0		
		424,7		8,20			354,3		9,25
	514,4	424,7				512,7	353,8		
	514,65	424,73	89,92			513,35	354,37	158,98	
13	515,0	416,8			21	513,3	344,7		
		416,4		8,28			344,6		9,39
	514,4	416,3				512,3	344,3		
	514,70	416,50	98,20			512,80	344,53	168,27	
14	514,7	408,1			22	513,0	335,0		
		497,9		8,33			334,9		9,46
	514,1	407,6				512,0	334,3		
	514,40	407,87	106,53			512,50	334,77	177,73	

Wenn nun die aus solchen Beobachtungen gerechneten Potentiale nicht den gleichen Grad von Genauigkeit erreichten, als es die Präcision der Methode erwarten liess, so hatte dies folgende Ursachen. In erster Linie war für den vorliegenden Zweck kein so grosser Genauigkeitsgrad erforderlich und war, da die ganze Einrichtung aus anderen Gründen im zweiten Stockwerke des Gebäudes etablirt war, die Aufstellung sämmtlicher Apparate nicht solide. Erschütterungen waren an allen Instrumenten sehr merkbar, was besonders für die Wage und das Elektrometer nachtheilig war. Wie ferners die Distanzmessungen vor und nach der Aichung zeigen, änderte sich die Länge der Aufhängedrähte, und war auch die übrige Justirung der Wage nicht mit der Präcision möglich, wie es die sonstige Genauigkeit der Versuche wünschenswerth gemacht hätte. Jedenfalls wäre es möglich, bei einiger Sorgfalt und Berücksichtigung kleiner Verbesserungen, diese Art Messungen auf einen hohen Grad von Genauigkeit zu bringen.

Zur Berechnung der mit dieser Wage gemessenen Potentiale wurde die Formel angewendet, welche Maxwell in seinem Lehrbuche über Elektricität und Magnetismus angibt.

Sie ist:

$$V = D\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

Hierin bedeutet D die Distanz der Condensatorplatten, W die aufgelegten Gramme, g die Beschleunigung der Schwerkraft am Beobachtungsorte und A die corrigirte Fläche der beweglichen Platte. Es ist nämlich:

$$A = \frac{\pi}{2}\left[R^2 + R'^2 + (R^2 - R'^2)\frac{\alpha}{D+\alpha}\right].$$

$$\alpha = \frac{R' - R}{\pi}\log 2 = 0{,}220\,625\,(R' - R).$$

$R' - R$ ist der Zwischenraum zwischen der beweglichen Platte und dem Schutzringe. Maxwell gibt noch ein Glied an, welches eine Correction enthält für den Fall, als der Schutzring und die bewegliche Platte nicht in einer Ebene liegen. Dies konnte vernachlässigt werden. Von der Anwendung der Kirchhoff'schen Formeln, welche noch die Dicke der Platten berücksichtigen, wurde wegen der Unhandlichkeit derselben für die praktische Rechnung, Umgang genommen. Eine andere Correction hingegen wurde berücksichtigt, nämlich, dass die grosse geladene Platte in ihrer Mitte eine flache Mulde hatte, welche beim Schleifen derselben entstanden war.

Messungen mit einem Sphärometer ergaben für die Mitte,
also für $\varrho = 0$ eine Tiefe von $\delta = 0{,}0059$ cm,
für $\varrho = 1{,}35$ cm „ „ „ $\delta = 0{,}0036$ cm,
daraus würde genähert folgen für $\varrho = 2{,}5$ cm $\delta = 0$, wodurch der Radius der Mulde gegeben ist. Nimmt man dieselbe also überall gleich tief im Mittel von $\delta = 0{,}003$ cm an, so fällt dies δ in dem Maasse ins Gewicht, als sich die Flächen $\varrho^2\pi$ und der übrig bleibende Theil $(R^2 - \varrho^2)\pi$ zur ganzen Fläche $R^2\pi$ verhalten.

Nach dem arithmetischen Mittel ist dann:

$$\frac{\varrho^2\pi(D+\delta) + (R^2-\varrho^2)\pi D}{R^2\pi} = D + \frac{\pi^2}{R^2}\delta.$$

Da $R = 6$ cm war, so ergibt sich $\frac{\varrho^2}{R^2}\delta = 0{,}0006$ cm, was zu jeder gemessenen Distanz hinzuzufügen war.

Es wurden ferners Aichungen bei verschiedenen Distanzen der Condensatorplatten vorgenommen, um sowohl verlässlichere Werthe zu erhalten, als auch, weil man bei jeder Distanz nur bis zum Potentiale dieser Funkenstrecke gehen kann und ferners um zu sehen, ob bei grossen Distanzen merkbare Unterschiede gegen die Aichungen bei kleinen Distanzen auftreten. Da aber bei verschiedenen Plattendistanzen und denselben fortschreitenden Uebergewichten immer andere Theilstriche am Elektrometer entsprechen, so muss man, um die verschiedenen Aichungen miteinander vergleichen zu können, die fehlenden Werthe interpolieren.

In folgender Tabelle sind nun die Aichungen bei fünf verschiedenen Distanzen der Condensatorplatten zusammengestellt. Die durch die Wage geaichten Werthe sind eingeklammert, während die zwischenliegenden interpolirt sind. Um die Tabelle nicht zu lange zu machen, so sind in derselben nur jene Werthe angegeben, welche beim Fortschreiten von zwei zu zwei Grammen als Uebergewichte erhalten wurden, während in Wirklichkeit von 1 zu 1 g und bei der grössten Distanz von ½ zu ½ g geaicht wurde.

Tabelle III.

n	$D = 0{,}2$	$D = 0{,}3$	$D = 0{,}6$	$D = 0{,}8$	$D = 1{,}0$	Mittel
0,65	[2,70]	2,74	2,75	2,73	2,78	2,74
1,55	4,18	[4,26]	4,24	4,21	4,29	4,24
1,95	[4,68]	4,78	4,76	4,73	4,81	4,75
3,10	[6,04]	6,03	6,00	5,96	6,07	6,02
4,47	[7,15]	7,23	7,21	7,16	7,29	7,21

n	$D = 0{,}2$	$D = 0{,}3$	$D = 0{,}6$	$D = 0{,}8$	$D = 1{,}0$	Mi
4,95	7,56	[7,61]	7,58	7,53	7,67	7
5,67	[8,11]	8,11	8,11	8,06	8,21	8
6,72	8,81	8,76	[8,83]	8,77	8,94	8
6,97	[8,97]	8,93	8,99	8,94	9,10	8
8,17	[9,75]	9,71	9,70	9,67	9,85	9
8,37	9,86	[9,84]	9,81	9,79	9,97	9
9,52	[10,47]	10,46	10,43	10,44	10,62	10
10,72	[11,15]	11,06	11,04	11,08	11,24	11
11,87	11,70	[11,64]	11,58	11,66	11,79	11
12,03	—	11,71	11,65	[11,73]	11,86	11
15,40	—	[13,20]	13,11	13,22	13,29	13
18,95	—	[14,60]	14,55	14,60	14,63	14,
19,13	—	14,67	14,58	14,66	[14,67]	14,
20,97	—	15,33	[15,30]	15,31	15,34	15,
22,43	—	[15,87]	15,88	15,81	15,85	15,
25,93	—	[17,04]	16,86	16,94	17,01	16,
29,57	—	[18,14]	17,92	18,05	18,11	18,
32,90	—	[19,18]	18,96	19,00	19,06	19,
35,47	—	19,88	[19,75]	19,70	19,75	19,
36,53	—	[20,17]	20,02	19,98	20,02	20,
37,85	—	20,55	20,37	[20,32]	20,36	20,
40,07	—	[21,11]	20,92	20,89	20,91	20,
43,10	—	21,84	[21,64]	21,64	21,65	21,
43,78	—	22,01]	21,80	21,80	21,82	21,
47,28	—	[22,87]	22,63	22,61	22,62	22,
50,98	—	—	23,46	[23,46]	23,44	23,
58,23	—	—	[24,98]	24,98	24,98	24,
60,32	—	—	25,41	25,39	[25,40]	25,
64,65	—	—	26,21	26,24	26,49	26,
73,70	—	—	[27,93]	27,86	27,88	27,
89,92	—	—	[30,60]	30,54	30,56	30,
93,18	—	—	31,10	[31,04]	31,06	31,
105,00	—	—	32,83	32,82	[32,79]	32,
106,53	—	—	[33,05]	33,04	33,01	33,
116,68	—	—	34,40	34,38	[34,39]	34,
122,98	—	—	35,21	[35,20]	35,21	35,
123,82	—	—	[35,33]	35,91	35,82	35,
141,28	—	—	[37,47]	37,46	37,42	37,

n	$D = 0{,}2$	$D = 0.3$	$D = 0.6$	$D = 0{,}8$	$D = 1.0$	Mittel
154,32	—	—	39.01	38,91	38,93	38,95
158,98	—	—	[39,50]	39,41	39,43	39,45
166,18	—	—	40,26	40,17	[40,16]	40,20
170,80	—	—	40.75	[40.60]	40.63	40 67
177,78	—	—	[41,43]	41,38	41,33	41,38
204,82	—	—	—	[43.90]	43,90	43,90
219,50	—	—	—	45,15	45,20	45,17
223,08	—	—	—	[45,44]	45,52	45,48
240,93	—	—	—	[46,93]	47.00	46,96
260,92	—	—	—	[48,38]	48,55	48,46
277,43	—	—	—	49,39	[49,73]	49,53
340,00	—	—	—	—	[53,88]	53,88
372,80	—	—	—	—	[55,84]	55,84

Aus dieser Tabelle sieht man, dass selbst bei einer so grossen Variation in den Plattendistanzen die Beobachtungen sehr gut übereinstimmen und wenn auch, bei grösser werdenden Abständen, die Werthe etwas zurück zu bleiben scheinen, so kann dies doch noch als innerhalb der hier herrschenden Fehlergrenzen gelegen, betrachtet werden. Es war daher berechtigt, aus den zusammengehörigen Werthen das Mittel zu nehmen und dies bei den Messungen zu verwenden.

Diese Mittelwerthe sind in Fig. 5 graphisch dargestellt. Um eine beiläufige Controle für diese Aichung zu haben, mass ich die Potentiale einiger Funkenstrecken bei drei verschiedenen Kugelgrössen. Zu dem Ende wurde die Leitung zur Wage unterbrochen und mit der einen Kugel eines Funkenmikrometers, das auf eine bestimmte Funkenstrecke eingestellt war, verbunden, während die andere Kugel zur Erde abgeleitet war. Vom Ablesefernrohre des Elektrometers aus wurde nun die Influenzmaschine in Bewegung gesetzt und die Ladung langsam so gesteigert, bis bei einem bestimmten Theilstriche die Entladung eintrat. Man hörte nicht nur das Ueberschlagen des Funkens, sondern sah auch im gleichen Momente das Elektrometer gegen die Ruhelage hin zurückspringen. Wusste ich nach einem Vorversuche ungefähr die Stelle des Ueberschlagens an der Scala, so drehte ich beim nächsten Male, wenn die Ladung stieg und sich dieser Stelle näherte, so langsam, dass das Fadenkreuz sich nur um ein Zehntel eines Scalentheiles weiter bewegte. Das Ueberschlagen des Funkens trat dann mit grosser Präcision, bei noch so oftmaliger Wiederholung des Versuches, fast immer bei demselben Theilstriche ein. Für absolut genaue Messungen war aber das

Funkenmikrometer nicht exact genug. Besonders die Länge der Funkenstrecke wird nicht auf ein halbes Zehntel Millimeter genau sein, ebenso war auch die Politur und Form der Kugeln nicht sehr sorgfältig. Die Versuche wurden auch in der Weise abgeändert, dass einmal die Leydnerbatterie, manchesmal noch eine zweite grössere, mit eingeschaltet war

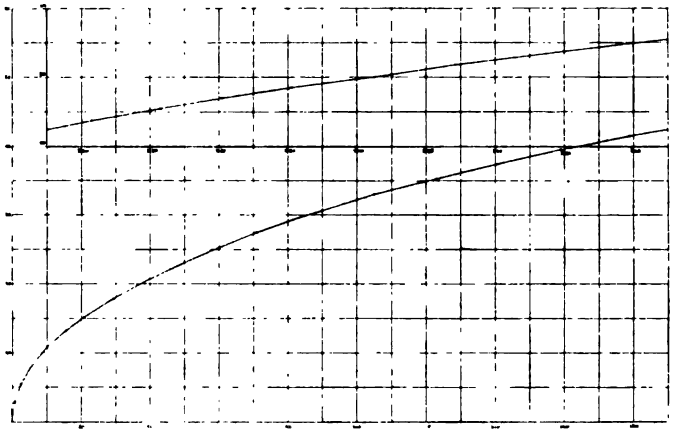


Fig. 5.

dann aber wurde auch das Potential gemessen, wenn das Mikrometer direct mit der Influenzmaschine verbunden war. Es konnte dabei kein messbarer Unterschied in den Potentialen constatirt werden. Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle IV zusammengestellt.

Tabelle IV.

Schlagweite in Millimetern	Kugelradien in Centimetern			
	0,25	0,5	1,0	
	am Elektrometer gemessene Potentiale			
1	23,09 [16,06]	22,31 15,80	20,47 15,14	Scalenth. (C G S)
2	71,22 [27,46]	69,92 27,22	66,44 26,57	Scalenth. (C G S)
3	142,55 37,60	143,91 [37,76]	141,75 37,50	Scalenth. (C G S)
4	232,51 46,26	251,55 [47,77]	250,60 47,69	Scalenth. (C G S)

Vergleicht man diese Werthe mit anderen Messungen, so findet man z. B. von Baille und Quincke für Kugeln von 1 cm Radius folgende Werthe:

Schlagweite in Millimetern	Baille	Quincke	Czermak
1	15,250	14,78	15,14
2	26,784	26,39	26,57
3	37,322	37,31	37,50
4	46,559	46,69	47,69

Es ergibt sich also eine gute Uebereinstimmung. Von Baille liegen aber auch Beobachtungen für Kugeln von verschiedenen Radien vor und zwar hatte er Kugeln von 0,1, 0,35, 1,0 und 6,0 cm Radius, ferners auch Platten. Er fand, dass es für jede Schlagweite eine Kugelgrösse gibt, für welche das Potential ein Maximum ist, und zwar liegt dies Maximum bei kleinen Schlagweiten auch bei den Kugeln mit kleinen Radien, während es für grosse Schlagweiten auch zu Kugeln mit grösseren Radien übergeht. Dies zeigt sich auch in Tabelle IV und sind dort diese Maxima eingeklammert. Interpolirt man aus den Baille'schen Werthen die Potentiale für Kugeln, wie sie hier angewendet sind, so erhält man folgende Werthe:

Schlagweiten in Millimetern	Kugelradien in Centimetern		
	0,25	0,5	1,0
	Potentiale in C G S		
1	[16,066]	15,860	15,250
2	25,001	[27,040]	26,784
3	25,422	36,525	[37,322]
4	35,373	42,602	[46,559]

Hier stimmen die Werthe für die Schlagweite von 1 mm für alle drei Kugelgrössen sehr gut mit den von mir erhaltenen überein, ebenso die Werthe der vier Schlagweiten für die Kugeln von 1 cm Radius. Hingegen sind die Werthe für grössere Schlagweiten bei kleineren Kugeln beträchtlich verschieden. So findet sich für die Schlagweite von 4 mm bei Kugeln von 0,25 cm Radius eine Differenz von 10,887 (C G S). Dies würde am Elektrometer einen Unterschied von über 108 Scalentheilen betragen, was, wenn man noch so viele störende Einflüsse annehmen wollte, als ausgeschlossen zu betrachten ist. Ich halte daher diese Werthe von Baille für zu klein. Da er überdies seine Beobachtungen auch nach einer Methode machte, welche keine stetige Messung der Potentiale erlaubte, indem er sich keines Elektrometers mit con-

tinuirlicher Ablesung bediente, sondern das Potential für jede Funkenstrecke an der Wage allein auswerthete, so glaube ich auf die Abweichung dieser fünf Werthe nicht ein so grosses Gewicht legen zu müssen.

Diese Frage, mit obiger Einrichtung genauer zu untersuchen, hat sich Herr F. Paschen zur Aufgabe gestellt. Ich ergreife hier zugleich die Gelegenheit, ihm für seine, mir bei diesem Theile meiner Versuche gewordene Hilfe, meinen besten Dank auszuprechen.

Mit dem so vorbereiteten Elektrometer werde die Elektrisirung am Quarze gemessen.

b) Optische Messungen.

Die hier angewandte optische Methode wurde schon eingangs dieses II. Abschnittes erwähnt. Ihr Hauptvorzug besteht in der Uebersichtlichkeit der Erscheinung und ist sie daher für qualitative Versuche sehr empfehlenswerth. Für quantitative Messungen jedoch ist sie zu unempfindlich und ungenau. Da es mir aber leider an Zeit gebrach, nach einer brauchbareren Methode zu suchen, so musste ich die Untersuchung doch mit der Ausmessung des Ringsystems in der Richtung der optischen Axe durchführen. Die elektrischen Vorbereitungen hatten soviel Zeit in Anspruch genommen, dass sich die Arbeit schon in das Ende des Sommersemesters hinzog. Bekanntlich ist nun der Hochsommer die ungünstigste Zeit für Arbeiten mit Reibungselektricität. Es mussten auch die verschiedensten Maassregeln ergriffen werden, um das Arbeiten doch zu ermöglichen, wenn auch dadurch der Genauigkeitsgrad der Messungen immer geringer wurde. Ich betrachte daher die folgenden Messungen mehr als Vorversuche zu einer späteren Untersuchung mit einer empfindlicheren optischen Methode.

Das zu elektrisirende Quarzparallelepiped wurde auf eine metallene Elektrode E_1 (Fig. 6) von gleicher Grösse mit seiner Seitenfläche gelegt und durch eine gleiche Elektrode E_2 von oben festgehalten.

Um das Ueberschlagen der Funken längs der Oberfläche des Quarzes zu verhindern, wurden sehr dünne, weit vorragende Glimmerblättchen G zwischen Quarz und Elektroden geschoben. Die untere Elektrode E_1 stand gut isolirt mit der Leydnerflaschenbatterie und dem einen Pole der Influenzmaschine in Verbindung; die obere E_2 war zur Erde abgeleitet.

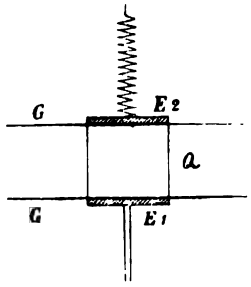


Fig. 6.

Diese Vorrichtung, in den optischen Apparat gebracht, zeigte das Axenbild der concentrischen Kreise so, dass der innerste

Ring, an welchem die Aenderungen beobachtet wurden, einen Durchmesser von $D = 1{,}4013$ cm hatte. Das Mikrometer, mit welchem diese Messungen gemacht wurden, hatte einen horizontalen Faden und zwei zu diesem senkrechte, mit Mikrometerschrauben verschiebbare Doppelfäden. Der Horizontalfaden wurde nun so gestellt, dass er den Ring gerade halbirte und die beiden Doppelfäden wurden auf die beiden Enden des so markirten Durchmessers eingestellt. Die grösste Aenderung, welche beim Elektrisiren mit einer Spannung von ungefähr 15,000 Volt beobachtet wurde, betrug 0,026 cm, also kaum den 55. Theil des Durchmessers. Da das Beobachtungsfernrohr aber über doppelte Vergrösserung hatte und das Auge für Verzerrungen eines Kreises sehr empfindlich ist, so war die Elipticität sehr auffällig, besonders im Momente des Entladens, wenn die Lemniscate wieder in die Ringform zurücksprang.

Es wurde bei drei verschiedenen Spannungen gemessen, und zwar bei 25,40 und 50 (C G S) Einheiten. Zu dem Ende wurde von einem zweiten Beobachter, Herrn Paschen, beim Fernrohre des Elektrometers durch Drehen der Influenzmaschine vermittelst der Transmission, das Fadenkreuz immer auf einem bestimmten Theilstriche erhalten; dies war an manchen sehr feuchten Tagen wohl sehr schwierig auszuführen.

Die beiden Quarzparallelepipede I und II gestatteten gemäss ihrer Orientirung die drei Fälle zu realisiren, dass die Richtung der Elektrisirung 0^0, 15^0, 30^0 mit einer der Richtungen maximaler Piëzoelektricität einschloss.

Aus der gemessenen Abnahme jenes Durchmessers, welcher in die Richtung der kleinen Axe und der Zunahme jenes Durchmessers, welcher in die Richtung der grossen Axe fiel, wurde immer das Mittel genommen und ebenso aus den 10 Einstellungen, welche auf jeder dieser Axen gemacht wurde.

Die bei diesen drei Orientirungen und drei verschiedenen Spannungen erhaltenen Aenderungen sind nun:

Spannung in C G S	Aenderung des Durchmessers in Centimetern, wenn:		
	$\varphi = 0^0$	$\varphi = 15^0$	$\varphi = 30^0$
25	$\pm$ 0,0130	$\pm$ 0,0125	$\pm$ 0,0120
40	$\pm$ 0,0202	$\pm$ 0,0186	$\pm$ 0,0181
50	$\pm$ 0,0254	$\pm$ 0,0236	$\pm$ 0,0228

Rechnet man aus diesen Werthen, wie gross die Aenderung für eine Einheit der ladenden Spannung ist, so ergibt sich:

	$\varrho = 0°$	$\varrho = 15°$	$\varrho = 30°$
	0,00052	0,00050	0,00048
	0,00051	0,00047	0,00045
	0,00051	0,00047	0,00047
im Mittel:	0,000513	0,000480	0,000467 cm.

Aus diesen Werthen kann man auf die Proportionalität der Aenderung mit den äusseren elektrisirenden Kräften ziemlich sicher schliessen.

Bildet man die Verhältnisse dieser Aenderungen für die drei Orientirungen und heissen dieselben Δ_0, Δ_{15}, Δ_{30} so findet sich:

$$\Delta_0 : \Delta_{15} : \Delta_{30} = 1 : 0{,}93 : 0{,}91.$$

Da die Aenderungen der Kreisdurchmesser den Resultirenden der inneren Compression proportional vorausgesetzt wurden, so müssten die eingangs gerechneten Resultirenden in demselben Verhältnisse stehen; diese ergaben:

$$R_0 : R_{15} : R_{30} = 1 : 0{,}97 : 0{,}89.$$

Bei der Ungenauigkeit der Messung dieser kleinen Aenderungen ist die Uebereinstimmung eine ziemlich gute zu nennen.

Die Lage der Axen der Lemniscaten war für die Fälle, wo $\varphi = 0°$ und $\varphi = 30°$ als bekannt vorausgesetzt worden und der Horizontalfaden dementsprechend horizontal oder um 45° geneigt eingestellt worden. Für Quarz II, welcher den Fall $\varphi = 15°$ nahezu realisirte, indem er ein Flächenpaar mit $\varphi = 12°$ und das andere mit $\varphi = 18°$ besass, ergab als Lage der grossen Axe als Mittel aus 12 Einstellungen für den Winkel α' den Werth:

$$\alpha' = 21° 12'.$$

Die Rechnung ergibt für die Fälle $\varphi = 12°$ und $\varphi = 18°$ resp. $\alpha'_{12} = 20° 30'$ und $\alpha'_{18} = 23° 34'$, also im Mittel $\alpha' = 22° 2'$ was wieder mit der Beobachtung gut stimmt.

III. Piëzooptische Versuche.

Als letzten Theil der Versuche wurden noch die Veränderungen des Axenbildes gemessen, welche bei blossem mechanischen Druck hervorgebracht werden. Zu dem Ende legte ich die beiden Quarzparallelepipede in die im I. Theile beschriebene Presse und brachte sie so in den optischen Apparat. Da die optischen Verhältnisse rings um die optische Axe ganz gleichartig sind, so müssen die concentrischen Ringe, welche Flächenpaare man immer drückt, zu Lemniscaten werden, und zwar immer mit der grossen Axe in der Richtung der Compression.

Obwohl zwischen die pressenden Backen der Presse Gummiplatten gelegt waren, so war es doch aus den Verzerrungen der Ringe an

verschiedenen Stellen des Parallelepipedes sehr gut sichtbar, dass der Druck nicht ganz gleichmässig auf der Fläche verbreitet war. Es wurde daher getrachtet, an möglichst viel Stellen und bei verschiedenen Lagen der gedrückten Flächen die Aenderungen zu messen, welche drei verschiedenen Drucken entsprechen.

So wurde gefunden:

Druck in Kilogramm	Aenderung in Centimetern	Aenderung pro Kilogramm
6,1375	$\pm$ 0,01259	0,00204
9,9875	$\pm$ 0,02174	0,00217
11,8995	$\pm$ 0,02623	0,00220

Die Proportionalität ist hier nicht sehr vollkommen, und scheinen die Aenderungen bei grossen Drucken etwas rascher zu wachsen, als die Drucke selbst. Für kleine Drucke wird diese Abweichung aber verschwindend. Man kann also im Mittel annehmen, dass bei einer Belastung von 1 kg eine Aenderung von $\Delta = \pm$ 0,00213 cm hervorgebracht wurde.

Bei der Elektrisirung mit einer Spannung von 1 (C G S) Einheit betrug die Aenderung

$\Delta_0 = 0{,}000513$ cm, $\Delta_{15} = 0{,}000480$ cm, $\Delta_{30} = 0{,}000467$ cm.

Diese hätten daher auch durch eine Belastung von 0,241, 0,225 und resp. 0,219 kg bewirkt werden können.

Nach Formel

$$R = \frac{p}{2}\left[(2+\sqrt{3})^2 \cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}}$$

rechnet sich dann der in einer einzelnen piëzoelektrischen Richtung durch die Elektrisirung bei einer Spannung von 1 (C G S) Einheit hervorgebrachte Druck $p = 0{,}129,\ 0{,}124,\ 0{,}125$ kg also im Mittel zu

$$p = 0{,}126 \text{ kg}$$

d. h. wenn die Richtung der Elektrisirung mit der piëzoelektrischen Axe zusammenfällt.

Rechnet man den elektrostatischen Druck, welchen die geladenen Elektrodenplatten auf den Quarz ausüben, wenn die Spannung 1 (C G S) Einheit beträgt, so ist dieser ungefähr 0,0002 kg, also gegenüber dem durch die Elektrisirung hervorgebrachten inneren Drucke sehr klein.

Eben bin ich daran, die gleichen Versuche, wie ich sie hier am Quarze durchgenommen habe, mit Turmalin vorzunehmen, und hoffe ich bei demselben, die hier gemachten Voraussetzungen bestätigt zu finden.

Zum Schlusse komme ich einer angenehmen Pflicht nach, wenn ich Herrn Prof. A. Kundt, in dessen Institute ich vorliegende Arbeit ausführte, meinen aufrichtigen Dank sage, für die grosse Liebenswürdigkeit, mit welcher er allen meinen Wünschen entgegenkam und fördernd an die Hand ging.

Ueber störende Einflüsse am Bunsen'schen Photometer und diesbezügliche Abänderungen.

Von

Dr. **B. Nebel.**

Wohl die meisten Intensitätsmessungen irdischer Lichtquellen, insbesondere solcher elektrischer Natur, werden mit dem Bunsen'schen Photometer angestellt, und zwar am häufigsten in der Form, dass die beiden zu vergleichenden Lichtquellen fest sind, während die Camera mit dem Fettfleckpapier beweglich bleibt. Um beide Flächen des Papieres gleichzeitig beobachten zu können, sind nach Rüdorff in der Camera zwei geneigte Spiegel angebracht, wobei wiederholt theoretisch wie praktisch nachgewiesen worden ist, dass man zu dem gleichen Resultat gelangt, indem man entweder von jeder Seite her den Fettfleck zum Verschwinden bringt und diese beiden Werthe bei der Rechnung benutzt, oder indem man die beiderseitigen Fettfleckbilder der Spiegel auf gleiche Dunkelheit, bezw. Helligkeit einstellt. Da das letztere Verfahren nur die Hälfte Zeit erfordert, so bringen die meisten Beobachter den Fettfleck auf gleiche Dunkelheit, bezw. Helligkeit.

Was nun die so gewonnenen Resultate betrifft, so hat deren Genauigkeit noch lange nicht das gewünschte Maass erreicht, und man pflegt, sich mit einigen Procenten zu begnügen. Viele glauben übereinstimmendere Werthe zu erhalten, wenn sie suchen, die einzelnen Beobachtungen in sehr kurzer Zeit auszuführen. Für offene, in kurzer Zeit sich stets einseitig ändernde Lichtquellen, wie Stearinkerzen u. dgl., mag dies in dieser Hinsicht als richtig zugegeben werden, in den Fällen indessen, in welchen sich die Aenderungen auf längere Zeiträume erstrecken, z. B. bei Petroleumlampen und noch mehr bei Glühlampen, oder in welchen die Lichtschwankungen mehr zufälliger Natur sind, wie bei Bogenlampen, der von Hefner-Alteneck'schen Amylacetatlampe u. s. w., sollte von dem schnellen Beobachten aus zwei Gründen abgesehen werden.

Einmal hat sich der vorhergehende Lichteindruck im Auge noch nicht vollständig verwischt, ehe ein neuer dazu kommt, beide mischen

sich und die Zeit ist zu kurz, um ein Urtheil mit Ueberzeugung abgeben zu können. Daher kommt es, dass solche, welche an ein scharfes Beobachten nicht gewohnt sind, anfangs am Photometer bessere Resultate erzielen, als später, wenn sie auf noch bestehende Ungleichheiten aufmerksam gemacht werden.

Sodann gelangt der Beobachter durch das Bestreben, die Messungen in schneller Aufeinanderfolge auszuführen, in eine gewisse Erregung, die ihn unfähig macht, geringe Lichtnüancen auszugleichen, was bei spectralanalytischen Messungen längst festgestellt worden ist.

Weitaus der grösste Einfluss auf die Schärfe der Beobachtungen rührt von dem seitlich in das Auge dringenden Licht her. Dasselbe kommt entweder direct von den Lichtquellen, oder wird bei stärkeren Lichtquellen doch von den mattschwarzen Wänden des Photometerraumes reflectirt. Diesem Uebelstand suchen die Beobachter dadurch abzuhelfen, dass sie ihren Kopf und den Vordertheil des Photometergehäuses mit einem schwarzen Tuch bedecken oder sich eine Kapuze aus Pappe anfertigen. Das Tuch eignet sich für eine geringe Zahl von Beobachtungen, hat man indessen längere Zeit zu photometriren, so wird der Kopf heiss, die ausgeathmete Kohlensäure kann nicht mehr recht entweichen, wodurch die Urtheilskraft wesentlich gestört wird; bei der Kapuze sind diese Einflüsse etwas geringer, dagegen dringt reflectirtes Licht von der gegenüberliegenden Wand und dem Photometergestell in das Auge.

Wie sehr das seitlich in das Auge gelangende Licht auf die Empfindlichkeit, schwache Lichtunterschiede noch festzustellen, einwirkt, davon kann sich Jeder, der auch nicht gerade photometrische Studien macht, durch folgende Versuche überzeugen.

1. Betrachtet man eine grössere, gleichmässige Fläche, z. B. die fensterlose Wand eines Hauses zuerst mit blossem Auge, sodann durch eine trichterförmige, dunkle Röhre, so erscheint im letzteren Fall nicht nur die betreffende Stelle viel heller als zuvor, sondern man kann auch nach einiger Zeit eine Menge von Dingen unterscheiden, die man vorher nicht bemerken konnte.

2. Sitzt man mit dem Rücken gegen die Sonne und beugt sich so über ein offenes Buch, dass dasselbe vollständig durch den Körper beschattet ist, während der z. B. mit Kies belegte Boden diffus reflectirtes Sonnenlicht seitlich in das Auge sendet, so erscheint der Druck weniger scharf und schwarz, als wenn man noch die Arme um das Buch breitet, oder einen Pappendeckel darunter legt, welcher durch den Körper ebenfalls vor der Sonne geschützt ist, oder wenn man sich in gleicher Weise etwas zur Seite setzt, wo der Boden frei von Sonnenlicht ist.

3. Eine mit hartem Bleistift hergestellte feine Zeichnung ist selbst bei diffusem Tageslicht oft kaum zu erkennen, während sich die Striche scharf und deutlich von dem Papier abheben, sobald wir das Licht mit der Hand abblenden.

Wie man bei spectralanalytischen Messungen darauf bedacht ist, jedes seitliche Licht von dem Auge fernzuhalten, so soll dies auch

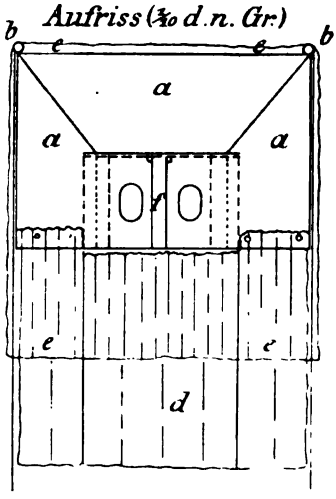


Fig. 1a.

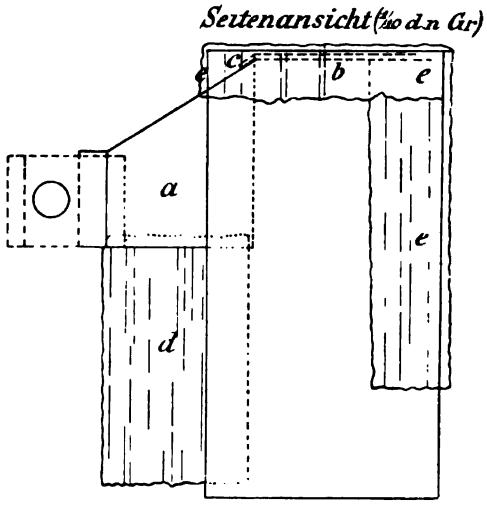


Fig. 1b.

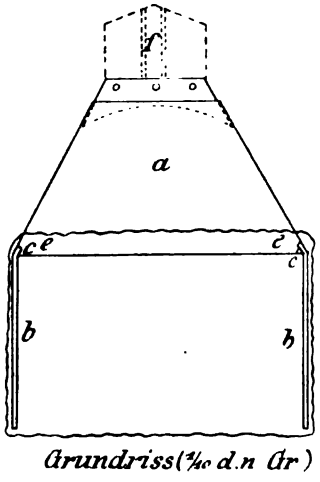


Fig. 1c.

bei der Lichtvergleichung am Bunsen'schen Photometer geschehen und zwar in einer den Beobachter keineswegs störenden Weise. Zu dem Zweck wurde zunächst an das ursprüngliche Photometergehäuse, welches in den Figuren 1 a, b, c gestrichelt ist, während die Zuthaten durch ausgezogene Linien angedeutet sind, ein mattschwarzer Aufsatz *a* aus 1,3 mm starkem Messingblech aufgeschraubt und je an den beiden oberen Ecken ein horizontaler, 4 mm dicker Kupferdraht *b* angelöthet. Daran hängen an kleinen Haken rechts und links Schirme herab, welche durch Aufeinanderkleben zweier mattschwarzen Papiere hergestellt sind.

An der unteren Seite des Photometergehäuses und an dem unteren Theil der Seitenwände des Messingblechaufsatzes ist an kleinen Häkchen

ein schwarzes Tuch *d* angebracht, dessen Länge so berechnet ist, dass man darunter hinweg mit den Händen das Photometergehäuse verschieben oder die feine Einstellungsschraube bewegen kann. Das von der Rückwand des Photometerzimmers reflectirte Licht genügt, um noch ein Bild des Beobachters auf den Spiegeln zu entwerfen, weshalb nach oben und hinten die Verlängerung des Aufsatzes durch einen schwarzen Musselin-Stoff *e* abgeschlossen wurde, welcher an den Enden *c* der Kupferdrähte *b* befestigt ist. Absichtlich wurde hierzu kein Tuch verwendet, damit eine bessere Luftcirculation stattfinden kann, und der nunmehr durch Nichts beengte Kopf des Beobachters im Laufe der Zeit nicht unter Schwüle zu leiden hat, überdies genügt dieser leichte Stoff zur Abhaltung dieses reflectirten Lichtes.

Um das stabile Gleichgewicht nicht zu stören, habe ich die hölzerne Führung des Gehäuses in der Photometerbank mit einem Kilogramm belastet.

Durch die obigen Vorkehrungen ist der raschen Erschöpfung des Beobachters infolge eines beengenden Gefühles des Kopfes oder der allzu frühen Ermüdung der Augen durch seitlich eindringendes Licht vorgebeugt. Indessen ist es ebenfalls nöthig, dem Körper eine möglichst bequeme Stellung zu geben, wodurch dessen Kräfte keineswegs angestrengt werden. — Bei spectralanalytischen Versuchen wird hierauf stets Rücksicht genommen; dass derartige Vorsichtsmaassregeln auch beim gewöhnlichen Photometriren nöthig sind, wird Jeder zugeben, der selbst stundenlang sich am Photometer beschäftigt hat oder wenigstens einen solchen unmittelbar nach dieser Arbeit zu Gesicht bekommt.

Ist demnach der Beobachter nicht gewohnt, längere Zeit zu stehen, so muss er sich für einen zu der Höhe des Photometers passenden Sitz sorgen; viel geeigneter wäre eine Bank, die ebenso lang wie das Photometer ist, überdies beweglich um die Längsaxe, so dass sie sich beim Erheben leicht zurückneigt. Zum Aufstellen der Füsse müsste eine Latte angebracht werden, und zwar nicht in Verbindung mit der Photometerbank, damit diese keinerlei Erschütterung erfährt. Kurz und gut der Körper muss sich in ganz normalem Zustand befinden, wenn nicht die Urtheilskraft gestört werden soll.

A. Krüss in Hamburg, dessen Bunsen'sche Photometer schon eine grosse Verbreitung gefunden haben, hat an den seitlichen Lichtöffnungen des Photometergehäuses oben und unten kleinere runde Ausschnitte angebracht, um die Centrirscheibe bei der Aufstellung der Lichtquellen einsetzen zu können. Diese Ausschnitte sind demnach auch als helle Flächen in den Spiegelbildern vorhanden und senden Licht in das Auge, welches auf ganz andere Stellen gerichtet ist, wo-

durch letzteres in keiner Weise gewinnt. — Aus diesem Grunde habe ich oberhalb und unterhalb der Lichtöffnungen auf der Aussenseite des Photometergehäuses je eine Kopfschraube anbringen lassen, an welchen die Centrirscheibe mittels Bajonnetteverschlusses festgehalten wird. Damit jede seitliche Verschiebung derselben von vornherein ausgeschlossen ist, besitzt dieselbe einen kreisrunden Ansatz, der genau in die Lichtöffnungen eingepasst ist.

Leonhard Weber sagt in seiner Theorie des Bunsen'schen Photometers[1]) auf S. 700: „Bei Benutzung des Bunsen'schen Photometers muss, mit Ausnahme der auf reiner Substitution beruhenden Beobachtungsmethoden, eine Vertauschung der Schirmseiten (eventuell Vertauschung der verglichenen Flammen oder Umkehr des Photometergehäuses) vorgenommen werden, falls nicht beide Schirmseiten genau gleich beschaffen sind. Letzteres ist in der Regel bei den in der Praxis angewandten Schirmsorten nicht der Fall".

Die Vertauschung der Flammen ist stets zeitraubend, unter Umständen sogar schwierig, wenn dieselben besondere Zurüstungen, wie bei Bogenlampen u. s. w. erfordern; eine Umkehr des Photometergehäuses ist, ganz abgesehen von der Unbequemlichkeit, in den seltensten Fällen möglich, theils weil die meisten Photometerzimmer schmale, langgestreckte Räume sind, bei welchen des Platzes wegen es von vornherein nöthig ist, die Photometerbank an einer der Längswände aufzustellen, theils weil die Bank an eisernen Wandträgern angebracht werden muss, um sie gegen Erschütterungen zu schützen.

Somit bleibt nur eine Vertauschung der Schirmseiten übrig, die aber nicht darin bestehen soll, dass man das Fettfleckpapier herausnimmt, umkehrt und wieder in seinen Rahmen einschiebt; denn eine solche Manipulation, öfters ausgeführt, reibt die Papierflächen auf, wodurch nicht nur das Papier an und für sich nothleidet, sondern auch die beiden Schirmseiten werden nicht gleichmässig corrodirt.

Daher habe ich die Zwischenwand, welche das Fettfleckpapier enthält, zum Herausnehmen eingerichtet und zwar ihm die Gestalt eines soliden Schiebers *f* gegeben, welchen die Fig. 1a von vornen zeigt, während Fig. 2 die Seitenansicht bietet. Durch Herausziehen und umgekehrtes Einsetzen des Schiebers ist die Vertauschung des Schirmes in der kürzesten Zeit vollzogen.

Obwohl Weber in der oben angeführten Stelle sagt, dass in der Regel bei den in der Praxis angewandten Schirmsorten die beiden Seiten derselben genau gleich beschaffen sind, so kann ich dies nur für neue Schirme zugeben; denn die Papiere verändern sich im Laufe

1) L. Weber, Wied. Ann. Bd. 31 S. 676 (1887).

der Zeit ungleichmässig, zumal, wenn sie nicht gegen das Tageslicht geschützt sind, so ist z. B. die eine Seite eines von A. Krüss in Hamburg dem hiesigen elektrotechnischen Laboratorium gelieferten Fettfleckpapieres ganz gelb geworden, weil dieselbe mehr dem Tageslicht ausgesetzt war, als die andere. Derartige Papiere sollten demnach beim Nichtgebrauch im Dunkeln aufbewahrt werden.

Auch ein weiterer Grund spricht für die Vertauschung des Schirmes. Bisher befand sich das Fettfleckpapier lose in dem ziemlich weiten Schlitz des Metallrahmens, weshalb es sich mehr oder weniger an die eine oder andere Seite desselben anlegt. Im Lauf der Zeit bleibt das Papier, dessen grösste Fläche keinerlei Halt besitzt, nicht mehr straff und zeigt allmählich eine Durchbiegung, die einmal von dem veränderlichen Feuchtigkeitsgehalt der Luft, sodann von einer Unaufmerksamkeit beim Reinigen der Spiegel herrühren mag. Damit die erwähnte Durchbiegung möglichst gering wird, muss das Papier durch den Rahmen festgehalten werden, worauf auch schon bei der Herstellung des Fettfleckpapieres Rücksicht zu nehmen ist.

Den Fettfleck stellte ich in der Weise her, dass ich zunächst auf einem Reissbrett über einem guten dicken Bogen Fliesspapier einen Bogen ungeleimtes Maschinenpapier von 0,061 mm Dicke aufspannte. Eine mit Stiel versehene, genau abgedrehte Messingscheibe von 20 mm Durchmesser wurde zuerst erwärmt, dann in geschmolzenes Wallrath eingetaucht, der Ueberschuss an der Gefässwand abgestreift und nach einigem Drehen, damit sich der Rest auf der Scheibe gleichmässig vertheile, vorsichtig auf das Papier aufgesetzt.

Nachdem der Bogen in passenden Entfernungen mit solchen Fettflecken versehen ist, wird nun von den am besten gelungenen das überschüssige Wallrath entfernt, indem man auf die betreffenden Stellen gutes, ziemlich dickes Fliesspapier legt und mit einer nur schwach erwärmten Metallscheibe solange darüber geht, bis jeder Glanz des Fettflecks verschwunden ist. Zu starkes Erwärmen führt zu einer nicht gewünschten Vergrösserung desselben.

Auf den besten wurde nun ein Rahmen von kräftigem Schreibpapier geklebt und nach genügendem Trocknen von dem Reissbrett heruntergenommen. Leider blieb auch hier das Papier nicht straff, weshalb ich bei einem neuen Papier ein dünnes Messingrähmchen mit Cannadabalsam aufklebte, nach dem Loslösen von dem Reissbrett wurde die Rückseite ebenfalls auf ein congruentes Messingrähmchen gelegt und die Ränder durch Papierstreifen zusammengehalten.

Auf diese Weise blieb das Fettfleckpapier straff und konnte beim Einschieben wegen der beiden Messingrähmchen an keiner Stelle gerieben werden. Damit keinerlei Bewegung in dem Schieber stattfinden

kann, ist die in Fig. 2 sichtbare Rahmenseite mit vier Löchern *g* versehen, die genau in Stifte passen, welche an der unteren Rahmenwand befestigt sind. Durch die beiden Federn *h* werden die beiden Rahmenhälften zusammengepresst.

Auf drei Kanten des Schiebers ist senkrecht dazu ein breites starkes Messingblech *f* (Fig. 1a und Fig. 2) gelöthet, oben und unten dient es zur Führung, während die Vorderseite *f*, in Fig. 1a sichtbar, den Zweck verfolgt, einmal dem Auge das hellbeleuchtete Fettfleckpapier zu verdecken, so dass von diesem kein seitliches Licht das Auge belästigen kann, sodann um letzteres stets in dem gleichen Abstand von dem Photometergehäuse zu halten, indem sich von ihm aus in der deutlichen Sehweite die verticalen Seitenkanten des Schiebers als Tangenten der äusseren Lichtkreise in den Spiegelbildern projiciren.

Schieber mit Fettfleckpapier (⅓ d. n. Gr.)

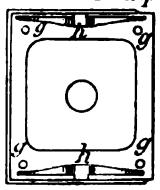


Fig. 2.

Da die beiden Augen gewöhnlich verschiedene Sehkraft besitzen, in ganz besonderem Maasse bei solchen, die viel mit dem Fernrohr beobachten, so ist es nöthig, dass man sich auch bei dem Photometriren daran gewöhnt, nur mit einem Auge die Messungen auszuführen, zumal es bei dem einen oder anderen Beobachter mehr oder weniger häufig vorkommt, dass die beiden Bilder leicht in ein einziges übergehen. Natürlich muss zwischen zwei Einstellungen das Auge geschlossen werden, damit der vorige Lichteindruck vollständig verschwindet und das Auge wieder ausruht.

Wer nur mit Mühe das andere Auge zuzuhalten vermag, bedeckt es besser mit einem schwarzen Tuchläppchen, wie man es bei Augenkranken häufig sieht.

Photometrische Messungen, welche ich in den letzten Wochen mit dem in oben angeführter Weise abgeänderten Photometer des physikalischen Instituts angestellt habe, liessen eine wesentliche Erhöhung der Genauigkeit erkennen. Von den zehn Einstellungen bei jeder Lichtmessung wurden jedesmal fünf mit umgekehrtem Schirm ausgeführt.

Da diese Beobachtungen Zweck einer speciellen Arbeit sind, die ich leider auf einige Zeit unterbrechen muss, so sehe ich davon ab, jetzt schon einen Theil meines Beobachtungsjournals zu veröffentlichen.

Stuttgart, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, Juli 1888.

Ein Feind der Isolation elektrischer Hausleitungen.

Von

Dr. **B. Nebel.**

Seit langer Zeit war es üblich, bei elektrischen Hausleitungen die isolirten Drähte, d. h. Kupferdrähte, welche mit Guttapercha und Baumwollfäden umgeben sind, direct auf den Wänden zu befestigen. Neuerdings hat man von diesem Verfahren bezüglich der Hauptleitungen für elektrische Beleuchtung und in besonderen Fällen auch bezüglich der Zuleitungsdrähte zu jeder einzelnen Glühlampe Abstand genommen, weil die dazu nöthigen Ströme grösserer Spannung auf feuchten Wänden keine genügende Isolation mehr finden. Es werden daher derartige Drähte auf Holzlatten geheftet, die sich an den Wänden anschrauben lassen. Will man die Drähte gegen äussere Beschädigungen sichern, so werden die sonst offen daliegenden Leitungen durch eine zweite Holzlatte in entsprechender Weise zugedeckt. — Bei den Strömen von geringerer Spannung, wie dies z. B. bei Haustelegraphen, Klingelwerken, Telephoneinrichtungen u. s. w. der Fall ist, bietet die obige Isolation der Kupferdrähte hinreichenden Schutz gegen nennenswerthe Verluste, so dass man immer noch derartige Leitungen ohne jegliches Bedenken direct an der Wand anbringen lässt.

Bei unserem Klingelwerk indessen zeigte sich seit einiger Zeit, dass die Wirkung trotz Erneuerung der Batterie erst bei einer wesentlichen Vermehrung derselben der früheren Stärke gleichkam. Der Fehler musste demnach offenbar in der Leitung liegen; obgleich eine äussere Beschädigung derselben nicht entdeckt werden konnte, wurde die Leitung weggenommen und einer näheren Untersuchung unterworfen. Dabei ergab sich, dass bei denjenigen Drähten, über welche hinweg seiner Zeit der Anstrich der Wände erneuert worden ist, die Guttaperchaschicht vollständig zerstört war. An vielen Stellen war selbst bei vorsichtigem Abwickeln der Baumwollfäden nur ein Staubwölkchen zu bemerken, bei anderen noch kleine Theile zerbröckelter, spröder Guttaperchamasse, die an den Fasern der Baumwollfäden hafteten und sich mit diesen vollständig von dem Kupferdraht loslösten. Die Kalkfarbe, resp. die sog. Leimfarbe wurde bei dem An-

streichen von den porösen Baumwollfäden begierig aufgenommen und übte nun auf die Guttaperchahülle ihr Zerstörungswerk aus, während die Fäden, wie aus dem Aussehen gefolgert wird, nicht wesentlich verändert wurden.

Dass die Isolation nur durch den Anstrich vernichtet worden ist, lässt sich aus denjenigen Theilen der Leitung schliessen, welche frei von Anstrich waren; bei diesen ist die Guttaperchahülle, obwohl spröde infolge der Temperatureinflüsse, beim Abwickeln der Baumwollfäden überall compact geblieben.

Auch die offenen Leitungen für die elektrische Beleuchtung, welche gegen die Feuchtigkeit auf Holzlatten geführt sind, sind der Zerstörung durch den Anstrich ausgesetzt, da die Tüncher erfahrungsgemäss wenig Rücksicht auf derlei Dinge nehmen.

Der sicherste Schutz gegen Anstrich, wohl aber auch der theuerste, besteht darin, dass man die elektrischen Leitungen an Decken und getünchten Wänden in geschlossenen Holzleisten führt. Indessen glaube ich, dass man die Leitungen vor dem Eindringen der Kalkfarbe auch dadurch bewahren kann, dass man die isolirten Drähte mit einer guten, etwas dicken Oelfarbe überstreicht. Es ist zu hoffen, dass die damit von mir angestellten Versuche nach einiger Zeit zeigen werden, dass weder das Oel der Oelfarbe schädlich auf die Guttaperchahülle eingewirkt, noch dass der Kalkanstrich durch die Oelfarbe hindurch einen zerstörenden Einfluss ausgeübt hat.

Stuttgart, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, August 1888.

Demnächst erscheint in dritter verbesserter Auflage:

Taschenbuch

für

Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von

Ingenieur **S. Freiherr v. Gaisberg.**

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Im Verlag von R. Oldenbourg in München und Leipzig ist erschienen:

Leitfaden

zur

Anfertigung mikroskopischer Dauerpräparate

von

Otto Bachmann.

Lehrer an der kgl. Ackerbauschule in Landsberg a. L.

Mit 87 Abbildungen. Preis broschirt M. 4.—. geb. M. 5.—.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdriefsen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden."

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(10/11)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für Lehrzwecke.

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (9/11)

Verlag von **B. F. Voigt** in **Weimar.**

Lehrbuch

der

OPTIK.

Dritte Auflage,

vollständig neu bearbeitet von

Ferdinand Meisel.

Mit Atlas von 17 Foliotafeln.

gr. 8. Geh. 12 Mark. (14/11)

Vorrätig in allen Buchhandlungen.

Czeija & Nissl

Wien VII, Zieglergasse 27,

empfehlen:

Dynamomaschinen für Schulen,

Tangenten-Bussolen nach Prof. Kessler,

Telephone,

Telegraphen-Apparate.

Sorgfältigste Ausführung.

Billige Preise. (15/11)

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Ueber den gegenwärtigen Stand

der

elektrischen Beleuchtung.

Bericht

an den Verein der Gas- und Wasserfachmänner Deutschlands

erstattet von

Dr. Schilling sen.

Octav. 45 Seiten. *Brochirt Preis 70 Pf.*

FEB 4 1889

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 12. Heftes.

Ueber die Energie und die Gleichgewichtsverhältnisse magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper. Von Dr. Gottlieb Adler. S. 733.
Messungen der Transversaltöne gespannter Drähte. Von A. Kurz. S. 759.
Ueber Sauerstoffzellen. Von Walther Wolff. S. 762.
Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der Emission von Licht- und Wärme-Wellen. Von August Häussler. S. 782.
Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 29. Mai 1888. S. 795.
Eingesendete Bücher. S. 796.
Register. S. 797.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1888.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Im Verlage von R. Oldenbourg in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Der sechste Jahrgang 1889

des

Kalender für Elektrotechniker.

Herausgegeben von

F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant gebunden Preis 4 M.

Der vorliegende Jahrgang hat wiederum eine gründliche Umarbeitung und an vielen Stellen Erweiterungen erfahren. Es war das eifrigste Bestreben des Herausgebers dem Kalender jene Qualitäten zu verleihen, welche denselben befähigen ein täglicher Begleiter und zuverlässiger Rathgeber der Elektrotechniker zu sein. Die für den Arbeitstisch bestimmte mit dem vorigen Jahrgang ausgegebene Beilage ist dem neuen Jahrgange nicht wieder beigegeben worden, da sich wesentliche Aenderungen nicht für nöthig erwiesen. Die Verlagshandlung hat noch eine Anzahl dieser Beilagen, welche Käufern des neuen Jahrganges, die den vorigen nicht besitzen, gegen Vergütung von 60 Pf., noch zu Diensten stehen; das Inhaltsverzeichniss dieser Beilage ist abgedruckt im Inseratentheile der Nr. 1 des Centralblattes für Elektrotechnik 1888. Der Inhalt des neuen Jahrganges wolle aus Nachstehendem gefl. ersehen werden.

Inhaltsverzeichniss des Taschenbuches.

Seite

I. Mathematik.

1. Die Logarithmen der natürlichen Zahlen 2
2. Die trigonometrischen Zahlen . . 4
3. Die Logarithmen der trigonometrischen Zahlen 5
4. Tabelle der Quadrate, Cuben, Quadrat- u. Cubikwurzeln, Reciproken, natürl. Logarithmen, Kreisumfang und Kreisinhalt aller natürlichen Zahlen von 1—1000 11
5. Tabelle zur Verwandlung von gemeinen Logarithmen in natürliche und umgekehrt 34
6. Die ersten 12 Potenzen der Zahlen 1 — 12 35
7. Maass- und Gewichtstabellen . 35
   - Metrisches Maass 35
   - England 36
   - Russland 36
   - Reduction des Metermasses auf englisches Maass und umgekehrt 37
8. Logarithmen oft vorkommend. Zahlen 39
9. Dimensionen der Erde 39

II. Physik.

A. Mechanik 40
   - Tafel der specifischen Massen oder Dichtigkeiten einiger Körper . 40

B. Akustik 42

C. Optik 43
   1. Lichtmessungen (Photometrie) . 43
   2. Reflexion 56
   3. Refraction (Linsen) 56
   4. Dispersion 56

D. Wärme 57
   1. Thermometer 57
   2. Ausdehnung durch die Wärme . 58
   3. Dichte des Wassers bei Temperaturen von 0° und 100° C. . 58
   4. Tabelle für die Werthe von $1 + 0{,}00366\,t$ von $-2°$ bis $+30°$ C. 59
   5. Schmelzpunkte verschied. Substanzen 59
   6. Schwindmaasse 59
   7. Siedepunkte verschiedener Substanzen bei 760 mm Druck . . 59
   8. Tabelle d. Spannkraft d. Wasserdampfes in Atmosphären für die Temperatur von 100° bis 330°C. 60
   9. Latente Wärme 60
   10. Mechanisches Aequivalent der Wärme 60
   11. Specifische Wärme 60
   12. Innere Wärmeleitung 61
   13. Aeussere Wärmeleitung . . 62
   14. Verbindungswärme 62

E. Magnetismus und Elektricität . 64
   1. Westliche Declination der Magnetnadel für Deutschland . . 64
   2. Horizontale Intensität des Erdmagnetismus 65
   3. Pole, Axe, Moment und Intensität der Magnetisirung von Stabmagneten 65
   4. Herstellung der Stahlmagnete . 66
   5. Magnetisches Feld 66
   6. Magnetische Induction . . . 68
   7. Magnetische Permeabilität und Susceptibilität 68
   8. Magnetisirung von Eisen und Stahl 69
   9. Hysteresis 70
   10. Einfluss der Temperatur auf die Magnetisirung 72
   11. Elektrische Spannungsreihen . 72
   12. Ohm'sches Gesetz 73
   13. Capacität 73
   14. Kirchhoff'sche Gesetze . . . 74
   15. Berechnung des Widerstandes in körperlichen Leitern . . . 76
   16. Ampère'sches Gesetz 78
   17. Induction 81
   18. Joule'sches Gesetz 82

III. Elektrotechnik.

A. Elektrisches Maasssystem . . . 83
   a) Absolutes elektromagnetisches Maassesystem 83
   b) Vergleich zwischen absolutem elektromagnetischen und elektrostatischem System 83
   c) Praktisches vom Pariser Congress 1881 adoptirtes Maassesystem . . 83
   d) Grössere technische Einheiten . 84
   e) Vergleichstabellen 84

B. Tabellen über das elektrische Verhalten der Körper 85
   a) Metalle 85
   b) Kohlenstäbe 95
   c) Isolatoren 96
   d) Flüssigkeiten 96
   e) Specifische Inductionscapacität . 97
   f) Tabelle über Polarisation . . 98
   g) Tabelle der thermoelektr. Kraft 98
   h) Der absolute Nullpunkt der Elektricität 98

C. Elektrische Messmethoden . . . 98
   1. Elektricitätsmenge 99
   2. Stromstärke 100
   3. Spannung 108
   4. Widerstand 110
      - Construction der Widerstandskästen 140
   5. Capacität 142
      - Herstellung der Condensatoren 144
   6. Effect 145

D. Dynamoelektrische Maschinen . 149
   a) Schaltungen 149
   b) Construction und Prüfung der Dynamomaschinen 152
      - Wechselstrommaschinen . . . 163
      - Transformatoren 163
   c) Die gebräuchlichsten Dynamomaschinen 164

E. Elektrische Beleuchtung . . . 180
   a) Bogenlicht 180
   b) Construction und Herstellung der Glühlampen 183
   c) Beleuchtungsstärke, Berechnung der erforderlichen Lichtstärke 187
   d) Systeme der Stromvertheilung . 189
   e) Einrichtung der Centralen . . 190
   f) Berechnung der Leitungen . . 190
   g) Ausführung der Leitungen . . 192
   h) Sicherheitsvorschrift für elektrische Anlagen 197
   i) Beanspruchung der Centralen und Gestehungskosten des Lichts . . 202

F. Elektrochemie 203
   a) Die galvanischen Batterien . . 203
      1. Elektromotorische Kraft und Widerstand 203
      2. Effect 206
      3. Herstellung einiger Elemente 206
      - Normalelemente 207
   b) Accumulatoren 209
   c) Elektrolyse 215
   d) Galvanoplastik 216
      1. Allgemeine 216
      2. Die Bäder 217
   e) Elektrometallurgie 220

G. Die elektrische Kraftübertragung . 225
   a) Die Theorie in erster Annäherung 225
   b) Genauere Theorie 225
   c) Berechnung v. Kraftübertragungen 226

H. Elektrische Kraftvertheilung . . 227

J. Construction und Prüfung der Blitzableiter 227

K. Telegraphen-Technisches 231
   a) Leitungsmaterial 231
      1. Hölzerne Stangen 231
      2. Eiserne Stangen, Träger, Stützen der Isolationsvorrichtungen . 232
      3. Isolatoren 232
      4. Leitungsdraht 232
      5. Angabe über die zu Telegraphen-Anlagen gebräuchlichsten Sorten der Telegraphendrähte . 233
      6. Zusammenstellung der Bedingungen für die Prüfung von Telegraphendrähten 233
      7. Spannung und Durchhang von Telegraphenleitungen 233
      8. Vergleichende Zusammenstellung der Versuchsergebnisse mit Telegraphen- und Telephondrähten 239
      9. Vergleichstabelle von Telephondrähten aus verschiedenem Material bei gleichem Leitungswiderstande von 68 SE. für 1 Km und + 15° C. 240
   b) Bestimmung von Fehlern in den Leitungen 241
      1. Fehlerbestimmungen bei oberirdischen Leitungen . . . 241
      2. Fehlerbestimmungen bei Kabeln 243
   c) Erdleitungen 250
      1. Herstellung von Erdleitungen 251
      2. Messen von Erdleitungswiderständen 251
   d) Das Morse-Alphabet 252
   e) Sprechgeschwindigkeit 253

IV. Gemeinnütziches.

Deutsches Reichspostwesen 254
Deutsches Reichstelegraphenwesen . . 256
Disconto-Tabelle 257
Wechselstempel im Deutschen Reich . 258
Münztabelle 258
Normen für die Berechnung des Honorars für maschinentechnische und Ingenieurarbeiten 259
Geographische Lage einiger Städte im mittleren Europa, bezogen auf den Meridian von Ferro 262
Tabelle der im elektrotechnischen Theil gebrauchten Symbole 264

Bezugsquellen.

Kalendarium und Notizkalender für jeden Tag. Von Anfang November 1888 bis Ende December 1889.

Notizblatt für Adressen.

Fachliche Anzeigen.

Verzeichniss der Elektrotechniker als B-lage

HARVARD COLLEGE
FEB 4 1889
LIBRARY

Ueber die Energie und die Gleichgewichtsverhältnisse magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper[1]).

Von

Dr. **Gottlieb Adler.**

Die vorliegende Arbeit leitet zunächst, ausgehend von der Poisson-schen Theorie der magnetischen und dielektrischen Induction, den Ausdruck für die Energie eines durch unveränderliche magnetische oder elektrische Kräfte magnetisch oder dielektrisch polarisirten Systems her. Sie gelangt hierbei zu Relationen, die zuerst v. Helmholtz aufgestellt hat und zu denen später auf ganz anderem Wege Stefan gelangt ist.

An einzelnen, auf anderem Wege von Thomson zuerst gerechneten Beispielen, wird sodann kurz die Verwendbarkeit des für die magnetische Energie aufgestellten Ausdruckes gezeigt, die Bewegungstendenz magnetisch polarisirter Körper im magnetischen Felde herzuleiten.

Ganz besonders einfach aber ergeben sich unter Zugrundelegung dieses Ausdruckes für die Energie nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen jene Erscheinungen, welche Quincke an Flüssigkeiten im magnetischen oder elektrischen Felde beobachtet hat.

Eine kurze, übersichtliche Rechnung, die von jeder Hypothese über die Wirkungsweise der magnetischen oder elektrischen Kräfte frei ist, führt dann zu jenen Formeln, die Quincke benutzt hat, um aus den erwähnten Versuchen die Magnetisirungszahlen und Dielektricitätsconstanten von Flüssigkeiten zu bestimmen.

§ 1.

Herleitung des Ausdruckes für die Energie eines magnetisch oder dielektrich polarisirten Systems.

Um die Verhältnisse eines Systems magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper rechnend zu verfolgen, mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

1) Mit Benutzung zweier Arbeiten aus dem 92. und 95. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie.

Ich will mit

$$F,\ G,\ H$$

bezeichnen die X- bezüglich Y- und Z-Componente der unveränderlichen magnetischen oder elektrischen Kraft, wie sie ursprünglich ohne die eintretende magnetische oder dielektrische Polarisation in einem Punkte xyz des ursprünglich unpolarisirten Körpers herrschen würde, ihr Potential mit Φ, ihre Resultirende mit J, so dass

$$J^2 = F^2 + G^2 + H^2 \qquad (1$$

ist. Mit

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}$$

mögen bezeichnet werden die nach denselben Axen genommenen Componenten der durch die eintretende magnetische oder dielektrische Polarisation hervorgerufenen Kraft in demselben Punkte x, y, z, ihr Potential mit $\mathfrak{B}$.

Endlich mögen

$$X,\ Y,\ Z,$$

bezeichnen die auf dieselben Axen bezogenen Componenten der Gesammtkraft R, wie sie ein positiver Einheitspol infolge der vereinten Wirkung der ursprünglichen und der inducirten magnetischen bezüglich elektrischen Kräfte an der Stelle xyz des Kraftfeldes erfährt, so ist

$$\left.\begin{aligned} X = F + \mathfrak{X},\ Y = G + \mathfrak{Y},\ Z = H + \mathfrak{Z} \\ R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

Die Componenten des auf die Volumseinheit bezogenen magnetischen bezüglich elektrischen Moments μ, das durch die Wirkung der wirksamen Kräfte im Punkte xyz inducirt worden ist, will ich bezeichnen mit

$$\xi,\ \eta,\ \zeta.$$

Sie sind nach der Poisson'schen Theorie der magnetischen und elektrischen Induction mit der an derselben Stelle herrschenden Gesammtkraft verknüpft durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi = kX,\ \eta = kY,\ \zeta = kZ \\ \mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k^2 R^2 \end{aligned} \qquad (3$$

wo k die Magnetisirungszahl für diese Stelle des magnetischen Feldes bezeichnet, eine Zahl, charakteristisch für die Substanz, die diese Stelle des Feldes einnimmt und unabhängig vorausgesetzt von der Grösse der magnetisirenden Kraft. Im Falle der dielektrischen Polarisation ist

$$k = \frac{K-1}{4\pi},$$

wo K die Dielektricitätsconstante der bezüglichen Substanz bezeichnet.

Die Berechnung der Energie des polarisirten Systems unter der Wirkung der polarisirenden Kräfte ist nach der folgenden, auf der Fluidaltheorie basirenden, elementaren Betrachtung durchgeführt.

In einem magnetischen Felde, hervorgerufen durch Kräfte vom Potential Φ, soll sich ein kleiner Magnet von der Länge ds befinden; ds soll als gerichtete Strecke aufgefasst gleichzeitig die Lage der magnetischen Axe definiren und also in der Richtung vom negativen zum positiven Pol als positiv gezählt werden. Mag an der Stelle des negativen Poles des kleinen Magnets das Potential Φ herrschen, am positiven das Potential

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds,$$

so ist seine potentielle Energie im magnetischen Felde

$$dQ = m\Phi' - m\Phi = m\frac{\partial \Phi}{\partial s} ds.$$

Führen wir nun das auf die Volumseinheit bezogene magnetische Moment des kleinen Magnet, μ ein, bezeichnen wir dessen Componenten mit ξ, η, ζ, mit $d\tau$ sein Volumen, mit l, m, n die Richtungscosinus von ds, so ist

$$m\,ds = \mu\,d\tau$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta s} = l\frac{\partial \Phi}{\partial x} + m\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad n\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\xi = l\mu;\ \eta = m\mu;\ \zeta = n\mu$$

und wir erhalten somit die potentielle Energie des kleinen Magnets

$$dQ = \left(\xi\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) d\tau,$$

und wenn wir an Stelle von Φ die durch dasselbe bestimmten Kräfte

$$F = -\frac{d\Phi}{dx};\ G = -\frac{d\Phi}{dy};\ H = -\frac{d\Phi}{dz}$$

einführen, so wird

$$dQ = -(\xi F + \eta G + \zeta H)\,dt. \qquad (1$$

Dem Begriffe des Potentials gemäss können wir dQ auch bezeichnen als die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um die magnetischen Massen m und $-m$ aus der Unendlichkeit an die Stelle x, y, z des magnetischen Feldes in ihre der Länge und Richtung nach um ds voneinander entfernten Lagen zu bringen, oder auch als die Arbeit, nothwendig, um in dem Volumelement $d\tau$ gegen die Wirkung magnetischer Kräfte vom Potential Φ das magnetische Moment μ zu erzeugen durch Scheidung der sich neutralisirenden magnetischen Massen m und $-m$ und Verschiebung der positiven Masse m um die gerichtete Strecke ds.

Unter Zugrundelegung dieser Definition soll nun die potentielle Energie des magnetisch oder dielektrisch polarisirten Systems gerechnet werden, als der Gesammtbetrag der Arbeit, der an dem System geleistet werden muss, um in all seinen Theilen aus dem ursprünglichen unpolarisirten Zustande die magnetische oder dielektrische Polarisation in ihrem schliesslichen Betrage zu erzeugen. Die Berechnung dieser Arbeit soll in zwei Theile zerfällt werden.

Der erste, Q, soll die Arbeit sein, die gegen die ursprünglichen — äusseren — magnetischen oder elektrischen Kräfte F, G, H, diese als unveränderlich vorausgesetzt, aufgewendet werden muss, um die magnetische Polarisirung hervorzurufen, der zweite Theil P, die Arbeit, die gegen die durch die bereits inducirten magnetischen oder elektrischen Momente hervorgerufenen Kräfte geleistet werden muss, um die Polarisirung des Systems in ihrem schliesslichen Betrage zu erzielen.

Der erste Theil ist wegen der Unveränderlichkeit der Kräfte F, G, H nach Formel I:

$$Q = -\int\int\int (\xi F + \eta G + \zeta H)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{(Ia}$$

die Integration erstreckt über die ganze Ausdehnung der magnetisch oder dielektrisch polarisirbaren Substanz.

Die Arbeit, die gegen die durch die eintretende Polarisirung geweckten Kräfte zu leisten ist, zerfällt in zwei Theile, erstens in die gegen die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, zu leistende P_1, zweitens in die gegen die magnetische bezüglich elektrische Molecularkraft[1]) $-\frac{\mu}{k}$ zu leistende P_2.

Wendet man die Formel I auf die gegen die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu leistende Arbeit P_1 an, so ist zu berücksichtigen, dass diese während des gedachten Vorganges der Erzeugung der magnetischen oder dielektrischen Polarisirung veränderlich, und zwar in jedem Augenblicke desselben dem bereits erzeugten Momente proportional sind. Hat dieses in einem Augenblicke dieses Vorganges in allen Volumelementen des polarisirten Systems den Bruchtheil $\theta\mu$ seines endgiltigen Betrages erreicht[2]), so hat die im Punkte x, y, z herrschende von dem geweckten magnetischen oder elektrischen Moment herrührende Kraft Componenten vom Betrage

$$\theta\mathfrak{X},\ \theta\mathfrak{Y},\ \theta\mathfrak{Z}.$$

---

1) S. Stefan „Zur Theorie der magnetischen Kräfte“ Wiener Sitzungsber. Bd. 69 S. 185—196.

2) Die hier vorgeführte Betrachtung beruht auf einem zuerst von Thomson (Mathematical and physical papers art. 61) oder (Reprint of papers on electrostatics and magnetism § 561) gebrauchten Gedankengange. Siehe auch Maxwell (Lehrbuch der Elektricität §§ 84 und 85).

Während der Steigerung des magnetischen oder elektrischen Momentes vom Betrage $\theta\mu$ auf den Betrag $(\theta + d\theta)\mu$ können $\theta\mathfrak{X}$, $\theta\mathfrak{Y}$, $\theta\mathfrak{Z}$ als constant betrachten, und so die Formel I zur Berechnung der Arbeit, die zur Erzeugung des Momentes $d\theta \cdot \mu$ in der ganzen Ausdehnung des polarisirbaren Systems nothwendig ist, benützen, ihr Betrag ergibt sich

$$dP_1 = -\int\int\int (\theta\mathfrak{X} \cdot \xi d\theta + \theta\mathfrak{Y} \cdot \eta d\theta + \theta\mathfrak{Z} \cdot \zeta d\theta)\, dx\, dy\, dz.$$

Um also die Polarisirung in ihrem schliesslichen Betrage aus dem ursprünglichen unpolarisirten Zustande gegen die Wirkung der Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu erzeugen, ist demnach die Arbeit erforderlich

$$\begin{aligned} P_1 &= -\int_0^1 \theta d\theta \int\int\int (\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta)\, dx\, dy\, dz. \\ &= {}^1/_2 \int\int\int (\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \qquad \text{(Ib}$$

Die nach denselben Gesichtspunkten durchgeführte Berechnung der gegen die gleichfalls veränderliche Molecularkraft $-\frac{\mu}{k}$ geleisteten Arbeit P_2 ergibt, — wie Stefan [1]) gezeigt hat — im Falle der magnetischen Polarisation die Unabhängigkeit der Magnetisirungszahl k von der Grösse des bereits erzielten μ vorausgesetzt,

$$P_2 = \int\int\int \frac{\mu^2}{2k}\, dx\, dy\, dz \ldots. \qquad \text{(Ic}$$

Die Arbeit, die gegen die durch die Polarisation geweckten Kräfte geleistet werden muss, um im polarisirten Systeme die Polarisirung in ihrem schliesslichen Betrage zu erzeugen, ist demnach

$$P = -{}^1/_2 \int\int\int (\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta)\, dx\, dy\, dz + \int\int\int \frac{\mu^2}{2k}\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(Id}$$

Die gesammte potentielle Energie des polarisirten Systems ist demnach als Gesammtaufwand der zu seiner Polarisirung an ihm zu leistenden Arbeit:

$$E = Q + P = -\int\int\int (F\xi + G\eta + H\zeta)\, dx\, dy\, dz -$$

$$- {}^1/_2 \int\int\int (\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta)\, dx\, dy\, dz + \int\int\int \frac{\mu^2}{2k}\, dx\, dy\, dz \ldots \qquad \text{(II}$$

oder unter Einführung der Bezeichnungen des Gleichungssystems 2

$$E = -\int\int\int (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\, dx\, dy\, dz +$$

$$+ {}^1/_2 \int\int\int (\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta)\, dx\, dy\, dz + \int\int\int \frac{\mu^2}{2k}\, dx\, dy\, dz$$

---

1) S. Stefan, Ueber die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magnetischen und dielektrischen Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes. Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 70 S. 610.

wo die dreifachen Integrationen über die ganze Ausdehnung des polarisirbaren Systems zu erstrecken sind. Setzt man hierin für ξ, η, ζ ihre nach der Poisson'schen Theorie aus den Gleichungen 3 folgenden Werthe, so ist

$$E = P + Q = -\int\int\int k R^2 \, dx\, dy\, dz + \tfrac{1}{2} \int\int\int (\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta) \, dx\, dy\, dz + \int\int\int \frac{k}{2} R^2 \, dx\, dy\, dz$$

$$= -\int\int\int \frac{k}{2} R^2 \, dx\, dy\, dz + \frac{1}{2} \int\int\int (\mathfrak{X}\xi + \mathfrak{Y}\eta + \mathfrak{Z}\zeta) \, dx\, dy\, dz \qquad \text{(IIa}$$

$$= -P.$$

Hieraus ergibt sich die Relation

$$Q = -2P$$

und für E als zweiter Ausdruck

$$E = \frac{Q}{2} = -\frac{1}{2} \int\int\int (F\xi + G\eta + H\zeta) \, dx\, dy\, dz \qquad \text{(IIb}$$

welche Relationen sich so aussprechen lassen:

Die potentielle Energie eines Systems unter dem Einflusse unveränderlicher magnetischer oder elektrischer Kräfte polarisirter Körper in dem durch diese Kräfte erzeugten magnetischen oder elektrischen Felde ist halb so gross als das Potential dieser ursprünglichen elektrischen oder magnetischen auf die inducirten oder gleich dem negativen Werthe des Potentials der inducirten elektrischen oder magnetischen Massenvertheilung auf sich selbst.

Es hat diesen Satz zuerst v. Helmholtz[1]) ausgesprochen und durch Betrachtungen anderer Art bewiesen; auf einem ganz anderen Wege, nämlich unter Zugrundelegung der Ampère'schen Theorie über die Constitution der magnetisirbaren Körper aus Molecularströmen und Anwendung der Gesetze der elektrodynamischen Induction auf diese letzteren ist dieser Satz von Stefan[2]) bewiesen worden.

Sind die ursprünglichen magnetischen bezüglich elektrischen Kräfte unveränderlich, wie bei dieser Herleitung vorausgesetzt worden, — auch unverändert durch die Wirkung der durch die Polarisation auftretenden Massenvertheilung, eine Voraussetzung, die in allen folgenden Anwendungen als gerechtfertigt angesehen werden kann, — dann gibt die Zunahme der Energie bei einer beliebigen Verschiebung die Arbeit an, die geleistet werden muss, um diese Verschiebung gegen die

1) S. v. Helmholtz, Gesammelte Abhandlungen „Ueber die Erhaltung der Kraft" Bd. 1 S. 59—61.

2) Stefan, Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction. Sitzungsber. der k. Akademie der Wissenschaften in Wien Bd. 64, S. 222—224.

auf das polarisirte System wirkenden magnetischen oder elektrischen Kräfte hervorzubringen.

Das Princip der virtuellen Verschiebungen, angewendet auf ein magnetisch oder dielektrisch polarisirtes System ist also dahin zu formuliren, dass für eine virtuelle Verschiebung die hierbei auftretende Zunahme der Energie der Polarisirung mit der bei dieser Verschiebung gegen anderweitige, mechanische Kräfte zu leistenden Arbeit die Summe Null geben müsse.

Hiervon sollen zunächst einige Anwendungen auf bereits früher auf anderem Wege gerechnete Beispiele der Bewegungstendenz magnetisch polarisirter Körper gemacht werden und sodann auf dem hier vorgezeichneten Wege die Herleitung der Gleichgewichtsconfiguration von Flüssigkeiten im magnetischen oder elektrischen Felde, wie sie Quincke beobachtet hat, gegeben werden.

§ 2.

Bewegungstendenz magnetisch polarisirter kleiner Kugeln im magnetischen Felde und Boltzmann's Methode zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante.

Ist die in das magnetische Feld gebrachte Kugel von so kleinen Dimensionen, dass die magnetisirende Kraft in all ihren Punkten Werthe besitzt, die sich von dem in ihrem Mittelpunkte nur um ein unendlich Kleines unterscheiden, so kann ihre Magnetisirung als gleichmässig angesehen werden und die Componenten derselben sind dann mit denen der magnetisirenden Kraft J durch die Gleichungen verbunden:

$$\xi = \frac{k}{1+\frac{4\pi k}{3}} F;\ \eta = \frac{k}{1+\frac{4\pi k}{3}} G;\ \zeta = \frac{k}{1+\frac{4\pi k}{3}} H.$$

Die Energie der kleinen Kugel im magnetischen Felde ist bis auf zweite Potenzen ihrer Dimensionen proportionale Glieder nach der Formel IIb

$$E = -\tfrac{1}{2} \int_{-r}^{+r}\int\int (F\xi + G\eta + H\zeta)\, dx\, dy\, dz = -\tfrac{1}{2} \frac{k}{1+\frac{4\pi k}{3}} J^2 \cdot v,$$

wo J den Werth der magnetischen Kraft im Mittelpunkte der kleinen Kugel, v ihr Volumen angibt. Die Bewegungstendenz der kleinen Kugel ist dahin gerichtet, den Betrag der Energie zu verkleinern und die Kraft, von der sie nach einer beliebigen Richtung s angegriffen wird, ist in Grösse und Richtung

$$S = -\frac{\partial E}{\partial s} = {}^1/_2 \frac{k}{1+\frac{4\pi k}{3}} \frac{\partial (J^2)}{\partial s},$$

wenn das magnetische Feld von Luft erfüllt ist [1]).

Für positive Werthe des k, also paramagnetische Substanzen ist die Richtung der die Kugel angreifenden resultirenden Kraft jene, nach welcher die magnetisirende Kraft J am raschesten zunimmt, für negative Werthe des k, also diamagnetische Kugeln jene, nach welcher der absolute Betrag der magnetisirenden Kraft am raschesten abnimmt, vorausgesetzt, dass für diese

$$k > -\frac{4\pi}{3} \text{ ist.}$$

Für grosse Werthe des k geht der Ausdruck für die, die kleine Kugel nach einer beliebigen Richtung s angreifende Kraftcomponente S über in

$$S_1 = {}^1/_2 \frac{1}{\frac{1}{k}+\frac{4\pi}{3}} \frac{\partial (J^2)}{\partial s} = \frac{3}{8\pi} \frac{\partial (J^2)}{\partial s}$$

für sehr kleine Werthe des k in

$$S_2 = \frac{k}{2} \frac{\partial (J^2)}{\partial s},$$

Ausdrücke, welche zuerst auf anderem Wege von Thomson [2]) hergeleitet worden sind.

---

1) Wegen der vollständigen Uebereinstimmung der Theorie der dielektrischen Polarisation mit der der magnetischen führen wörtlich dieselben Betrachtungen zum selben Ausdrucke für die mechanische Kraft, von der eine Kugel, deren Dielektricitätsconstante $K = 1 + 4\pi k$ ist, in einem elektrischen Felde angegriffen war. Die Anziehung, die eine metallisch leitende Kugel an derselben Stelle des elektrischen Feldes erfährt, ergibt sich nach einer bekannten Rechenregel aus diesem Ausdrucke, indem man in demselben $k = \infty$ setzt,

$$S_1 = \frac{3}{8\pi} \frac{\partial (J^2)}{\partial s}.$$

Boltzmann benutzt (Wiener Ber. Bd. 68 S. 81) das Verhältnis der Stärke dieser beiden Anziehungen um die Dielektricitätsconstante der ersten Kugel zu bestimmen. Es ergibt sich nämlich

$$\frac{S}{S_1} = \frac{8\pi}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\frac{3+4\pi k}{3}} = \frac{K-1}{K+2},$$

identisch mit der von Boltzmann der Berechnung der Dielektricitätsconstante aus seinen Versuchen zu Grunde gelegten Formel. (S. Wiener Ber. Bd. 70 S. 309.)

2) Siehe Thomson, Reprint of papers on electrostatics and magnetism. Art. XXXIII und XXXIV § 684—650.

Ist das magnetische Feld, in das die kleine Kugel gebracht wird, statt von Luft, wie bisher vorausgesetzt worden, von einem Medium erfüllt, dessen Magnetisirungszahl k' sehr klein ist, so entscheidet über die Bewegungstendenz der kleinen Kugel, welche nach dem Principe der Erhaltung der Energie stets den Gesammtbetrag der magnetischen Energie E des ganzen polarisirten Systems zu verkleinern strebt, das Zeichen der Differenz $k - k'$.

§ 3.

Bewegungstendenz magnetisch polarisirter Körper von länglicher Form im homogenen magnetischen Felde.

Die Bewegungstendenz, welche magnetisch polarisirte Körper von länglicher Form in einem homogenen magnetischen Felde zeigen, lässt sich am einfachsten für den Fall eines Rotationsellipsoids herleiten.

Bezeichnen F, G, H die nach den Axen eines dreiaxigen Ellipsoids genommenen Componenten der in der ganzen Ausdehnung des magnetischen Feldes in Richtung und Grösse constanten magnetischen Kraft J, so sind die Componenten der gleichmässigen, im Ellipsoid inducirten Magnetisirung gegeben durch folgende Gleichungen[1]):

$$\xi = \frac{k}{1 - kL} F;\ \eta = \frac{k}{1 - kM} G;\ \zeta = \frac{k}{1 - kN} H.$$

Hierin sind L, M, N von der Grösse der Axen des Ellipsoids abhängige, wesentlich negative Constanten, und zwar gehört der längsten Axe die dem absoluten Werthe nach kleinste Constante zu.

Der Ausdruck IIb für die Energie des magnetisch polarisirten Ellipsoids im homogenen magnetischen Felde ist somit

$$E = -\tfrac{1}{2} \iiint \left(\frac{kF^2}{1 - kL} + \frac{kG^2}{1 - kM} + \frac{kH^2}{1 - kN} \right) dx\, dy\, dz.$$

Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, N die der ungleichen Axe zugehörige Constante, so ist $L = M$.

Die ungleiche Axe mag mit der Richtung der Kraftlinien des homogenen magnetischen Feldes den Winkel φ einschliessen, so ist

$$F^2 + G^2 = J^2 \sin^2 \varphi;\ H^2 = J^2 \cos^2 \varphi$$

und der Ausdruck für die Energie wird:

$$E = -\tfrac{1}{2} \iiint \left(\frac{k}{1 - kM} J^2 \sin^2 \varphi + \frac{k}{1 - kN} J^2 \cos^2 \varphi \right) dx\, dy\, dz =$$
$$= -\tfrac{1}{2} J^2 \cdot v \cdot \left(\frac{k}{1 - kM} \sin^2 \varphi + \frac{k}{1 - kN} \cos^2 \varphi \right),$$

wo v das Volumen des Ellipsoids ist.

1) Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus § 438.

Die Bewegungstendenz des Ellipsoids ist aus der Aenderung des Betrages der Energie E für eine unendlich kleine Aenderung des Winkels φ ersichtlich. Für eine solche ist

$$\delta E = -\tfrac{1}{2} J^2 v \left(\frac{k}{1-kM} - \frac{k}{1-kN} \right) \sin 2\varphi \delta\varphi =$$
$$= -k^2 J^2 v \sin\varphi \cos\varphi \frac{M-N}{(1-kM)(1-kN)} \delta\varphi.$$

Da die Bewegungstendenz eines magnetisch polarisirten Systems immer auf eine Verkleinerung des Energievorrathes E hin gerichtet ist, so ist sie also für den vorliegenden Fall dahin gerichtet, den Winkel φ zu verkleinern, wenn $M-N$ negativ ist, d. h., wenn die ungleiche Axe die längere ist, und ihn zu vergrössern, wenn sie die kürzere ist, also immer bestrebt die längere Axe parallel den Kraftlinien zu stellen, und zwar, weil das Bestreben nur von k^2 abhängt, sowohl für paramagnetische als für diamagnetische Substanzen, bei den letzteren wieder vorausgesetzt, dass k nicht unter gewisse Grenzen sinkt.

Die Grösse des Drehungsmomentes, von welchem das magnetisch polarisirte Rotationsellipsoid angegriffen wird, ist:

$$D = -\frac{\delta E}{\delta\varphi} = k^2 J^2 v \sin\varphi \cos\varphi \frac{M-N}{(1-kM)(1-kN)}$$

eine Formel identisch für den betrachteten speciellen Fall mit der von Maxwell[1]) aufgestellten, allgemeineren.

Aus den beiden hier kurz hergeleiteten einfachsten Fällen der Bewegungstendenz magnetisch polarisirter Körper, der Bewegungstendenz kleiner Kugeln paramagnetischer Substanz nach Orten stärkster, der diamagnetischer nach Orten schwächster Kraft, und andrerseits der Bewegungstendenz aller länglichen Körper ihre längste Dimension parallel den Kraftlinien zu stellen, lässt sich die Bewegungstendenz magnetisch polarisirter Körper in complicirten Fällen ableiten, wie Thomson[2]) gezeigt hat.

§ 4.

Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen magnetisch polarisirter Flüssigkeiten für die Quincke'schen Versuche zur Bestimmung der Magnetisirungszahl.

Die experimentellen Untersuchungen Quincke's[3]) beziehen sich auf Flüssigkeiten, deren Magnetisirungszahlen sehr klein sind, nur

1) Maxwell, a. a. O. § 438a.

2) Thomson, a. a. O. Art. XXXV und Note zu Art. XXXVI.

3) S. Quincke, Elektr. Untersuchungen. Wiedemann's Ann. Bd. 24 S. 347.

Milliontel betragen. Man kann für solche annehmen, dass, unabhängig von der Art ihrer Begrenzung das in einem ihrer Punkte herrschende inducirte magnetische Moment einfach proportional ist der daselbst herrschenden magnetisirenden Kraft, dass also für die Componenten des auf die Volumseinheit bezogenen magnetischen Momentes die Gleichungen bestehen:

$$\xi = kF;\ \eta = kG;\ \zeta = kH.$$

Es fällt dies mit der Annahme zusammen, dass $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mit k proportional sind, und die mit k^2 proportionalen Glieder vernachlässigt werden können.

Dann gehen die Ausdrücke II für die Energie der magnetisch polarisirten Flüssigkeiten über in

$$E = -\iiint \frac{k}{2} R^2\, dx\, dy\, dz \ldots . \qquad \text{(IIc}$$

welcher Ausdruck auf einem anderen Wege bereits von Maxwell[1]) für schwach magnetisirbare Körper hergeleitet worden ist.

Wir wollen nun unter Zugrundelegung dieses Ausdruckes für die Energie die Verhältnisse magnetisch polarisirter Flüssigkeiten in ihrer Gleichgewichtsconfiguration nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen rechnend verfolgen, und zwar für beide von Quincke getroffenen Anordnungen der Versuche.

I. Versuchsanordnung.

Die erste Anordnung, welche Quincke[2]) seinen Versuchen zur Bestimmung der Magnetisirungszahl gegeben, bestand in folgendem. Die beiden Pole eines Ruhmkorff'schen Elektromagnets, wie er zu Versuchen über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes benutzt wird, wurden einander vertical gegenübergestellt, so dass die Polflächen selbst horizontal standen. Auf die untere Polfläche wurde ein Trog gestellt, mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, so dass die obere Polfläche in diese tauchte. In die Flüssigkeit wurde sodann eine Luftblase geblasen, die beide Polflächen berührte und durch die die obere Polfläche in der Mitte durchsetzende Röhre mit einem Manometer communicirte.

Wurde der Elektromagnet erregt, so wurde der Raum zwischen den Polflächen in ein sehr starkes Magnetfeld, dessen Kraftlinien vertical verliefen, verwandelt, die Stärke der magnetischen Kraft, nahm gegen die Ränder der Polflächen hin sehr rasch ab und war nahezu gleich Null in dem seitlich von den Polflächen gelegenen Theile der

1) Maxwell, a. a. O. § 440.
2) Quincke, a. a. O. § 65 S. 362—366.

Flüssigkeit. Gleichzeitig mit dem Erregen des Elektromagnets stieg das Manometer, wenn eine paramagnetische, und fiel, wenn eine diamagnetische Flüssigkeit das Magnetfeld erfüllte, und zwar für die ganze Dauer der Erregung, im ersten Falle eine Zunahme, im zweiten eine Abnahme des Druckes im Innern der Luftblase anzeigend.

Um diesen Vorgang nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen rechnend zu verfolgen, will ich mit J im CGS die magnetische Kraftintensität im Magnetfelde bezeichnen — J^2 hat dann bekanntlich die Dimensionen eines Druckes — den am Manometer abgelesenen Ueberdruck mit p, und mir die Aufgabe stellen für den Fall eingetretenen Gleichgewichtes die Grösse dieses Letzteren zu bestimmen.

Nehme ich eine virtuelle Verschiebung der magnetisch polarisirten Flüssigkeit aus ihrer Gleichgewichtsconfiguration in der Art vor, dass sie hierbei das Element δv des von der Luftblase eingenommenen Raumes aus dem Magnetfelde verdrängt, so wird die Energie des magnetisch polarisirten Systems einen Zuwachs erfahren, weil an Stelle der Luft, die nichts zum Betrage IIc der Energie beigesteuert, das Flüssigkeitsvolum δv aus dem seitlichen Raume, wo die Kraft Null ist und sie daher auch nichts zur Energie beitragen konnte, in das homogene Magnetfeld tritt und also die Energie um den Betrag

$$\delta E = -\frac{k}{2} J^2 \delta v$$

vermehrt.

Andrerseits ist bei der gedachten Verschiebung weiters an dem Systeme eine Arbeit zu leisten gegen den am Manometer abgelesenen Ueberdruck p und der Betrag dieser Arbeit ist

$$p \delta v.$$

Nach dem Princip der virtuellen Verschiebung muss also die Gesammtsumme der bei der gedachten Verschiebung zu leistenden Arbeit verschwinden, es muss also

$$\delta E + p \delta v = 0 \text{ oder } -\frac{k}{2} J^2 \delta v + p \delta v = 0$$

sein, woraus sich

$$p = \frac{k}{2} J^2$$

ergibt.

Diese Formel beschreibt den von Quincke beobachteten Vorgang qualitativ richtig, sie zeigt eine Druckvermehrung im Innern der Luftblase für positive Werthe des k, also paramagnetische, und eine Druckverminderung für negative k also diamagnetische Flüssigkeiten an.

Bezeichnet h die am Manometer abgelesene Höhe, σ das specifische Gewicht der Manometerflüssigkeit, bezeichne

$$g = \frac{981^{e}}{\text{sec}^2}$$

die Beschleunigung der Erdschwere, so ist der Ueberdruck p im CGS

$$p = h\sigma \cdot g$$

und es ergibt sich für die Magnetisirungszahl k der untersuchten Flüssigkeit der Werth

$$k = 2g \cdot \frac{h\sigma}{J^2}. \tag{4}$$

Berücksichtigt man, dass die Magnetisirungszahl k mit der Dimagnetisirungszahl $\mathfrak{K}$ durch die bekannte Relation verknüpft ist

$$\mathfrak{K} = 1 + 4\pi k, \tag{5}$$

dass sie somit mit der von Quincke eingeführten Zahl $\mathfrak{k}$ in der Relation steht

$$k = 2g \cdot \mathfrak{k} \tag{6}$$

so ergibt sich, dass die hier abgeleitete Formel 4 identisch ist mit jener, die Quincke[1]) der Berechnung der Magnetisirungszahl aus seinen Versuchen zu Grunde legt.

II. Versuchsanordnung.

Bei der zweiten Anordnung, die Quincke[2]) seinen Versuchen über die Gleichgewichtsconfiguration magnetisch polarisirter Flüssigkeiten gegeben, wurde eine U-förmige Röhre verwendet, deren einer verticaler Schenkel sehr eng war und in den Zwischenraum zwischen den Polflächen ragte, deren anderer verticaler Schenkel sehr weit war und sich etwa 200 mm weit entfernt an einer Stelle befand, wo die magnetische Kraft auch beim Erregen des Elektromagnets nahezu Null blieb.

Diese U-förmige Röhre wurde nun mit der zu untersuchenden Flüssigkeit so gefüllt, dass die Flüssigkeitskuppe im engen Schenkel in der Mitte des Zwischenraumes zwischen den Polflächen sich befand. Wurde der Elektromagnet erregt, so wurde dieser Zwischenraum in ein sehr starkes gleichmässiges Magnetfeld verwandelt. Bei der einen[3]) Reihe von Versuchen war der Elektromagnet so aufgestellt, dass die Kraftlinien dieses Magnetfeldes horizontal, also senkrecht zur Axe des engen Schenkels verliefen, in der anderen[4]) so, dass dieselben vertical, also parallel dieser Axe verliefen.

1) S. Quincke, a. a. O. § 65, Formel 4 S. 366.
2) Ebenda § 68—70.
3) Ebenda § 67.
4) Ebenda § 68.

In beiden Fällen stieg die Flüssigkeitskuppe im engen Schenkel bei paramagnetischen und fiel bei diamagnetischen Flüssigkeiten, sobald der Elektromagnet erregt worden war, für die ganze Dauer dieser Erregung.

Auch dieser Vorgang lässt sich aufs Einfachste nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen rechnend verfolgen.

Wir gehen von der beobachteten Thatsache aus, dass für den Fall des hergestellten Gleichgewichtes die Flüssigkeit im engeren Schenkel um die Höhe h höher steht als im weiten und stellen uns die Aufgabe, diese Niveaudifferenz zu berechnen.

Wir nehmen, ausgehend von der Gleichgewichtsconfiguration eine virtuelle Verschiebung der magnetisch polarisirten Flüssigkeit derart vor, dass sie im engen Schenkel, dessen Querschnitt mit b bezeichnet werden mag, um δh steigt. Dann ändert sich zunächst der Betrag IIc der Energie des polarisirten Systems. Denn es tritt das Flüssigkeitsvolum $b\delta h$, aus dem weiten Schenkel, wo die magnetische Kraft Null ist, es also nichts zum Betrage der Energie beigesteuert hat, an Stelle von Luft, die auch nichts zur Energie beigetragen, in das Volum $b\delta h$ des homogenen magnetischen Feldes von der Stärke J und bewirkt einen Zuwachs der Energie IIc um den Betrag

$$\delta E = -\frac{k}{2} J^2 b \delta h.$$

Andrerseits ist für die gedachte Verschiebung noch weiters Arbeit zu leisten, und zwar gegen die Schwerkraft, indem das Volum $b\delta h$ aus dem weiten Schenkel in den engen, in dem das Flüssigkeitsniveau um h höher steht, gehoben wird. Der Betrag dieser Arbeit ist, wenn σ das specifische Gewicht der magnetischen Flüssigkeit ist, im $C:G:S$:

$$b\delta h\sigma \cdot g \cdot h.$$

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten muss die Gesammtsumme der für die gedachte Verschiebung — gegen die magnetische wie gegen die Schwerkraft — aufzuwendenden Arbeit verschwinden, also

$$-\frac{k}{2} J^2 b \delta h + h\sigma g b \delta h = 0$$

sein, woraus sich

$$k = 2g\frac{h\sigma}{J^2} \qquad (4a$$

ergibt.

Diese Formel ergibt die Gleichgewichtsconfiguration der magnetisch polarisirten Flüssigkeit übereinstimmend mit der Erfahrung, denn sie

erfordert eine positive Steighöhe für paramagnetische und eine negative für diamagnetische Flüssigkeiten.

Sie stimmt, wenn man die Bezeichnungen, die die Gleichungen 5 und 6 einführen, berücksichtigt, vollkommen überein mit jener, welche Quincke[1]) zur Berechnung der Magnetisirungszahl aus seinen Versuchen verwendet hat. Sie sowohl, wie die vorgängige Formel 4 sind identisch mit jener, welche auf ganz anderem Wege von Kirchhoff[2]) hergeleitet worden ist.

§ 5.

Energie eines im elektrischen Felde zwischen den Platten eines Condensators dielektrisch polarisirten Systems.

Quincke's elektrische Untersuchungen[3]), die in den folgenden Paragraphen rechnend verfolgt werden sollen, beziehen sich auf dielektrisch polarisirbare Systeme, die das elektrische Feld zwischen zwei auf constanter Potentialdifferenz erhaltenen Condensatorplatten erfüllen. Um die Formeln des § 1 für die Energie des so dielektrisch polarisirten Systems anwenden zu können, erscheint es nothwendig, eine Beschreibung des zwischen dem auf constanter Potentialdifferenz erhaltenen ebenen Condensatorplatten entstehenden elektrischen Feldes vorauszusenden. Hierbei soll der einfacheren Ausdrucksweise wegen angenommen werden, dass diese Potentialdifferenz erzeugt wird, indem die obere Condensatorplatte durch Verbindung etwa mit dem Pole einer galvanischen Batterie auf dem constanten Potential P erhalten wird, die untere Platte aber, die in dem gegen ihre Dimensionen sehr kleinen Abstand d von ihr sich befinden mag, zur Erde abgeleitet, das Potential 0 besitzen möge.

Wir wählen ferner die Ebene der unteren Condensatorplatte zur XY Ebene eines Coordinatensystemes, nehmen zur positiven Z-Axe die Richtung der nach abwärts gezogenen Normale der unteren Platte, so dass $z = 0$ und $z = -d$ die Gleichungen der unteren, resp. oberen Condensatorplatte sind.

Zu Beginn des im § 1 rechnend verfolgten Vorganges der successiven Polarisirung des Dielektricums ist dann das Feld zwischen den beiden Condensatorplatten ein homogenes, das Potential desselben $-\frac{P}{d}z$, die

---

1) S. Quincke, a. a. O. S. 870 Formel 5.

2) S. Kirchhoff, Ueber einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird. (Wied. Ann. Bd. 25 S. 606 Formel 6.)

3) S. Quincke, Elektrische Untersuchungen Wied. Ann. Bd. 19 S. 718 ff.

Kraft des Feldes somit $\frac{P}{d}$, die Richtung derselben die der positiven ZAxe; nach vollzogener Polarisirung des Dielektricums wird das elektrische Feld nicht mehr ein homogenes sein. Wohl wird das Potential desselben nach wie vor, da die einzelnen Dielektrica in ihrer ganzen Ausdehnung als homogen vorausgesetzt werden sollen, die Gleichung $\Delta V = 0$ im ganzen Raum zwischen den Condensatorplatten erfüllen und an den Condensatorplatten die constanten Werthe 0 und P annehmen müssen. Aber an den Grenzflächen der einzelnen Dielektrica gegeneinander wird noch die die Homogeneität des elektrischen Feldes zerstörende Bedingungsgleichung hinzutreten, dass

$$K_1 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = K_2 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 \cdots (2),$$

wo $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2$ die Differentialquotienten der gesuchten Potentialwerthe sind, genommen nach den Normalen, gezogen gegen das Innere des ersten und zweiten Dielektricums, deren Dielektricitätsconstanten K_1 und K_2 sind.

Es tritt somit zu der ursprünglich herrschenden Potentialsfunction $-\frac{P}{d} z$ des ursprünglich homogenen elektrischen Feldes infolge der dielektrischen Polarisirung eine von den an den Grenzen der einzelnen Diektrica gegeneinander auftretenden fictiven Oberflächenladung und von den durch diese in den Condensatorplatten influencirten Ladungen herrührende Potentialfunction $\mathfrak{B}$ hinzu, so dass die für das schliessliche nicht mehr homogene elektrische Feld giltige Potentialfunction

$$V = -\frac{P}{d} z + \mathfrak{B} \text{ ist.}$$

$\mathfrak{B}$ und die von demselben herrührenden elektrischen Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sind mit der Intensität der jeweilig herrschenden dielektrischen Polarisirung ebenso proportional, wie die im § 1 mit denselben Buchstaben bezeichneten Grössen. $\frac{P}{d}$ stellt den unveränderlichen Theil der elektrischen Kräfte, deren Componenten nach den Coordinatenaxen in § 1 mit F, G und H bezeichnet wurden, dar; und da dieser unveränderliche Theil der elektrischen Kraft zur Grenze die Richtung der ZAxe hat, verschwindet für den vorliegenden Fall F und G, während

$$H = \frac{P}{d} \text{ ist.}$$

Berücksichtigt man endlich, dass nach Poisson's Theorie der magnetischen oder elektrischen Polarisation die Componenten ξ, η, ζ

des magnetischen oder elektrischen Momentes μ mit den Componenten der wirksamen Kräfte

$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}+\frac{P}{d}$$

durch die Relationen verknüpft sind

$$\xi = k\mathfrak{X},\ \eta = k\mathfrak{Y},\ \zeta = k\left(\mathfrak{Z}+\frac{P}{d}\right)$$

wo

$$k = \frac{K-1}{4\pi},$$

K die Dielektricitätsconstante ist, so ergibt sich in Anwendung der Formel IIb des § 1 für die Energie des zwischen den Condensatorplatten befindlichen Systems dielektrisch polarisirter Körper der Ausdruck

$$E = -\frac{1}{2}\int\int\int \frac{P}{d}\zeta\, dx\, dy\, dz = -\int\int\int \frac{k}{2}\frac{P}{d}\left(\frac{P}{d}+\mathfrak{Z}\right) dx\, dy\, dz^{1}).\ (\mathrm{I}$$

Da dieser Ausdruck die an dem System von Dielektricis zu seiner Polarisirung aufzuwendende Arbeit angibt, so wird der Zuwachs dieses

1) Der im Text aufgestellte Ausdruck für E stellt streng genommen nicht die Energie des ganzen polarisirten Systemes dar, sondern lediglich jenes Theils, der sich im Zwischenraume zwischen den Condensatorplatten befindet; hinzuzufügen wäre also noch jener Theil E', der die Arbeit angibt, die an dem ausserhalb dieses Raumes befindlichen Theil des dielektrisch polarisirten Systems zu seiner endgiltigen Polarisirung aufgewendet werden muss. Für diese Arbeit ergibt sich, wenn man nach denselben Gesichtspunkten vorgeht, die zum Ausdrucke E geführt haben, wenn man mit F, G, H die Componenten jenes — unveränderlichen — Kraftheiles berechnet, der im Raume zwischen den Condensatorplatten $\frac{P}{d}$ war,

$$E' = -\int (F\xi + G\eta + H\zeta)\, d\tau;$$

die Integration erstreckt über den ganzen, ausserhalb der Condensatorplatte befindlichen vom dielektrisch polarisirten System eingenommenen Raum. Sind aber die Condensatorplatten sehr gross und einander sehr nahe, so werden F, G, H von den Rändern der Condensatorplatte nach auswärts sehr rasch abnehmen und schon in mässiger Entfernung von dieser $= 0$ gesetzt werden können, so dass der hinzuzufügende Betrag E' sehr klein ist. Zudem wird in den folgenden Anwendungen eine Aenderung der Configuration und somit eine Aenderung im Ausdrucke der Energie lediglich in jenem Theile der Flüssigkeit in Betracht kommen, der den Raum zwischen den Condensatorplatten erfüllt, so dass wir für diese speciellen Fälle in aller Strenge berechtigt sind, den Ausdruck für E als den Ausdruck für die Energie des gesammten dielektrisch polarisirten Systems anzusehen. Eine strengere, die Ladungsverhältnisse des dielektrisch polarisirten Systems eingehend untersuchende Herleitung der Formel I siehe in der Originalabhandlung. (Wiener Ber. Bd. 95 S. 183—187.)

Ausdruckes für irgend eine Verschiebung den Betrag derjenigen Arbeit angeben, die gegen die sämmtlichen wirksamen elektrischen Kräfte aufgewendet werden muss, um die gedachte Verschiebung hervorzurufen. Das Princip der virtuellen Verschiebungen, angewendet auf ein dielektrisch polarisirtes System in einem von auf constanter Potentialdifferenz erhaltenen Condensatorplatten erzeugten elektrischen Felde, wird sich somit dahin fassen lassen, dass für jede virtuelle Verschiebung die Summe aus dem Zuwachse der Energie, vermehrt um die Arbeit, die gegen die Wirkung anderweitiger Kräfte bei der gedachten Verschiebung geleistet werden muss, verschwinden müsse.

§ 6.

Quincke's Methode der Bestimmung der Dielektricitätsconstante.

Von den im Vorstehenden abgeleiteten Gesetzen soll nun eine Anwendung gemacht werden auf eine von Quincke[1]) herrührende Versuchsanordnung, die er benutzt hat, um die Dielektritätsconstante von Flüssigkeiten zu bestimmen. Bei dieser Versuchsanordnung wurden die auf sehr geringe Distanz einander gegenübergestellten, auf constanter Potentialdifferenz erhaltenen Condensatorplatten in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht, so dass sie von ihr allseitig umgeben waren. Es wurde sodann in den Raum zwischen den Condensatorplatten eine flache Luftblase geblasen, die die obere und untere Condensatorplatte in gleich grossen Kreisflächen berührte und durch eine in der oberen Condensatorplatte befindliche Oeffnung mit einem Manometer communicirte.

Wurden die Condensatorplatten zu einer Potentialdifferenz geladen, so zeigte diese Luftblase an dem Manometer eine Druckvermehrung an, welche benutzt wurde, um die Dielektricitätsconstante der Flüssigkeit zu bestimmen.

Wir wollen eine der Quincke'schen ähnliche, doch einfachere Versuchsanordnung rechnend verfolgen: wir wollen nämlich die Annahme machen, dass die Luftblase, welche die Mitte des Raumes zwischen den Condensatorplatten, beide berührend, einnimmt, genau eine cylindrische sei, dass also ihre seitliche Begrenzung lediglich durch die senkrecht zu den Condensatorplatten verlaufenden Kraftlinien gebildet werde. Da dann an der cylindrischen Grenzfläche die fictive Oberflächenladung als Normalcomponente des an dieser Stelle auftretenden elektrischen Momentes $- -k\frac{\partial V}{\partial n}$ — verschwindet, — wie

1) Quincke, Wied. Ann. Bd. 19 S. 718.

man sich leicht überzeugt, wenn man überlegt, dass die ursprüngliche Kraft $\frac{P}{d}$ zu einer solchen Componente des elektrischen Momentes keine Veranlassung gibt, eine solche also überhaupt nicht auftreten kann — so verschwindet auch die von dieser Grenzschichte herrührende Zusatzkraft $\mathfrak{R}$, resp. ihre Componente $\mathfrak{Z}$, und der Ausdruck I für die Energie geht in den einfacheren über:

$$E_1 = -\int\int\int \frac{k}{2}\left(\frac{P}{d}\right)^2 d\tau, \qquad (I'$$

wo

$$k = \frac{K-1}{4\pi}$$

ist und K die Dielektricitätsconstante der untersuchten Flüssigkeit bedeutet.

Wir gehen nun von der Erfahrungsthatsache aus, dass, wenn die Condensatorplatten zu constanter Potentialdifferenz geladen sind, der Druck im Inneren der Luftblase, wie das Manometer angibt, um p ansteigt, und stellen uns die Aufgabe, nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen die Grösse dieses Ueberdruckes zu bestimmen.

Wir nehmen eine virtuelle Verschiebung derart vor, dass das Volumenelement δv der polarisirbaren Flüssigkeit aus dem Raume oberhalb der Condensatorplatte, wo die elektrische Kraft $= 0$ ist und es daher nichts zur Energie beitragen konnte, in den Raum zwischen den Condensatorplatten tritt und hier das Volum δv der Luftblase, das auch nichts zum Betrage der Energie beigetragen, weil ihr $k = 0$ ist, verdrängt; dann ist bei der gedachten Verschiebung gegen die elektrischen Kräfte eine Arbeit zu leisten, deren Betrag gleich ist dem Zuwachs der Energie E_1, also gleich

$$\delta E_1 = -\frac{k}{2}\left(\frac{P}{d}\right)^2 \cdot \delta v \text{ ist.}$$

Weiter ist bei der gedachten Verschiebung Arbeit zu leisten gegen den bei der Ladung der Condensatorplatten erfahrungsmässig entstehenden Ueberdruck p, ihr Betrag ist $= p \cdot \delta v$; nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen, wie es oben formulirt worden ist, muss demnach die Summe der sämmtlichen bei der Verschiebuug aufzuwendenden Arbeit verschwinden, also

$$-\frac{k}{2}\left(\frac{P}{d}\right)^2 \cdot \delta v + p \cdot \delta v = 0$$

sein, woraus sich

$$p = \frac{k}{2}\left(\frac{P}{d}\right)^2$$

ergibt, jene Formel, nach der Quincke aus seinen Versuchen den Werth der Dielektricitätsconstante $K = 1 + 4\pi k$ berechnet hat.

§ 7.

Deformation einer Luftblase im elektrischen Felde.

Quincke's Experimente[1]) zeigten ferner, dass eine Luftblase, welche bloss die obere Condensatorplatte berührt, nach der Ladung des Condensators sich in Richtung der Kraftlinien verlängerte und senkrecht zu ihnen sich zusammenzog. Es soll in diesem Paragraph diese Erscheinung lediglich qualitativ durch einen Ueberschlag des Ausdruckes für die Energie hergeleitet werden, wobei wir nach dem Vorgange Kirchhoff's annehmen wollen, dass die Luftblase ursprünglich eine Kugel war, die die obere Condensatorplatte in einem Punkte berührt.

Für die Energie E ist der Ausdruck gefunden:

$$E = -\int \frac{k}{2}\frac{P}{d}\left(\frac{P}{d} + \mathfrak{Z}\right) d\tau, \qquad (1$$

das Integral erstreckt über den Raum zwischen den Condensatorplatten, das ursprünglich homogene elektrische Feld von der Kraft $\frac{P}{d}$. — Die Zusatzkraft $\mathfrak{Z}$ stammt, wie oben gezeigt worden ist, von der an der Grenze zwischen dielektrisch polarisirter Flüssigkeit und Luftblase anzunehmenden fictiven Oberflächenschichte her, deren Dichte σ gleich ist der Normalcomponente des an dieser Stelle herrschenden elektrischen Momentes, also wenn ξ, η, ζ die Componenten dieses Momentes, l, m, n die Richtungscosinus der Normalen zur Grenze bedeuten,

$$\sigma = l\xi + m\eta + n\zeta.$$

Ist die Begrenzung ein von den Kraftlinien gebildeter Cylinder, so ist diese fictive Oberflächenladung gleich 0, da dann die Richtung des geweckten elektrischen Momentes die Richtung der inducirenden Kraft $\frac{P}{d}$ besitzt.

Ist aber die Luftblase eine Kugel, welche die obere Condensatorplatte in einem Punkte berührt, wie als Gestalt der Luftblase vor erfolgter Polarisirung des Dielektricums angenommen werden soll, so ist die fictive Dichte σ der Oberflächenladung proportional in jedem Punkte mit dem Cosinus des Winkels, den der Radius der Kugel, gezogen an diesen Punkt mit der Richtung der inducirenden Kraft $\frac{P}{d}$, der Rich-

1) Quincke, Wied. Ann. Bd. 24 S. 376.

tung der positiven Z Axe, einschliesst. Variirt aber die Oberflächendichte einer Kugel nach diesem Gesetze, dem Gesetze einer „Gleitschichte“ [1]), dann wirkt sie nach aussen so, wie zwei gleich grosse, homogene, mit derselben aber dem Zeichen nacheinander entgegengesetzten Raumdichte ϱ geladene Kugeln, die gegeneinander um eine unendlich kleine Strecke δ verschoben sind, wo

$$\varrho\delta = \sigma_0$$

ist, unter σ_0 den Maximalwerth der Flächendichte verstanden, oder wie zwei auf der Z Axe befindliche, dem Mittelpunkte der Kugel unendlich nahe, gleich stark aber entgegengesetzt geladene elektrische Punkte. In unserem Falle, wo die obere Condensatorplatte auf einem positiven Potential erhalten, also positiv geladen ist, die Kräfte somit die Richtung der positiven, nach abwärts gerichteten, Z Axe haben, ist das Zeichen der an der Grenze zwischen Dielektricum und Luftblase anzunehmenden fictiven Oberflächendichte, in der oberen Hälfte der Kugel positiv, in der unteren Hälfte negativ, da die Ladung von demjenigen Pole des polarisirten Dielektricums herrührt, der der Luftblase zugekehrt ist, so dass sich diese letztere wie eine diamagnetisch polarisirte Substanz verhält.

Die Zusatzkraft β rührt lediglich von dieser fictiven Oberflächenladung her, wir wollen bloss ihr Zeichen bestimmen: wenn man sich die Wirkung der nach dem Cosinusgesetz variirenden Oberflächenladung der Kugel durch die Wirkung zweier in der Richtung der Z Axe übereinander liegender, gleich stark aber entgegengesetzt geladener elektrischer Punkte, der positive oberhalb, der negative unterhalb, aber beide unendlich nahe dem Mittelpunkte der Luftblase gelegen, ersetzt denkt, dann ist unmittelbar zu übersehen, dass im ganzen elektrischen Felde die Kraft β nach aufwärts gerichtet ist, — unter Richtung der elektrischen Kraft nach der obigen Fortsetzung jene verstanden, nach welcher sie die positive Masse treibt — somit im Sinne der negativen Z Axe und daher entgegengesetzt der ursprünglich im elektrischen Felde vorhanden gewesenen Kraft $\frac{P}{d}$ wirkt, daher diese vermindert [2]).

---

1) S. Mascart und Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus § 157.

2) Im gleichen Sinne wirkt, wie leicht zu übersehen, auch der zweite Theil dieser Zusatzkraft β, der herrührt von jener elektrischen Schichte, welche durch die Wirkung der an der Grenze der Luftblase auftretenden fictiven Oberflächenladung in den Condensatorplatten durch Influenz auftritt; denn diese influencirte Ladung ist der bereits vorhandenen, wie leicht zu übersehen ist, entgegengesetzt in Bezug auf das Zeichen.

Die Energie des dielektrisch polarisirten Systemes

$$E = -\int \frac{k}{2} \frac{P}{d} \left(\frac{P}{d} + \beta \right) d\tau$$

ist aber eine wesentlich negative, es wird daher das dielektrisch polarisirte System „von selbst" jene Aenderung der Configuration anstreben, bei welcher diese Energie ein Minimum, somit das Integral

$$\int \frac{k}{2} \frac{P}{d} \left(\frac{P}{d} + \beta \right) d\tau$$

ein Maximum wird.

Da nun $\frac{P}{d}$ invariabel ist, so wird, wenn wir annehmen, dass das Volumen der Luftblase ungeändert bleiben soll, das Dielektricum eine derartige Aenderung der Configuration anstreben, bei der β, das die Grösse $\frac{P}{d}$, wie eben nachgewiesen wurde, vermindert, möglichst klein werde. Es verschwindet aber diese Grösse β, wie oben gezeigt, wenn die Begrenzung der Luftblase von den Kraftlinien gebildet ist, sie also eine zu diesen parallel laufende cylindrische Fläche ist.

Es zeigt somit dieser Ueberschlag, dass die dielektrisch polarisirte Flüssigkeit die ursprüngliche Configuration in der sie eine kugelförmige Luftblase enthält, gegen die Wirkung des in der Luftblase herrschenden Ueberdruckes sowie gegen die Capillarkräfte dahin zu ändern streben wird, die Hauptdimensionen ihrer Begrenzungen den Kraftlinien parallel zu stellen, in welchem Falle dann an diesen die Normalcomponente des elektrischen Momentes, resp. die fictive Flächendichte, die zum Auftreten der Gegenkraft β Veranlassung gibt, verschwindet.

§ 8.

Gleichgewichtsoberfläche einer Luftblase im elektrischen Felde.

Die in früheren Paragraphen lediglich nach der qualitativen Seite verfolgten Verhältnisse einer die obere Condensatorplatte berührenden ursprünglich kugelförmigen Luftblase sind zuerst von Kirchhoff[1]) durch Rechnung hergeleitet worden, und er hat die Differentialgleichung jener Rotationsfläche aufgestellt, in welche die kugelförmige Begrenzung der Luftblase nach der Ladung des Condensators übergeht.

Es soll im folgenden gezeigt werden, wie man unter Zugrundelegung des Ausdruckes (I) für die Energie nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen eben diese Differentialgleichung herleiten

1) S. Kirchhoff, Wied. Ann. Bd. 25 S. 608 ff.

kann, wobei jedoch bezüglich der Einzelnheiten der Rechnung selbst auf die erwähnte Abhandlung verwiesen werden soll.

Um den Ausdruck (I) für die Energie aufzustellen, müssen wir zunächst die zur ursprünglichen Kraft $\frac{P}{d}$ nach erfolgter Polarisirung des dielektrisch polarisirten Systems hinzutretende Kraft $\mathfrak{R}$, deren Potential $\mathfrak{V}$ sein soll, bestimmen. Wir wollen nach dem Vorgange Kirchhoff's die Annahme machen, dass diese lediglich herrühre von der an der Grenze der Luftblase anzunehmenden — fictiven — Oberflächenladung, deren Flächendichte gleich der Normalcomponente des hier herrschenden elektrischen Momentes ist; dabei vernachlässigen wir jenen zweiten Theil derselben, der von der — sehr kleinen — Ladung herrührt, welche durch die Wirkung der von dieser ideellen Schichte herrührenden Kräfte in den Condensatorplatten influencirt wird. Wie im vorhergehenden Paragraphe schon erwähnt, lässt sich das Potential dieser an der Grenze der kugelförmigen Luftblase auftretenden fictiven Oberflächenschichte, deren Flächendichte als Normalcomponente des geweckten elektrischen Momentes dem Cosinus des Winkel zwischen Radius und Z Axe proportional ist und die daher eine „Gleitschichte" darstellt, im Raume ausserhalb der Luftblase ersetzen durch das Potential zweier mit den gleich grossen, aber entgegengesetzten Massen $+e$ und $-e$ geladener Punkte, die dem Mittelpunkte der Luftblase unendlich nahe auf der Z Axe sich in der Entfernung δ übereinander — und zwar die positive oberhalb der negativen — befinden. Das Potential dieser zwei Punkte ist das Potential eines unendlich kleinen Magnetes vom $e \cdot \delta$ und daher

$$\mathfrak{V} = \frac{e\delta}{r^2} \cos \omega,$$

wo ω den Winkel zwischen dem Radius vector r und der Axe des unendlich kleinen Magnetes, deren Richtung wir oben als die Richtung vom negativen zum positiven Pol definirt haben, bedeutet; führt man an Stelle des Winkels ω den ihn auf 180^0 ergänzenden Winkel θ ein, den der Radius vector mit der positiven, nach abwärts gerichteten Z Axe einschliesst, so ist

$$\mathfrak{V} = -\frac{e\delta}{r^2} \cos \theta;$$

bezeichnen wir mit R den Radius der kugelförmigen Luftblase, so ergibt sich nach Kirchhoff für den vorliegenden Fall:

$$\mathfrak{V} = -\frac{4\pi k}{2K+1} \cdot \frac{P}{d} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta,$$

somit für die hiervon herrührende Totalkraft

$$\mathfrak{R} = -\frac{8\pi k}{2K+1}\frac{P}{d}\frac{R^3}{r^3}\cos\theta$$

und für ihre im Ausdrucke für E vorkommende $\overline{Z}$ Componente

$$\mathfrak{Z} = -\frac{8\pi k}{2K+1}\frac{P}{d}\cdot\frac{R^3}{r^3}\cos^2\theta$$

und für den Ausdruck der Energie des dielektrisch polarisirten Systems erhalten wir sonach:

$$E = -\int\frac{k}{2}\left[\left(\frac{P}{d}\right)^2 - \frac{8\pi k}{2K+1}\left(\frac{P}{d}\right)^2\frac{R^3}{r^3}\cos^2\theta\right]d\tau. \qquad (1'$$

Nunmehr wollen wir auf die Gleichgewichtsverhältnisse vor und nach erfolgter Polarisirung der Flüssigkeit das Princip der virtuellen Verschiebungen anwenden.

Damit die Gestalt der Luftblase vor erfolgter Polarisirung eine kugelförmige sein kann, müssen wir von der Wirkung der Schwerkraft absehen; es kommen also für eine virtuelle Verschiebung eines Oberflächenelementes $d\omega$ der Luftblase um δn in Richtung ihrer nach auswärts gekehrten Normale nur die Capillarkräfte und der von ihnen herrührende Ueberdruck im Innern der Luftblase, p, in Rechnung, und es ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{H}{2}\cdot\frac{2}{R}\cdot d\omega\cdot\delta n - p\cdot d\omega\,\delta n = 0 \qquad (1a$$

wo H eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante bedeutet; somit

$$\frac{H}{2}\frac{2}{R} = p. \qquad (1$$

Nach erfolgter Polarisirung wird erstens, wie die im § 2 behandelten Vorgänge lehren, der Druck im Innern der Luftblase einen veränderten Werth $p+p'$ haben, zweitens wird die kugelförmige Begrenzung der Luftblase in eine andere übergegangen sein, deren Hauptkrümmungsradien wir mit r_1 und r_2 bezeichnen wollen, endlich drittens wird in Rechnung zu ziehen sein, dass jetzt bei einer virtuellen Verschiebung des Flächenelementes $d\omega$ um δn in Richtung der nach auswärts gekehrten Normale auch gegen die elektrischen Kräfte eine Arbeit zu leisten ist, dadurch, dass hierbei das Volumelement $d\omega\,\delta n$ aus dem elektrischen Felde zwischen den Condensatorplatten ausgeschaltet wird und an eine Stelle tritt, wo die elektrische Kraft 0 ist, und dass somit der Betrag E um denjenigen vermindert wird, den das ausgeschaltete Volumelement beigetragen hat. Wir erhalten als neue Gleichgewichtsbedingung die folgende

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)d\omega\,\delta n+\frac{k}{2}\left[\left(\frac{P}{d}\right)^2-\frac{8\pi k}{2K+1}\left(\frac{P}{d}\right)^2\cos^2\theta\right]d\omega\,\delta n- \\ -(p+p')\,d\omega\,\delta n=0, \qquad (2$$

wobei wir benutzten, dass an der Luftblase, da wir die Abweichung von der Kugelgestalt als sehr gering voraussetzten, r nahezu gleich R gesetzt werden kann, und dass weiters die elektrischen Kräfte in der neuen Gestalt der Luftblase dieselben sind, die sie bei der ursprünglichen, kugelförmigen Begrenzung waren.

Führen wir für p seinen Werth aus Gl. 1a ein, so ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung in der Form:

$$\frac{H}{2}\left[\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{2}{R}\right]+\frac{k}{2}\left[\left(\frac{P}{d}\right)^2-\frac{8\pi k}{2K+1}\left(\frac{P}{d}\right)^2\cos^2\theta\right]-p'=0. \quad (2b$$

Wir machen jetzt mit Kirchhoff die Annahme, dass die neue Begrenzung der Luftblase eine Rotationsfläche ist, deren Rotationsaxe die Z Axe, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Luftblase ist, dass ferner für alle ihre Punkte der Radius vector vom Mittelpunkte aus gezogen

$$r=R\,(1+u)$$

einen von R nur unendlich wenig verschiedenen Werth haben soll, also u als unendlich klein angesehen werden kann.

Wir führen als Variable den vom Mittelpunkte der Luftblase aus gezählten Radius vector r (bezüglich u) und den $\cos\theta=\mu$ ein.

Kirchhoff findet dann den Ausdruck:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{2}{R}=-\frac{1}{R}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2u}{d\mu^2}-2\mu\frac{du}{d\mu}+2u\right];$$

führt man diesen Werth in unsere Gleichgewichtsbedingung (2b) ein, so ergibt sich für die Rotationsoberfläche, die die neue Begrenzung der Luftblase bildet, die Differentialgleichung:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2}-2\mu\frac{du}{d\mu}+2u=A-B\mu^2 \qquad (2$$

dieselbe Differentialgleichung, die, von Kirchhoff auf anderem Wege gefunden, von ihm zuerst aufgestellt worden ist. Hierin sind A und B abkürzungsweise gesetzt für die Ausdrücke:

$$A=\frac{2R}{H}\left[\frac{k}{2}\left(\frac{P}{d}\right)^2-p'\right]$$

$$B=\frac{R}{H}\frac{8\pi k^2}{2K+1}\left(\frac{P}{d}\right)^2\ ^{1}).$$

1) Die hier eintretende Grösse B ist mit der entsprechenden Kirchhoff'schen nicht identisch; das Verhältnis der letzteren ist $9K:2(2K+1)$, welches Verhältnis für alle möglichen Werthe des K nur zwischen den Grenzwerthen $\frac{3}{2}$ und $\frac{9}{4}$ sich bewegen kann.

Als particuläres Integral dieser Differentialgleichung gibt Kirchhoff an:

$$u = \frac{A}{2} - \frac{B}{4}(1 - \mu^2).$$

Die weitere Bedingung, dass das Volum der Luftblase unverändert bleiben soll, welche Bedingung durch das Integral

$$\int_{-1}^{+1} u\,d\mu = 0$$

sich ausdrücken lässt, stellt eine Beziehung zwischen A und B her, nämlich

$$A = \frac{1}{3}B;$$

und somit ergibt sich:

$$u = \frac{B}{4}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Daher erleidet die Luftblase für $\mu = 1$, d. h. in Richtung der Kraftlinien eine Dilatation vom Betrage $\frac{B}{6}$, und senkrecht zu ihnen, für $\mu = 0$ also, eine Contraction vom Betrage $\frac{B}{12}$, also eine halb so grosse als die Dilatation beträgt. Dilatation sowohl als Contraction sind, wie die Grösse B, mit k^2 proportional, und daher bei magnetisch polarisirbaren Flüssigkeiten im magnetischen Felde nicht zu beobachten, weil bei diesen die Werthe von k sehr klein sind.

Es haben somit die in diesem Paragraphen auf Grund des Principes der virtuellen Verschiebungen geführten Betrachtungen zu denselben Resultaten geführt, wie sie Kirchhoff auf anderem Wege hergeleitet hat.

Messungen der Transversaltöne gespannter Drähte.

Von

A. Kurz.

§ 1. Brook Taylor (1685—1731) lehrte in seiner „Methodus incrementorum directa et inversa“ (London 1715) uns den nach ihm benannten Satz der Differentialrechnung und die von Melde in seiner „Akustik“ [1]) auch nach Taylor benannte Formel für die Schwingungszahl transversal schwingender Saiten, die ich jüngst [2]) auch elementartheoretisch abzuleiten suchte.

Melde handelt hierüber a. a. O. S. 53 bis 57; er erwähnt eine nicht näher bezeichnete „Saite“, welche durch Vergleichung mit Appunn's Sonometer nahe 74 Schwingungen aufwies; dieselbe gab in dem „Weber'sches Monochord“ (s. § 3 und 4) genannten Apparate nahe 79 Schwingungen als Resultat der Berechnung nach Taylor's Formel.

Auch Glazebrook und Shaw [3]) widmen zwei von 460 Seiten diesem Problem, dem „keine grosse Genauigkeit“ zugeschrieben wird; in der That berechnet sich aus den dort angegebenen Zahlen

$$\frac{1}{2 \cdot 65{,}5}\sqrt{\frac{22680 \cdot 981}{0{,}0268}}$$ (Material auch nicht angegeben)

die Schwingungszahl 220 (dieses Resultat ist im Buche ebenfalls nicht angegeben), während die Schwingungszahl der gleichtönenden Stimmgabel 256 betrug.

Kohlrausch widmete in seinem „Leitfaden der praktischen Physik“ dieser Aufgabe nur vier Zeilen (Angabe der Formel), denen er in seiner neuesten (6.) Auflage noch die zwei weiteren beifügt: „Die eigene Elasticität der Saite macht die Schwingungszahl etwas grösser. Dünner Messingdraht ist am geeignetsten.“

§ 2. Messung mit dem gewöhnlichen Monochord; Stahldraht (Klaviersaite) von ungefähr $^1/_3$ mm Dicke, mit 2000 g belastet (unter

1) Brockhaus, Leipzig 1883. 351 S. kl. 8.

2) Dieser Band des Repertoriums S. 592 u. f.

3) Einführung in das physikalische Praktikum. Leipzig 1888, Quandt und Händel. Deutsch von Schlösser. Gelegentlich bemerkt wird es dort S. 166 unten „Centimeter“ statt „Millimeter“ heissen müssen.

Anwendung einer Rolle). Mittels verschiebbaren Steges ward die Länge 15,7 cm abgegrenzt für den Ton der Stimmgabel $a_1 = 435$ Schwingungen.

Gegenüber der letztangegebenen Zahl gibt Taylor's Formel

$$\frac{1}{2 \cdot 15{,}7} \sqrt{\frac{2000 \cdot 980}{0{,}0101}}$$

das Resultat 442, also nicht ganz 2 % Unterschied.

§ 3. Messung mit einem vertical aufgehängten Drahte: Der gerade vorräthige Siliciumbronze-Draht („téléphonique" von Lazare Weiller und Cie. in Augoulème) ist 1,1 mm dick, 1375 cm desselben wogen 124 g; die Länge 90 cm desselben gab mit 22000 g Belastung den Ton, den ich auf einer Stahlsaite des Monochordes mittels Steg-Verschiebung aufsuchte, in folgender Weise: Eine zweite gleichgestimmte Saite des Monochordes wurde mittels ihres Steges auf der Stimmgabel $a_1 = 435$ gestimmt. Dieser Steg war bei dem Theilstriche 33 des Monochordes zu setzen. Der Steg der vorhergenannten Saite gab bei Theilstrich 41 die beste Uebereinstimmung für das Ohr mit dem Klanggewirr des gezupften oder geklopften (mit dem Fingernagel) Bronzedrahts. Damit der auf dem Monochorde gespannte Draht gegen den vorigen nicht zu wohlklingend töne, was mir die Vergleichung zu erschweren schien, strich ich ersteren nur mit dem Finger. Aus beiden Monochordsaiten berechnet sich dann

$$435 \cdot \frac{33}{41} \text{ oder } 350$$

bezw. die tiefere Octave 175
und die nochmals tiefere 87.

Bekanntlich ist das Ohr zur Verwechslung der Octaven, namentlich in den obersten und untersten Tonlagen sehr geneigt.

Die Formel von Taylor ergibt

$$\frac{1}{2 \cdot 90} \sqrt{\frac{22000 \cdot 980}{124 : 1375}} \text{ oder } 86 \text{ Schwingungen}$$

also etwas über 1 % Unterschied zwischen Beobachtung und Berechnung.

§ 4. Als bleibendes Experimentirmittel bewahre ich vom vorigen Draht die zwei Stücke von 45 und 22½ cm Länge für die zwei höheren Octaven, die man beide aneinanderhängen und mit 22 kg belasten kann. Die an den Enden angebrachten Schlingen sind mit Lothmetall dick eingehüllt.

§ 5. Desgleichen verknüpfte ich von der im § 2 erwähnten Klaviersaite die Längen 50 und 25 cm aneinander und von einem ungefähr ebenso dicken Messingdrahte auch dieselben Längen so, dass oben und unten eine Rolle zum Aufhängen an der Decke und zum An-

hängen von 12 kg jene zweierlei Drähte gleich stark (mit je 6 kg) spannt. Also ist nach Taylor für den

Stahldraht:	Messingdraht:
$\frac{1}{2 \cdot 25}\sqrt{\frac{6000 \cdot 980}{0{,}0101}}$ gibt 482;	$\frac{1}{2 \cdot 25}\sqrt{\frac{6000 \cdot 980}{0{,}0219}}$ gibt 328;
ferner sind für das Gehör einzustellen gewesen 29 Theilstriche auf der einen der beiden im § 2 erwähnten Monochordsaiten (33 wieder auf der anderen für den Stimmgabelton), d. h. es wurden beobachtet	44 Theilstriche
$435 \cdot \frac{33}{29}$ oder 495 Schwingungen	$435 \cdot \frac{33}{44}$ oder 326
oder $2\frac{1}{2}$ % Unterschied.	oder nicht einmal $\frac{2}{3}$ %.

Hiermit sind die beiden Schlusssätze von § 1 bestätigt.

Aber durch § 2 ist auch erwiesen, dass man ausser dem gewöhnlichen Monochord der besonderen Vorrichtung von Melde oder der Aufhängung in § 3 bis 5 nicht bedarf, um die Taylor'sche Formel experimentell zu bestätigen und mit besserer Uebereinstimmung als in den beiden Beispielen des § 1, welche bezw., um mich so auszudrücken, mit verticalem und horizontalem Monochorde angestellt wurden.

Ueber Sauerstoffzellen [1]).

Von

Walther Wolff.

§ 1.

Die elektromotorische Kraft des Elementes $Zn \mid Zn\,SO_4 \mid Cu$, ist wiederholt gemessen worden und hat sich zu etwa einem Volt ergeben. Wendet man statt des Kupfers eine andere Elektrode an, so bemerkt man, dass die elektromotorische Kraft um so grösser wird, je weiter sich der betreffende Körper in der Poggendorff'schen Spannungsreihe [2]) vom Zink entfernt. Bei verschiedenen Concentrationsgraden der Salzlösung variirt auch die elektromotorische Kraft, und zwar wächst dieselbe, wenn die Concentration abnimmt.

Damien [3]) stellte fest, dass die elektromotorische Kraft bei den von ihm untersuchten Elementen gleich nach dem Eintauchen der Elektroden in die Flüssigkeiten eine etwas geringere war, als wenn dieselben schon eine Zeit lang darin gestanden hatten, dass aber dann einige seiner Elemente, unter denen sich auch die Combinationen $Zn \mid Zn\,SO_4 \mid Cu$ und $Zn \mid Zn\,Cl_2 \mid Cu$ befanden, wochenlang annähernd constant waren.

Beobachtungen an Elementen, deren Elektrolyt ein Zinksalz war, bestätigten diese Angaben. Die Messungen der elektromotorischen Kraft solcher Elemente wurden deshalb erst einige Stunden nach dem Ansetzen derselben ausgeführt. Sie geschahen sämmtlich mittels der Poggendorff'schen Compensationsmethode und ergaben die in Tabelle I und II (S. 763) verzeichneten Werthe.

Als Elektroden der Elemente wurden Metalldrähte benutzt, wie sie gewöhnlich (also nicht chemisch rein) im Handel vorkommen. Dieselben wurden mit Ausnahme von Nr. 1 und 2 in Tabelle II mit Smirgelpapier blank gerieben, während die Kupferelektroden der bezeichneten Versuche durch Glühen von Kupferdraht hergestellt waren.

---

1) Vom Herrn Verf. im Aussuge mitgetheilt aus seiner gleichnamigen Dissertation, Freiburg 1888.

2) Pogg. Ann. Bd. 50 S. 268 (1840).

3) Damien, Ann. de Ch. et de Ph. t. VI (6) p. 289 etc. (1885).

Die Elektrolyte bestanden aus chemisch reinen Salzlösungen, welche stets durch Digeriren mit Zinkcarbonat möglichst neutral gemacht worden waren. Bei Nr. 11 und 12 Tabelle II gelang das nicht. Es spaltete sich immer wieder freie Säure von dem Salze ab, was daraus geschlossen wurde, dass sowohl das Zink als auch das Kupfer durch die Salzlösung stark angegriffen wurde, eine Erscheinung, welche man bei den anderen Combinationen nicht beobachtete.

Tabelle I.

Combination: Zn | $ZnSO_4$ | Cu.

Nr.	spec. Gewicht der Lösung bei 15° C.	Elektromotorische Kraft in Volt
1	1,438	0,965
2	1,263	1,001
3	1,093	1,021
4	1,040	1,034
5	1,013	1,034
6	1,001	1,066

Tabelle II.

Nr.	Combination	spec. Gewicht der Lösung	Elektromotorische Kraft in Volt
1	Zn | $ZnSO_4$ | CuO	1,427	1,008
2	"	1,003	1,015
3	Zn | $ZnSO_4$ | Fe	1,427	0,378
4	"	1,003	0,385
5	Zn | $ZnSO_4$ | Pb	1,427	0,456
6	"	1,003	0,587
7	Zn | $ZnCl_2$ | Cu	1,637	0,784
8	"	1,003	0,930
9	Zn | $ZnCl_2$ | Fe	1,917	0,385
10	"	1,003	0,390
11	Zn | ZnN_2O_6 | Cu	1,496	0,669
12	" " "	1.004	0,698
13[1])	Zn | $ZnSO_4$ | Fe	1,427	0,378
14	Zn | $ZnSO_4$ | Pb	1,427	0,456
15	Zn | $ZnSO_4$ | Cu	1,427	0,966
16	Zn | $ZnSO_4$ | Ag	1,427	1,049
17	Zn | $ZnSO_4$ | Au	1,427	1,072
18	Zn | $ZnSO_4$ | Pt	1,427	1,155
19	Zn | $ZnSO_4$ | C	1,427	1,175

1) Man sieht aus den Versuchen 13 bis 19, dass die elektromotorischen Kräfte grösser werden, je weiter sich die Stellung der positiven Elektrode in der Poggendorff'schen Spannungsreihe vom Zink entfernt.

Als Etalons bei diesen Bestimmungen dienten zwei „hohe Daniells“ [1]), welche fortwährend mit Clark- und Calomel-Elementen verglichen wurden.

Die Calomel-Elemente enthielten auf 2 l Wasser 86,15 g Zinkchlorid und ergaben, verglichen mit den nach den Vorschriften des Lord Rayleigh [2]) angefertigten Clark-Elementen eine elektromotorische Kraft von

1,0715 Volt.

Herr Prof. Warburg führte die Messung der elektromotorischen Kraft einer Batterie von 144 Calomelelementen in absolutem Maass aus und fand dieselbe für 1 Calomel zu

1,072 Volt.

§ 2.

Beobachtet man mit einem Galvanometer den Verlauf der Stromintensität eines Elementes $Zn \mid ZnSO_4 \mid Cu$, welches etwa die in § 3 bezeichnete Form und Grösse hat, dessen Elektroden mit Smirgelpapier blank gerieben sind, und welches mit einer möglichst neutralen Lösung angesetzt ist, während der Widerstand des ganzen Stromkreises etwa 30 Ohm beträgt, so bemerkt man, dass dieselbe sehr rasch abnimmt. Die Abnahme verzögert sich allmählich, bis schliesslich noch ein sehr geringer Intensitätsrest übrig bleibt, der aber noch immer, wenn auch sehr langsam, abnimmt.

Es ist jedoch der erste Ausschlag sowohl als auch der Verlauf der Stromintensität selbst bei gleicher geometrischer Gestalt der Elemente ein sehr verschiedener, trotzdem man die Elektroden immer möglichst gleichmässig behandelt. Bald ist der erste Ausschlag grösser, bald kleiner, und bald nimmt die Stromintensität langsamer, bald schneller ab, ohne dass äusserlich an den Elektroden oder an der Flüssigkeit die geringste Verschiedenheit zu bemerken wäre.

Gleichzeitig nimmt natürlich auch die elektromotorische Kraft ab. Oeffnet man, nachdem das Element eine Minute lang geschlossen war, den Stromkreis und versucht die elektromotorische Kraft mit der Poggendorff'schen Compensationsmethode zu bestimmen, so findet man, dass das nicht möglich ist, weil dieselbe fortwährend im Zunehmen begriffen ist: das Element erholt sich. Nach kurzer Zeit, etwa einer Minute, können annähernde Bestimmungen gemacht werden. Die elektromotorische Kraft ist dann noch nicht auf 0,3 Volt gestiegen. Lässt man nun das Element in Ruhe, so erholt es sich vollständig und zeigt nach Verlauf von ungefähr 1 Stunde wieder genau die ur-

1) Siehe über die Theorie des hohen Daniells Dissertation Anlage I S. 33.

2) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. V 176 p. 781 (1885).

sprüngliche elektromotorische Kraft. Man kann dieses Experiment mit demselben Element häufig wiederholen und hat stets den nämlichen Erfolg. Bringt man die Flüssigkeit durch Schütteln oder durch Bewegen einer Elektrode in Circulation, so geht das Erholen schneller vor sich. Die Geschwindigkeit hängt überhaupt von verschiedenen Umständen ab. Elemente mit stark verdünnten Lösungen erholen sich schneller, als solche mit concentrirten.

Auch wenn man das Element schüttelt während der Strom geschlossen ist, bemerkt man sofort am Galvanometer eine Stromverstärkung, welche aber nachher ebenfalls wieder schwindet.

§ 3.

Daraus, dass das Element einen Strom gibt, geht hervor, dass in demselben Arbeit geleistet wird; es muss also irgendwo ein Energievorrath stecken, der dieselbe liefert.

Um die in dem Element enthaltene Energie direct zu messen, wurde versucht, die in einem Platindraht von bekanntem Widerstande durch den Strom entwickelte Wärmemenge zu bestimmen. Das Ries'sche Lufthermometer erwies sich hierzu wegen der grossen Wärmeabgabe als ungeeignet, das Eiscalorimeter war nicht empfindlich genug. Deshalb wurde die vom Element in der ersten Minute geleistete Arbeit mit einem Aethercalorimeter, wie es die Herren Warburg und Hönig[1]) angegeben haben, bestimmt.

Die Elektroden des Elements bestanden aus kreisrunden Scheiben von je 95,03 qcm metallischer Oberfläche, deren Abstand voneinander 0,3 mm betrug. Die voneinander abgewandten Seiten der Platten waren mit Asphaltlack überzogen, ebenso bei den Versuchen in Tabelle V bis XIII.

Es wurde gefunden, dass die Wärmeentwicklung zwischen 0,0006 und 0,34 Calorien schwankte. Als die Elektroden immer gleichmässig blank gesmirgelt wurden, ergaben sich noch Schwankungen zwischen 0,0006 und 0,014 Grammcalorien, welche durch kein Mittel beseitigt werden konnten. Der Strom wurde immer nur eine Minute lang geschlossen, weil ein längerer Stromschluss wegen der Wärmeabgabe des Calorimeters an die Umgebung nicht thunlich war. Der Fehler, der dabei gemacht wurde, war ein geringer. Aus den Versuchen mit dem Galvanometer konnte man nämlich das Verhältnis der in der ersten Minute verbrauchten Energie zu der gesammten und dadurch mit Benutzung der Calorimeterversuche den Gesammtenergievorrath schätzen. Hierbei stellte sich heraus, dass bei blank gesmirgelten

1) Warburg und Hönig, Repert. d. Phys. Bd. 19 S. 749 (1883).

Elektroden fast der ganze Vorrath während der ersten Minute verbraucht wurde. Es vertheilten sich nämlich etwa 99 Hundertel auf die erste Minute und 1 Hundertel auf die 6 folgenden.

§ 4.

Es fragt sich nun, woher eigentlich der Energievorrath stammt. Bei der Ueberlegung dieser Frage stösst man anfangs auf Schwierigkeiten.

In dem Element $Zn \mid ZnSO_4 \mid Cu$ kann der primäre elektrolytische Vorgang nur folgender sein: Ist das Element in Thätigkeit, so wird an der Anode Zink gelöst, und an der Kathode ebensoviel Zink ausgeschieden, vorausgesetzt, dass das Zinkvitriol säurefrei und so concentrirt ist, dass keine Wasserstoffausscheidung eintritt, was bei den Versuchen, welche die Feststellung des elektrolytischen Processes bezweckten, ausgeschlossen ist, da aus dem Grunde hierbei nur ganz concentrirte Lösungen zur Anwendung kamen, die vorher durch Zinkcarbonat möglichst neutral gemacht waren. Da nun bei der Verbindung von Zn und SO_4 ebensoviel Wärme frei, wie bei der Trennung der beiden Bestandtheile wieder gebunden wird, so ist mit diesem Vorgang keine Energieänderung verbunden [1]). Die chemische Theorie vermag also bei dieser Betrachtungsweise keinen Aufschluss über die Frage zu geben.

Nach der Volta'schen Theorie, welche eine Potentialdifferenz zwischen zwei einander berührenden Metallen annimmt, könnte man vermuthen, dass die geleistete Arbeit von dem Transport einer Zinkschicht vom Zink nach dem Kupfer und einer dann stattfindenden Vereinigung von Zink und Kupfer zu einer Legirung herrühre. Elemente, welche nach diesem Schema zusammengesetzt sind, würden also sehr für diese Theorie sprechen, wenn sie wirklich einen Strom lieferten. Bei der näheren Untersuchung derselben wird man jedoch sehr bald zu einer anderen Ansicht geführt.

§ 5.

Da bemerkt worden war, dass die benutzte Kupferplatte sehr häufig nach dem Versuche eine andere Färbung zeigte als vorher, so lag die Vermuthung nahe, dass die an dem Energievorrath beobachteten Unregelmässigkeiten von der Kupferplatte herrührten. Dieselbe wurde daher vor jedem Versuche auf galvanischem Wege frisch mit Kupfer überzogen. Nichtsdestoweniger hörten die Unregelmässigkeiten

1) Anm. Eine durch Wanderung der Jonen bedingte Concentrationsänderung würde einen Energie g e w i n n repräsentiren.

in der Färbung und in der Wärmeentwickelung nicht auf. Im Gegentheil sie wurden eher grösser, als kleiner. Jedesmal, wenn viel Wärme entwickelt wurde, befanden sich vorher an der Kupferelektrode Anlaufflecken, welche für feine Oxydschichten gehalten werden mussten. Zeigte sie eine gleichmässigere Färbung, so wurde nur wenig Wärme entwickelt.

Als die Kupferplatte jedoch künstlich oxydirt wurde, stieg sogleich die Wärmeentwicklung. Aus Tabelle III geht dieses Verhalten deutlich hervor; es ist noch zu bemerken, dass, wenn die Kupferelektrode vor dem Versuche stark angelaufen war, nach demselben stets Farbenveränderungen wahrzunehmen waren. Die Flecke, welche vorher ein schmutziges Orangegelb zeigten, waren nachher dunkelbraun, fast schwarz. War die Kupferplatte nicht angelaufen, so zeigte sie vorher und nachher eine schöne lachsrothe Färbung.

Versuche mit dem Galvanometer führten zu denselben Resultaten. Dieselben finden sich in Tabelle IV aufgeführt, während Tabelle III einige Versuche mit dem Calorimeter enthält. Bei den Versuchen 1, 2, 3 der Tabelle III und 2, 3, 4 der Tabelle IV wurde nach Möglichkeit jeder Zutritt von Luft zur Kupferplatte vermieden, während 7 bis 10 Tabelle III und 8 bis 11 Tabelle IV Versuche sind, bei denen die Kupferplatte durch Erhitzen an der Luft oxydirt wurde.

In der ersten Columne der Tabelle III ist der Zustand der Kupferelektrode vor dem Versuche angegeben, in der zweiten die Anzahl der entwickelten Grammcalorien. Der Strom wurde nach den in der letzten Rubrik angegebenen Zeiten unterbrochen.

Tabelle III.

Versuche mit dem Calorimeter.

Nr.	Cu-Elektrode	Beobachtete Wärme	Stromdauer
		Grammcalorien	Secunden
1	ganz blank	0,00634	60
2	„ „	0,01022	60
3	„ „	0,01362	60
4	etwas fleckig	0,03747	60
5	„ „	0,03747	60
6	sehr fleckig	0,07834	90
7	stark angelaufen	0,18052	90
8	„ „	0,18392	60
9	„ „	0,24523	120
10	„ „	0,3406	60

Tabelle IV.

Versuche mit dem Galvanometer.

Nr.	0	1/4	1/2	1	2	7	Cu-Elektrode
1	389	130	93	58	39	22	etwas fleckig
2	278	80	13	8,5	6	3	ganz blank
3	246	38	28	18	9	5	„ „
4	308	53	30	16	10	5	„ „
5	375	115	82	52	38	17	etwas fleckig
6	340	95	89	77	56	24,5	schwach angelaufen
7	397	94	69	45	31	21,5	„ „
8	270	130	100	80	66	50	sehr stark angelaufen
9	275	122	101	82	69	60	„ „ „
10	235	102	72	52,5	45,5	38	„ „ „
11	254	120	100	78	52	30	„ „ „

Am Kopf dieser Tabelle stehen die Zeiten in Minuten, darunter die Ausschläge der Galvanometernadel in Millimetern der Scala; und zwar unter 0 der erste Ausschlag, in den anderen Columnen die nach der Zeit $t = 1/4$, $1/2$ u. s. w. Minuten eingetretenen Ablenkungen derselben. Die letzte Rubrik enthält den Zustand der Kupferelektrode. Das Element war dasselbe wie in Tabelle III.

§ 6.

Aus all diesen Versuchen geht hervor, dass der Energievorrath in enger Beziehung zu dem Sauerstoffvorrath an der positiven Elektrode steht. Es liegt daher nahe, in diesem Sauerstoffvorrath die Quelle der Stromarbeit zu suchen und ihm allein den ganzen Energievorrath zuzuschreiben, so dass die in Tabelle I und II verzeichneten galvanischen Combinationen zu betrachten sind, als bestände bei ihnen die positive Elektrode aus Metalloxyd. Unter der positiven Elektrode soll immer das dem Zink gegenüberstehende Metall verstanden werden.

Da die ausgesprochene Ansicht sich durch die folgenden Versuche bestätigt hat, so mögen die fraglichen Combinationen als Sauerstoffzellen bezeichnet werden.

§ 7.

Aus dieser Hypothese lassen sich alle oben geschilderten Eigenschaften der Elemente leicht erklären.

Der elektrolytische Vorgang in einem derartigen galvanischen Element ist folgender: Ist dasselbe geschlossen, so wird auf der einen

Seite Zink gelöst, auf der andern Zink ausgeschieden. Dieses ausgeschiedene Zink oxydirt sich auf Kosten des Kupferoxyds zu Zinkoxyd und verbindet sich mit einem Molekül Wasser zu Zinkhydroxyd, welches dann mit dem Zinksulfat ein lösliches basisches Salz bildet.

Die Wirkungsweise des Kupferoxyds ist also in diesem Elemente eine ähnliche wie in dem Element von de Lalande[1]), amalgamirtes Zink | Kalilauge | Kupferoxyd. Hier würde der Wasserstoff polarisirend wirken, da aber die positive Elektrode aus Kupferoxyd besteht, so reducirt er dasselbe, wodurch Wasser entsteht.

Ueberhaupt gehören hierher alle Elemente, welche als positive Elektroden Oxyde oder Superoxyde enthalten. So das von

De la Rive[2]): $Zn \mid H_2SO_4 + Aq \mid PbO_2$,

Leclanché[2]): $Zn \mid NH_4Cl \mid MnO_2$,

Gaiffe[2]): $Zn \mid ZnCl_2 \mid C + MnO_2$,

ferner die Accumulatoren, in denen Bleisuperoxyd zur Verwendung kommt.

Die Abnahme der elektromotorischen Kraft des geschlossenen Elements $Zn \mid ZnSO_4 \mid Cu$ erklärt sich folgendermaassen: An oxydfreien Stellen der positiven Elektrode scheidet sich metallisches Zink aus; es bilden sich Localströme und das Potential der positiven Elektrode liegt zwischen dem dem Zink und Kupferoxyd entsprechenden. Je weniger Kupferoxyd allmählich übrig bleibt, desto mehr wird sich das Potential der Kupferelektrode natürlich dem des Zinks nähern, so dass die elektromotorische Kraft immer mehr abnimmt.

Oeffnet man nun das Element, so lösen sich, wie Herr Oberbeck[3]) gezeigt hat, die Zinktheilchen in der umgebenden Flüssigkeit wieder auf; die nunmehr freie Kupferoberfläche oxydirt sich unter Einwirkung des Sauerstoffs, welcher in der Flüssigkeit gelöst ist, von Neuem zu Kupferoxyd, so dass der alte Zustand des Elements wieder hergestellt ist. Elemente mit verdünnteren Lösungen erholen sich schneller, weil sich die Zinkschichten, wie Herr Oberbeck gefunden hat, in verdünnten Lösungen schneller auflösen als in concentrirten. Dies geschieht vielleicht deshalb, weil verdünnte Lösungen mehr Gase absorbiren[4]) als concentrirte; und die Gegenwart freien Sauerstoffs ist wohl überhaupt zur Lösung von Zink in neutralem Zinkvitriol nothwendig, damit sich das Zink erst oxydiren, dann in Hydroxyd verwandeln kann, welches sich mit dem Sulfat zu einem basischen Salz vereinigt.

1) De Lalande, Compt. rend. vol. 97 p. 164 (1883).
2) Wiedemann, Elektr. Bd. 1 S. 747 (1882).
3) Oberbeck, Wied. Ann. Bd. 31 S. 341 (1887).
4) Mackenzie, Fortschr. d Phys. i. J. 1877. 33. Jahrg. S. 302 (1882).

Die elektromotorische Kraft des ungeschlossenen Elements hängt ab von der bei einem unendlich kleinen Elektricitätsübergang eintretenden Veränderung; ein unbegrenzt kleiner Sauerstoffvorrath thut hier dieselbe Wirkung, wie ein beliebig grosser. So erklärt es sich, dass die elektromotorische Kraft des ungeschlossenen Elements nur wenig beeinflusst wird von der Grösse des Sauerstoffvorraths, während der Energievorrath ihm geradezu proportional sein muss. Ebenso erklärt sich die elektromotorische Kraft des Elements mit Silber als positive Elektrode. Wenn man auch annehmen muss, dass das Silber oxydfrei ist, so kann es doch Sauerstoff occludirt enthalten, wie Platin; auch der in der Flüssigkeit gelöste Sauerstoff könnte hier die elektromotorische Kraft bedingen.

§ 8.

Um die oben ausgesprochene Hypothese zu prüfen, wurden genaue Versuche angestellt, bei welchen das zu prüfende Element, das Aethercalorimeter und zwei Silbervoltameter hintereinandergeschaltet wurden.

Mit dem Aethercalorimeter wurde die von dem Elemente entwickelte Wärmemenge, mit den Silbervoltametern die diese Wärme erzeugende Elektricitätsmenge gemessen. Die ausgeschiedene Silbermenge belief sich im allgemeinen auf Bruchtheile eines Milligramms und erreichte nie den Werth von 2 mg; es musste daher eine sehr empfindliche Wage angewandt werden, welche nach dem Vorbilde der von von den Herren Warburg und Ihmori[1]) benutzten construirt wurde. Hinzugefügt wurde, dem vorliegenden Zwecke entsprechend, eine Arretirung. Ueber die Construction der Wage und ihren Gebrauch, sowie die Einrichtung der Silbervoltameter finden sich nähere Angaben in der Anlage III meiner Dissertation; das Silbervoltameter hat sich hier auch für die Messung sehr kleiner Elektricitätsmengen als ein sehr zuverlässiges Instrument erwiesen. Anlage II enthält Angaben über das Aichen und den Gebrauch des Aethercalorimeters.

Die Behandlungsweise der positiven Elektroden war eine verschiedene und der Zustand derselben ist in den Tabellen bei jedem Versuche hinzugefügt. Die Zinkelektrode wurde stets gleichmässig behandelt, nämlich vor jedem Versuche sorgfältig mit Smirgelpapier abgerieben. Ebenso wurde vor jedem Versuche die Flüssigkeit erneuert, da bei den Vorversuchen bemerkt worden war, dass sich Kupferoxyd in Zinksulfat auflöst, was daraus geschlossen wurde, dass sich das Zink mit einem kupferfarbigen Hauch überzog, sobald beide Elektroden längere Zeit in der Flüssigkeit gestanden hatten, namentlich wenn das Kupfer stark oxydirt war.

1) Warburg und Ihmori, Wied. Ann. Bd. 27 S. 483 (1886), und Ihmori, Wied. Ann. Bd. 31 S. 1006 (1887).

Die Bedeutung der Buchstaben über den Tabellen ist folgende: Es bezeichnet

t die Dauer des Stromschlusses in Secunden,

p' das Gewicht des ausgeschiedenen Silbers in Milligramm;

γ die am Calorimeter beobachteten Scalentheile [1]),

W_1 die aus γ berechnete Wärmemenge in Grammcalorien.

Unter der Rubrik W_2 ist diejenige Wärmemenge verzeichnet, welche erzeugt würde, wenn die ganze an der positiven Elektrode elektrolytisch frei werdende Zinkmenge dem in § 7 geschilderten Process unterworfen würde. In dem Element findet in Wirklichkeit das letztere im allgemeinen nicht statt, indem an den von Kupferoxyd befreiten Stellen das Zink nicht oxydirt wird.

Tabelle V.

Combination: Zink | Zinksulfat | Kupfer.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Cu-Elektrode
1*	60	0,0537	0	?	0,01136	?	ganz blank
2*	60	0,0704	0,19	0,000617	0,01489	0,041	„ „
3*	90	0,3319	1,48	0,004809	0,07016	0,069	„ „
4*	60	0,3295	1,78	0,005784	0,06966	0,083	„ „
5*	60	0,3004	1,99	0,006466	0,0635	0,102	„ „
6*	60	0,4202	3,46	0,01124	0,08884	0,127	„ „

Die Kupferelektrode wurde vor jedem dieser Versuche sorgfältig abgesmirgelt und mit Wiener Kalk an der Drehbank polirt, so dass dieselbe ein vollständig gleichmässiges Aussehen hatte.

Tabelle VI.

Combination: Zink | Zinksulfat | Kupfer.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Cu-Elektrode
7*	60	0,6447	8,39	0,02725	0,1362	0,200	gleichm. lachsroth
8	60	0,656	8,89	0,03028	0,1386	0,218	„ „
9	60	0,8200	13,34	0,04544	0,1733	0,262	etwas fleckig
10	60	0,9100	19,27	0,06716	0,1923	0,349	„ „
11*	60	1,05	20,65	0,06710	0,2220	0,304	stärker gefleckt
12	60	1,002	22,75	0,07749	0,2118	0,365	„ „
13	60	1,310	29,67	0,10106	0,2769	0,365	fast ganz gelb

1) Es mag bemerkt werden, dass der Werth eines Scalentheiles bei den mit einem Stern (*) bezeichneten Versuchen 0,003249 Grammcalorien war, bei den anderen 0,003406 Grammcalorien.

Diese Tabelle enthält die Resultate der Versuche, welche mit galvanisch niedergeschlagenem, vorher nicht gesmirgeltem Kupfer angestellt wurden. Wie schon oben erwähnt wurde, lief das Kupfer meistens an; nur in den Versuchen 7 und 8, welche verschiedenen Serien angehören, gelang es, die bei den Vorversuchen wiederholt zufällig erhaltene gleichmässig lachsrothe Färbung herzustellen. Bei den anderen Versuchen war das Kupfer mehr oder weniger angelaufen.

Tabelle VII.

Combination: Zink | Zinksulfat | Kupfer.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Cu-Elektrode
14	60	1,278	30,08	0,10245	0,2722	0,377	Bunt angelaufen
15*	60	1,356	36,62	0,11899	0,2867	0,415	„ „
16	60	1,325	35,11	0,11958	0,2801	0,427	„ „
17	5	0,137	3,96	0,01349	0,0290	0,465	„ „
18*	60	1,497	44,65	0,14509	0,3165	0,458	„ „

Die Kupferplatte wurde bei diesen Versuchen einer anderen Behandlung unterworfen. Sie wurde nämlich vor jedem Versuche sorgfältig mit Salpetersäure gereinigt, mit Wasser abgespült und dann durch Erhitzen an der Luft oxydirt, und zwar so lange bis die Platte gelb, roth und blau angelaufen war.

Tabelle VIII.

Combination: Zink | Zinksulfat | Kupfer.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Cu-Elektrode
19*	60	1,782	61,23	0,19895	0,3767	0,528	stark oxydirt
20*	60	1,782	63,24	0,20549	0,3767	0,545	„ „
21	30	0,9612	33,6	0,11444	0,2034	0,564	„ „
22	60	1,889	67,65	0,23042	0,3993	0,577	„ „
23	60	1,879	71,40	0,24319	0,3972	0,612	„ „

Die in dieser Tabelle verzeichneten Versuche wurden mit stark oxydirtem Kupfer ausgeführt. Zu dem Zwecke wurde die Kupferplatte vor jedem Versuche gereinigt, dann bis zur Rothgluth erhitzt und zum Abkühlen auf eine Steinplatte gelegt.

Weiter wurden Messungen angestellt mit Elementen, in denen das Zinksulfat durch Zinkchlorid ersetzt worden war. Dasselbe war,

wie die Sulfatlösung, ganz concentrirt und mit Zinkcarbonat so lange versetzt, bis keine Kohlensäureentwicklung mehr stattfand.

Die dem Zink gegenübergestellten Metalle wurden bei allen folgenden Versuchen, wo nicht das Gegentheil bemerkt ist, stark oxydirt, da Vorversuche gezeigt hatten, dass sich alle untersuchten Combinationen qualitativ ebenso verhalten wie das Element Zn | $ZnSO_4$ | Cu.

Tabelle IX enthält die Resultate dreier mit Zinkchlorid | Kupfer angestellten Versuche.

Tabelle IX.

Combination: Zink | Zinkchlorid | Kupfer.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Cu-Elektrode
24	60	1,738	60,17	0,20494	0,3674	0,558	stark oxydirt
25	60	1;818	65,87	0,22435	0,3844	0,584	„ „
26	60	1,600	53,5	0,18222	0,3382	0,539	„ „

Für die Berechnung des Werthes W_2 in den Tabellen V bis IX ist die Verbrennungswärme des Kupfers zu Kupferoxyd benutzt worden = 37200 Grammcalorien [1]).

Tabelle X.

Combination: Zink | Zinksulfat | Eisen.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Fe-Elektrode
27	60	0,932	17,33	0,05903	0,07142	0,827	stark oxydirt
28	60	0,893	15,84	0,05395	0,06843	0,788	„ „
29	30	0,488	9,49	0,03232	0,03740	0,864	„ „

Tabelle XI.

Combination: Zink | Zinkchlorid | Eisen.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Fe-Elektrode
30	60	1,226	31,46	0,10715	0,09395	1,141	stark oxydirt
31	60	1,036	21,34	0,0727	0,07939	0,916	„ „
32	60	1,061	22,43	0,07634	0,08136	0,939	„ „

1) Ostwald, Allgem. Chemie Bd. 2 S. 247 (1887).

Den Berechnungen von W_2 in den beiden letzten Tabellen liegt der Werth der Verbrennungswärme des Eisens zu Eisenoxyduloxyd = 264700 Grammcalorien [1]) zu Grunde.

Tabelle XII.

Combination: Zink | Zinksulfat | Blei.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Pb-Elektrode
33	60	0,856	13,84	0,04714	0,1288	0,366	schwach angelaufen
34	60	0,359	2,45	0,008345	0,05402	0,155	gleichmässig grau
35	60	0,7112	9,3	0,03140	0,1069	0,294	schwach angelaufen

Die Bleielektrode wurde vor Versuch 33 und 35 mit Smirgelpapier abgerieben und durch schwaches Erhitzen oxydirt. Die Oxydation war sehr gering, da das Erhitzen des Bleis, seines niedrigen Schmelzpunktes wegen, sehr vorsichtig vorgenommen werden musste. Vor Versuch 34 wurde die Bleielektrode nur abgerieben und einige Zeit an der Luft liegen gelassen.

Die zur Berechnung von W_2 dienende Zahl ist der Werth der Verbrennungswärme des Bleis zu Bleioxyd = 50300 Grammcalorien [2]).

Schliesslich wurden noch Versuche mit einer Silberelektrode vorgenommen. Die Silberplatte bestand aus chemisch reinem Silber, welches vor jedem Versuche abgesmirgelt und polirt wurde.

Tabelle XIII.

Combination: Zink | Zinksulfat | Silber.

Nr.	t	p'	γ	W_1	W_2	$W_1 \mid W_2$	Zustand der Ag-Elektrode
36*	60	0,266	1,37	0,004451	0,09484	0,0469	blank polirt
37*	60	0,1915	0,68	0,002209	0,06828	0,032	„ „

Zur Berechnung von W_2 wurde die Verbrennungswärme des Silbers zu Silberoxyd genommen = 5900 Grammcalorien [3]).

§ 9.

Das Gesammtresultat der in den Tabellen V bis XIII verzeichneten Versuche lässt sich dahin aussprechen, dass in jedem einzelnen

1) Ostwald, a. a. O. S. 228.
2) Ostwald, a. a. O. S. 268.
3) Ostwald, a. a. O. S. 261.

Falle bei den untersuchten Elementen der Energievorrath durch den an der positiven Elektrode vorhandenen Sauerstoff erklärt werden kann. Sind auch die unter W_2 verzeichneten Wärmemengen wahrscheinlich nicht genau richtig, da sie einem ganz bestimmten chemischen Process entsprechen, während weder festgestellt werden konnte, in welchem Molecularverhältnis zu den Metallen der Sauerstoff auf den Elektroden vorhanden war, noch zu welchen Körpern die Oxyde reducirt wurden, so kann ihnen doch eine gewisse Beweiskraft für die oben angegebene Hypothese nicht abgesprochen werden.

Namentlich zeigen Tabelle V bis VIII, wie die Arbeitsleistung successive anwuchs, als das Kupfer stärker und stärker oxydirt wurde. Weiter geht aus diesen vier Tabellen hervor, dass die in § 3 erwähnten Unregelmässigkeiten in der Arbeitsleistung der Elemente immer mehr verschwinden, je grösser der Sauerstoffvorrath wird: An den Kupferelektroden der Tabelle V war äusserlich nicht die geringste Verschiedenheit wahrnehmbar und doch ist bei Versuch 6 achtmal so viel Silber ausgeschieden, wie bei Versuch 1, welche beide unter denselben Verhältnissen angestellt wurden. In Tabelle VI ist das Maximum der ausgeschiedenen Silbermenge nur noch zweimal so gross als das Minimum, in den Tabellen VII und VIII verschwindet die Differenz fast ganz. Das spricht also sehr für die Richtigkeit der Hypothese. Das Regelmässige ist demnach das Kupferoxydelement; sobald man das Oxyd entfernt, treten Unregelmässigkeiten ein, da der Sauerstoff nicht vollständig zu beseitigen ist. Könnte dieses geschehen, so würde man vermuthlich die elektromotorische Kraft Null erhalten.

Die Rubrik $W_1 \mid W_2$ gibt eine Anschauung über den Nutzeffect der Elemente. Wie die Tabellen zeigen, wächst derselbe der Hypothese gemäss ebenfalls mit dem Sauerstoffvorrath. Bei geringem Energievorrath sehr klein, nimmt er allmählich mit diesem zu, jedoch langsamer, bis er einen Werth von 0,6 erreicht.

Ferner zeigen die Tabellen in Verbindung mit den Tabellen I und II, dass die elektromotorische Kraft nicht als Maass für den Energievorrath angesehen werden kann. Denn während in Bezug auf die elektromotorische Kraft die Elemente mit Kupfer von denen mit Kupferoxyd nur wenig abweichen, ist der Energievorrath der beiden Variationen sehr verschieden; und während der Energievorrath der Elemente Zink | Zinksulfat | Kupfer und Zink | Zinkchlorid | Kupfer ungefähr derselbe ist, haben die beiden Combinationen stark auseinandergehende elektromotorische Kräfte. Bei den Elementen Zink | Zinksulfat | Eisen und Zink | Zinkchlorid | Eisen sind sowohl die elektromotorischen Kräfte als auch der Energievorrath in beiden ungefähr gleich gross.

Auch mit Silber, welches sich an der Luft nicht oxydirt, wurden Versuche ausgeführt. Ein Energievorrath war auch hier vorhanden. Derselbe war zwar sehr gering, konnte aber doch zweifellos festgestellt werden. Hier kann man zwar eine Oxydation nicht annehmen, allein es ist immerhin möglich, dass Spuren von Sauerstoff auch bei gewöhnlicher Temperatur in Silber occludirt sind.

Es schien von Interesse zu sein, die Dicke der Oxydschicht zu berechnen, welche man bei ganz blankem Kupfer annehmen muss, um aus ihr die geleistete Arbeit erklären zu können. Zu diesem Zweck wurde ein besonderer Versuch angestellt, welcher den übrigen genau analog ausgeführt wurde.

Es ergab sich bei diesem Versuche ein Silbertransport von 1,8195 mg während einer Stromdauer von 10 Minuten. Der Aethermeniscus stieg in der ersten Minute um 3,8 Scalentheile, in der zweiten um 0,5, von der dritten ab ging er langsam zurück.

Nimmt man nun an, dass die ganze an der Kupferplatte niedergeschlagene Zinkmenge oxydirt wird, d. h., dass eine derselben wie dem niedergeschlagenen Silber äquivalente Kupferoxydmenge auf der positiven Elektrode vorhanden ist, so erhält man die Kupferoxydmenge jedenfalls zu gross.

0,00182 g Silber sind $0{,}00182 \cdot 39{,}6/107{,}7$ g Kupferoxyd äquivalent. Die Dicke x der Oxydschicht ergibt sich daher aus der Gleichung:

$$0{,}00182 \cdot 39{,}6/107{,}7 = r^2 \pi x \cdot 6{,}9,$$

wo r den Radius der Scheibe in Centimetern $= 5{,}5$ cm, 6,9 die Dichte des Kupferoxyds bedeutet zu

$$x = 1{,}02 \cdot 10^{-6} \text{ cm}.$$

Die meisten Versuche der Tabelle V sind aber aus einer noch dünneren Oxydschicht erklärbar, denn meistens wurde hier in der ersten Minute ein geringeres Steigen des Aethermeniscus beobachtet, als 3,8 Scalentheile. Die im ersten Versuche (Tabelle V) geleistete Arbeit ist aus der Hypothese erklärbar, wenn man die Dicke der Oxydschicht nur zu etwa 1 Milliontel Millimeter annimmt.

§ 10.

Wenn die in § 7 gegebene Erklärung des Erholens der Elemente richtig ist, so muss dieser Vorgang in einem luftfreien Element bedeutend schwerer vor sich gehen als in einem lufthaltigen.

Um dies zu prüfen, wurden gleichzeitig zwei Elemente angesetzt, welche die Gestalt der Fig. 1 hatten. Die metallische Oberfläche der Elektroden dieser Elemente war gleich gross.

An das 15 cm lange, 2 cm weite Glasgefäss waren drei Röhren 1, 2, 3 angesetzt. Durch 1 und 2 führten die an Platindrähten angelötheten Elektroden, welche fast ihrer ganzen Länge nach in enge Glasröhren mit Siegellack eingekittet waren, so dass nur ein ganz bestimmtes (4 cm langes) Stück der Elektrode daraus metallisch hervorragte. Diese engen Glasröhren wurden in die Rohre 1 und 2 eingeschmolzen und dann oben ganz geschlossen, so dass die Platindrähte etwa 1 cm lang in Glas eingeschmolzen waren. Die Glasröhren hatten den Zweck, einen etwaigen Stromschluss im Innern der Elemente an den Glaswänden entlang zu verhüten.

Nachdem die Elemente so vorbereitet waren, wurde durch das Rohr 3, welches noch mit einem Hahn verschlossen werden konnte, die Flüssigkeit eingeführt, bis das Gefäss fast voll war. Darauf wurde an 3 eine Wasserstrahlpumpe angesetzt und die Flüssigkeit längere Zeit unter vermindertem Druck im Sieden erhalten.

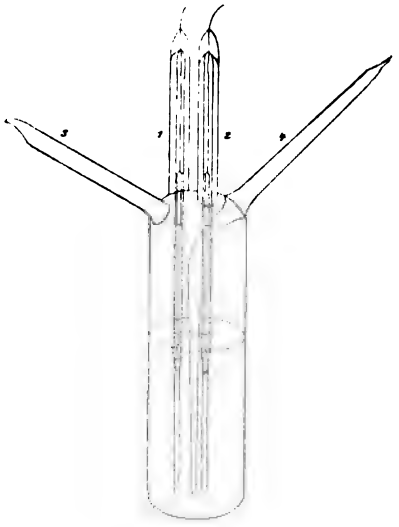


Fig. 1.

Während lebhaften Siedens wurde dann der Hahn geschlossen und das Glasrohr unterhalb des Hahnes abgeschmolzen.

Ein viertes Glasrohr 4 führte durch die Gefässwand hindurch bis auf den Boden des Gefässes. An dem oberen Ende war es zugeschmolzen und am unteren mit einer feinen Oeffnung versehen. Dieses Rohr hatte den Zweck, in das Element Luft einströmen zu lassen.

Aus dem einen wurden die absorbirten Gase entfernt, während bei dem andern die atmosphärische Luft fortwährend mit der Flüssigkeit in Communication blieb. Die Einzelheiten der Versuche gehen aus den Tabellen XIV bis XVII hervor.

Die erste Rubrik derselben enthält die Angabe der Zeit, wann die Messungen ausgeführt wurden. Die Zahlen unter t geben die Zeit in Stunden an, wie lange sich die Elemente erholt hatten. In der dritten und vierten Columne sind die elektromotorischen Kräfte in Volt angegeben. Element I war das luftleere.

Tabelle XIV.

Erster Versuch. Combination: Zink | Zinksulfat | Kupfer.

Beobachtungszeit Tag	Stunde	t	Element I	Element II	Bemerkungen
29. X. 87	10 V		0,952	0,955	Beide Elemente wurden mit derselben Flüssigkeit angesetzt. Element I wurde luftleer gepumpt und zugeschmolzen. Die Elemente wurden 24 Stunden lang einzeln in sich geschlossen.
30. X.	10 V	0	unmessbar	unmessbar	Eine genaue Messung war wegen des Anwachsens der E. M. K. unmöglich.
	11 V	1	0,225	0.301	
	12 M	2	0,344	0,432	
	2 N	4	0,452	0,667	
	4 N	6	0,471	0,821	
1. XI.	10 V	24	0,554	0,955	Element II hatte sich also schon vollkommen erholt.
2. XI.	10 V	48	0,873	0,956	
3. XI.	10 V	72	0,921	0,956	In Element I wurde nach der Messung Luft eingelassen.
	11 V	73	0,955	0,956	Element I erholte sich mit Luft gefüllt innerhalb einer Stunde.
4. XI.	10 V	96	0,955	0,956	

Tabelle XV.

Zweiter Versuch mit denselben Elementen.

Beobachtungszeit Tag	Stunde	t	Element I	Element II	Bemerkungen
4. XI. 87	12 M		0,955	0,956	Element I wurde leer gepumpt. Beide Elemente wurden 24 Stunden lang einzeln in sich geschlossen.
5. XI.	12 M	0	unmessbar	unmessbar	
	1 N	1	0,188	0,259	
	2 N	2	0,232	0,463	
6. XI.	12 M	24	0,422	0,947	
	2 N	26	0,435	0,955	Element II hatte sich erholt.
7. XI.	12 M	48	0,475	0,956	
8. XI.	6 N	78	0,511	0,956	
9. XI.	12 M	96	0,560	0,956	
11. XI.	12 M	144	0,661	0,956	
13. XI.	12 M	192	0,721	0,956	Element I wurde nun wieder ohne vorher mit Luft gefüllt zu sein 24 Stunden lang in sich geschlossen; nach dem Oeffnen des Stromkreises wurde die elektromotorische Kraft bestimmt und unmessbar gefunden. Darauf wurde Luft eingelassen. Das Element erholte sich jetzt ebenso rasch wie vorher das lufthaltige Element II.
14. XI.	12 M	0	unmessbar	—	
	2 N	2	0,422	—	
	4 N	4	0,517	—	
	5 N	5	0,571	—	
15. XI.	12 M	24	0,957	—	Nach 24 Stunden hatte es sich gänzlich erholt.
16. XI.	12 M	48	0,957	—	

Tabelle XVI.

Dritter Versuch mit denselben Elementen.

Beobachtungszeit		t	Element I	Element II	Bemerkungen
Tag	Stunde				
13. XII. 87	6 N		0,955	0,955	Element I wurde luftleer gepumpt, I und II hintereinander geschaltet und die beiden Elemente zusammen durch einen kurzen dicken Kupferdraht geschlossen und zwar eine Stunde lang. Dadurch wurde Element I umpolarisirt. Element II erholte sich so rasch, dass eine Messung nicht sogleich möglich war.
	7 N	0	− 0,0056	unmessbar	
14. XII.	8 V	13	− 0,0056	0,925	
	2 N	19	− 0,0056	0,955	Element II hatte sich vollkommen erholt.
15. XII.	6 N	47	− 0,0056	0,955	
16. XII.	6 N	71	− 0,0056		Drei Wochen lang wurde keine Messung ausgeführt. Element I hatte sich noch immer nicht erholt; jetzt wurde es mit Luft angefüllt und hatte sich schon nach 2 Stunden gänzlich erholt. Die E. M. K. von II hatte sich in den 3 Wochen nicht geändert.
10. I. 88	12 M		+ 0,665	0,955	
	2 N		+ 0,955	0,955	

Tabelle XVII.

Vierter Versuch mit denselben Elementen.

Beobachtungszeit		t	Element I	Element II	Bemerkungen
Tag	Stunde				
12. I. 88	12 M		0,955	0,955	Nach dem Messen wurde I leer gepumpt, beide Elemente untersucht, wie bei dem vorigen Versuch hintereinander geschaltet und geschlossen. Nach einer Stunde wurden sie wieder geöffnet und die E. M. K. bestimmt. Element I war wieder umpolarisirt.
	6 N		0,955	0,955	
	7 N	0	− 0,0056	(0,338) ungenau	
13. I.	12 M	17	− 0,0056	0,942	
14. I.	10 V	39	+ 0,122	0,955	Element II hatte sich vollständig erholt.
15. I.	3 N	68	+ 0,260	0,955	
16. I.	12 M	89	0,354	—	
17. I.	11 V	112	0,463	—	
13. I.	12 M	137	0,482	—	
19. I.	6 N	167	0,500	0,955	Nun wurde in Element I Luft eingelassen. Schon nach einer Stunde hatte es sich fast ganz erholt.
	7 N	(1)	0,923		
20. I.	8 V	(13)	0,955		
21. I.	10 V		0,955		

Aus diesen Tabellen geht das Verhalten der Elemente deutlich hervor. Die lufthaltigen erholten sich stets schon nach verhältnismässig geringer Ruhezeit vollständig, während die luftfreien dazu bedeutend mehr Zeit gebrauchten. Wurde in die luftfreien Elemente Luft eingelassen, nachdem sie Tage lang gestanden hatten, ohne sich vollständig zu erholen, so hatten sie schon nach wenigen Stunden ihre ursprüngliche elektromotorische Kraft wieder erreicht.

In den Versuchen, bei welchen die Elemente hintereinander geschaltet wurden, wodurch in beiden Elementen neben der gleichen Stromdauer auch gleiche Intensität und Stromdichte hergestellt wurde, kehrte sich jedesmal die Polarität der beiden Elektroden des luftfreien Elements um. Daraus muss geschlossen werden, dass sich auf dem Kupfer metallisch Zink ausgeschieden hatte, obgleich man dies durch das Auge nicht bemerken konnte.

§ 11.

Alle in den vorstehenden Paragraphen mitgetheilten Versuche bestätigen die in § 6 ausgesprochene Hypothese.

Die Berechnung der elektromotorischen Kraft des Elements aus der Hypothese ist zur Zeit unmöglich.

Sind e und S die Energie und Entropie des Elements in Wärmemaass, T die absolute Temperatur, p der Druck, v das Volumen, Q die Elektricitätsmenge, welche durch das Element in der Richtung der elektromotorischen Kraft V hindurchgegangen ist, dann gibt die Theorie[1]) für V den Ausdruck

$$V \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} -\frac{d}{dQ}\left\{J(e - TS) + pv\right\}$$

je nachdem das Element umkehrbar ist oder nicht.

Nimmt man an, dass die Wärmeeffecte in dem Stromkreise sich merklich auf Wärmeproduction nach dem Joule'schen Gesetz reduciren und sieht von der aus einer Volumänderung des Elements hervorgehenden Arbeitsleistung ab, so reducirt sich die rechte Seite des vorstehenden Ausdruckes auf sein erstes Glied. In der folgenden Tabelle (S. 781) sind die beobachteten elektromotorischen Kräfte E zusammengestellt mit den Werthen V, welche das erste Glied der rechten Seite des obigen Ausdrucks ergibt.

Unter der Rubrik K ist das Verhältnis von E/V verzeichnet.

---

1) Gibbs, Connecticut Transactions vol. III part II p. 344 etc. (1878). Helmholtz, Abhandl. Bd. 2 S. 958 u. ff. (1883).

Tabelle XVIII.

Combination	spec. Gewicht der Lösung	$J \cdot \frac{de}{dQ}$	E	V	K
Zn | $ZnSO_4$ | Cu	1,438	0,24175	0,965	1,001	0,964
Zn | $ZnCl_2$ | Cu	1,637	0,24175	0,734	1,001	0,783
Zn | $ZnSO_4$ | Fe	1,427	0,08766	0,378	0,365	1,036
Zn | $ZnCl_2$ | Fe	1,917	0,08766	0,385	0,365	1,055
Zn | $ZnSO_4$ | Pb	1,427	0,17215	0,456	0,717	0,636
Zn | $ZnSO_4$ | Ag	1,427	0,39871	1,072	1,661	0,645
Zn | $ZnSO_4$ | Pt	1,427	0,42175 [1]	1,155	1,757	0,659

Die elektromotorische Kraft des Elements Zn | $ZnSO_4$ | Cu ist nach dieser Tabelle bedeutend grösser als diejenige von Zn | $ZnCl_2$ | Cu, während die elektromotorische Kraft von Zn | $ZnSO_4$ | Fe annähernd dieselbe ist, wie diejenige von Zn | $ZnCl_2$ | Fe. Vielleicht hängt dies mit der von Thomson und Berthelot [2] angeführten Thatsache zusammen, dass Schwefelsäure mit Eisenoxyd dieselbe Neutralisationswärme gibt wie Salzsäure, während sonst die Neutralisationswärmen der Schwefelsäure beträchtlich höher sind, als die der anderen Säuren.

Phys. Inst. d. Univ. Freiburg i. Br. Januar 1888.

1) Zur Berechnung dieser Zahl wurde die von Berthelot angegebene Absorptionswärme des Sauerstoffs durch Platin benutzt = 1472 Grammcalorien für ein Atom O. Berthelot, C. R. p. 1382 (1882).

2) Ostwald a. a. O. S. 231.

Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der Emission von Licht- und Wärme-Wellen.

Von

August Häussler.

In meiner, Bd. XXIV S. 179 und 209 dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung „Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung" wurde nachgewiesen, dass jedes chemische Atom zu einem Centrum hin- und wegwirkender Kräfte wird, sobald es eine rotirende Bewegung um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe erhält. Aus der gleichen Annahme und unter Zugrundelegung aller übrigen in der erwähnten Abhandlung aufgeführten Voraussetzungen lässt sich jedoch auch noch eine andere, überaus einfache Theorie entwickeln, nach welcher ein rotirendes chemisches Atom zugleich ein Centrum einer von ihm ausgehenden Wellenbewegung sein muss, welche die hauptsächlichsten Charakteristika der Licht- und Wärme-Wellen aufweist.

Wie bereits bemerkt, schliesst sich diese Theorie eng an die in der erwähnten Abhandlung niedergelegten allgemeinen Voraussetzungen an; nur in einem Punkte ist es erforderlich, eine Ergänzung derselben eintreten zu lassen, und zwar in der Annahme von der Kugelgestalt der chemischen Atome, welche Voraussetzung lediglich deshalb gemacht worden war, weil sich aus ihr die Theorie der Rotationsbewegung am einfachsten entwickeln liess. Ob nun die die Kreisbewegung vollziehenden Substanzeinheiten eines rotirenden chemischen Atoms derartig gelagert sind, dass sie eine Kugel oder irgend eine andere Körperform bilden, ist für die allgemeine Theorie der Entstehung hin- und wegwirkender Kräfte nebensächlich; legt man den chemischen Atomen eine andere Körperform als die einer Kugel zu Grunde, so könnte hieraus nur eine Aenderung in dem Grössenverhältnis der zur Erscheinung gelangenden Kräfte resultiren. Es liegt nun nicht die geringste Veranlassung vor, den chemischen Atomen gerade die Gestalt einer Kugel zuzudiktiren; im Gegentheil lassen die grossen Verschiedenheiten, welche die chemischen Atome in ihren physikalischen Eigen-

schaften aufweisen, die Annahme gerechtfertigt erscheinen, dass die einzelnen Gattungen chemischer Atome sich nicht nur hinsichtlich ihrer Grösse, sondern auch in Bezug auf ihre Gestalt unterscheiden und daher von der Form einer Kugel mehr oder weniger abweichen. Weiterhin sind wir durch Nichts an die allgemein übliche, jedoch rein willkürliche Annahme gebunden, dass die Atome, wie bei einer Kugel, von einer gekrümmten Oberfläche begrenzt sind; wenn wir uns einer gegentheiligen Annahme zuwenden, so haben wir dazu die gleiche Berechtigung. Die früheren Voraussetzungen über die Beschaffenheit der chemischen Atome seien daher in folgenden zwei Punkten ergänzt: alle chemischen Atome sind von ebenen, unter verschiedenen Winkeln zusammenstossenden Flächen begrenzt und bilden regelmässige Körper, welche von der Form einer Kugel mehr oder weniger abweichen.

Die Wichtigkeit dieses Satzes für die aufzustellende Theorie leuchtet ein; mit Hilfe der Hypothese von der eckigen Atomgestalt lässt sich die Entstehung von Wellen zunächst experimentell nachweisen. Taucht man eine Kugel in einem leichtflüssigen Medium, etwa in Wasser, vollständig unter und lässt dieselbe dort um eine durch ihren Mittelpunkt gelegte Axe rotiren, so findet eine Erregung von Wellen nicht statt, weil alle Theile der Kugel sich in ihrer fortschreitenden Bewegung unmittelbar folgen. Ersetzt man dagegen die Kugel durch einen beliebigen, von ebenen Flächen begrenzten Körper, so erleidet infolge der Rotationsbewegung die Berührungsfläche zwischen dem Körper und den Wassertheilchen eine fortwährende Störung; dieselben werden durch die vorspringenden Ecken aus ihrer Lage verdrängt, um nach deren Durchgang wieder an ihren Ausgangspunkt zurückzukehren. Die Bewegungen der Wassertheilchen bestehen demnach in Schwingungen, welche, wie das Experiment ergibt, sich allmählich auch auf entferntere, den rotirenden Körper nicht unmittelbar berührende Wassertheilchen derart übertragen, dass die Richtung der Schwingungen mit ihrer Fortpflanzungsrichtung einen rechten Winkel bildet. Die Rotation des eckigen Körpers in dem Medium des Wassers bewirkt demnach die Entstehung einer transversalen Wellenbewegung. Aus diesem Experiment können wir schliessen, dass auch in dem Medium des Aethers transversale Wellen entstehen, sobald in demselben eines unserer als eckige, starre Körper vorausgesetzten Atome eine rotirende Bewegung vollzieht. Mit der Ersetzung des Wassers durch das leichtflüssigere Medium des Aethers und eines grossen wahrnehmbaren Körpers durch einen analogen Körper von kleineren Dimensionen kann sich nur die Grösse und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen ändern; das Princip der Wellenerregung ist jedoch in beiden Fällen das gleiche, folglich muss auch von dem in dem Medium

des Aethers rotirenden Atom eine transversale Wellenbewegung ihren Ausgangspunkt nehmen.

Neben diesem experimentellen Nachweis lässt sich die Wellenerregung des Aethers aus unseren Voraussetzungen auch noch in anderer Weise ableiten. Da die Grösse und Richtung der in dem Aether wirksamen Kräfte allenthalben gleichmässig vertheilt ist und da ferner die Gesammtheit des Aethers den Raum ruhend erfüllt, so können wir den Aether als ein System von Aetherpunkten betrachten, von welchen jeder einzelne, solange nicht äussere Störungen den Gleichgewichtszustand alteriren, eine unveränderliche Gleichgewichtslage im Raum inne hat, welche dadurch bedingt wird, dass auf jeden Aetherpunkt von allen Seiten eine gleiche Anzahl Aetheratome mit gleichen Kräften angreift. Die Grösse des Aethervolumens dividirt durch die Summe aller Aetherpunkte gibt den Raum an, welchen diejenigen Aetheratome einnehmen, die in ihrer gegeneinander gerichteten Bewegung zusammen einen Aetherpunkt constituiren. Dividend und Divisor sind überall gleiche, zu allen Zeiten und in allen Räumen unveränderliche Grössen; folglich hat auch der Quotient, der von einem Aetherpunkt occupirte Raum, für jeden einzelnen derselben nicht nur einen gleichen, sondern auch einen unveränderlichen Werth, selbst dann, wenn Störungen eintreten, welche ja immer nur in durch die Bewegungen der chemischen Atome veranlassten Aenderungen der von dem Aether eingenommenen Räume, niemals jedoch in einer effectiven Vergrösserung oder Verkleinerung derselben bestehen können. Wenn wir nun die Lage eines jeden Aetherpunktes in die Mitte des von ihm eingenommenen Raumes verlegen, so folgt aus der Gleichheit und Unveränderlichkeit aller einzelnen Räume, dass sämmtliche Aetherpunkte in gleichmässigen Abständen voneinander sich nicht nur befinden, sondern auch sich erhalten müssen, und dass demnach alle durch die Bewegungen der chemischen Atome veranlassten Störungen stets nur eine räumliche Veränderung der Aetherpunkte, niemals jedoch eine Vergrösserung oder Verkleinerung ihrer Abstände bewirken können. Hiernach sind wir berechtigt, den Aether als ein homogenes System von Punkten, welche durch zwischen ihnen thätige Kräfte in unveränderlichen Abständen voneinander gehalten werden, diese Kräfte selbst aber als eine Eigenschaft des Aethers zu behandeln, welche mit der Elasticität der uns bekannten Medien (Luft, Wasser) vergleichbar ist.

In dem dergestalt definirten Punktsystem lassen wir nun ein chemisches Atom rotiren, beschränken jedoch des leichteren Verständnisses halber unsere Untersuchung auf diejenigen Wirkungen, welche eine aus dem Atom herausgeschnittene, auf der Rotationsaxe senkrecht

stehende Scheibe von minimaler Dicke auf die umgebenden Aetherpunkte ausübt. Da das Atom von ebenen Flächen begrenzt ist, stellt diese Scheibe ein von geraden Seiten gebildetes, regelmässiges Vieleck dar, dessen einbeschriebener Kreis mit den Halbirungspunkten der Seiten zusammenfällt, während die über den Kreis hervorragenden Theile des Vielecks vorspringende Ecken bilden, welche bei voranschreitender Rotationsbewegung der Scheibe den äthererfüllten Raum durchschreiten, daher Aetherpunkte aus ihrer Ruhelage verdrängen müssen. Die hierzu erforderliche Kraft vermindert offenbar diejenige Kraft, welche die voranschreitende Bewegung der Ecken, d. h. die Rotationsbewegung der Scheibe bewirkt. Es findet demnach ein Uebergang von Tangentialkraft von jeder vorspringenden Ecke auf die zu verdrängenden Aetherpunkte statt, woraus folgt, dass letztere, um dem Durchgang einer dieser Ecken Raum zu gewähren, eine in die Richtung der Tangente fallende Bewegung vollziehen. — Die voranschreitende Bewegung der vorspringenden Ecken hat jedoch anderseits zur Folge, dass die von ihnen innegehabten Räume fortwährend wieder verlassen werden, und dass demnach hinter dem Durchgang einer Ecke ein absolut leerer Raum entsteht, welchen der Aether, beziehentlich die für denselben substituirten Aetherpunkte auszufüllen sich bestreben. Die in der Richtung der Tangente fortgestossenen Aetherpunkte kehren daher nach dem Vorbeigang einer Ecke in den von derselben verlassenen Raum, aus welchem sie selbst vorher verdrängt worden waren, wieder zurück; sie befinden sich daher nach dem vollständigen Durchgang der Ecke wieder an ihrem Ausgangspunkt und haben demnach eine Bewegung vollzogen, welche eine in die Richtung der Tangente fallende Schwingung darstellt.

Wir können uns nun sämmtliche, in der Ebene der Scheibe liegenden Aetherpunkte als ein homogenes, isotropes System geradliniger Reihen von Punkten vorstellen, welche radienförmig nach dem Mittelpunkt der Scheibe convergiren. Jede einzelne Reihe berührt alsdann mit ihrem Endpunkt die Scheibe, und dieser Endpunkt ist es zunächst, welcher durch die Rotationsbewegung der Scheibe in Schwingungen versetzt wird. Letztere bedingen jedoch eine Aenderung des Abstandes des Endpunktes von dem zweiten Punkt der Reihe, oder vielmehr, da eine solche Aenderung des Abstandes nicht eintreten kann, bewirken sie, dass der zweite, dritte und alle folgenden Punkte der Reihe nacheinander gleiche Schwingungen vollziehen. In jeder Punktreihe entsteht somit eine Wellenbewegung, welche, da die Richtung der Schwingungen mit ihrer Fortpflanzungsrichtung einen rechten Winkel bildet, transversal ist. Ein rotirendes chemisches Atom, welches wir uns aus einer Anzahl rotirender eckiger Scheiben zusammengesetzt

vorstellen können, wird demnach an allen Punkten seiner Oberfläche transversale Wellen emittiren, welche jedoch nicht nur in einer senkrecht auf der Rotationsaxe stehenden Ebene, sondern zugleich auch seitlich sich ausbreiten werden, wie aus den mathematischen Gesetzen der Wellen-Erregung und -Ausbreitung bekannt ist.

Aus der dargelegten Entstehung der Wellenbewegung lassen sich verschiedene Eigenthümlichkeiten ableiten, welche die von eckigen Atomen erregten Wellen besitzen müssen. Wir beschränken unsere Betrachtung zunächst wieder auf diejenigen Wellen, welche von einer einzelnen dünnen Scheibe eines Atoms bei constanter Rotationsgeschwindigkeit nach einer bestimmten Richtung emittirt werden, und können dann mit s die Strecke bezeichnen, durch welche die Wellenbewegung in der Zeit einer Secunde sich fortpflanzt. Andrerseits können wir diese Strecke durch die Anzahl ε und die Länge λ der auf ihr vorhandenen Wellen messen und demnach

$$s = \varepsilon \cdot \lambda$$

setzen. Von diesen Grössen besitzt s, sofern wir unseren weiteren Untersuchungen nur den im freien Weltraum vorhandenen Aether zu Grunde legen, einen unveränderlichen Werth, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer jeden transversalen Wellenbewegung bekanntlich nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Mediums abhängt. Dagegen wird der Werth von ε, welcher die Anzahl der in der Zeit einer Secunde an dem Anfangspunkt der Strecke s vorbeigehenden Ecken darstellt, durch die in jedem Falle unveränderliche Anzahl e der vorspringenden Ecken der in Rede stehenden Scheibe und die Zahl u der auf die Zeit einer Secunde entfallenden Umdrehungen der Scheibe bedingt. Es ist demnach

$$\varepsilon = e \cdot u;$$

setzen wir diesen Werth in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$\lambda = \frac{s}{e \cdot u}.$$

Wie bereits bemerkt, ist von diesen Grössen nur λ und u veränderlich woraus sich ergibt, dass die Länge der emittirten Wellen umgekehrt proportional der Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe ist.

Nun können wir uns ein Atom als aus einer grossen Anzahl solcher Scheiben zusammengesetzt vorstellen, dergestalt etwa, dass der Durchmesser derselben von der Mitte der Rotationsaxe nach den beiden Polen hin gleichmässig abnimmt. Ueber die relativen Formen der einzelnen Scheiben lassen sich dann weiter zwei verschiedene Annahmen machen, welche beide unserer Voraussetzung entsprechen, dass die Atome von ebenen Flächen begrenzte Körper sind:

I. Alle einzelnen Scheiben sind regelmässige Vielecke von gleichen Winkeln und gleicher Seitenzahl; die Länge der einzelnen Seiten nimmt alsdann von Scheibe zu Scheibe ab, je kleiner der Umfang derselben wird. Dieser Fall ist gegeben, wenn die das Atom begrenzenden Flächen congruente Dreiecke bilden, deren Spitzen an den beiden Polen liegen, während die den Spitzen gegenüberliegenden Seiten zugleich die Aequatorlinie des Atoms bilden.

II. Alle einzelnen Scheiben sind regelmässige Vielecke von untereinander gleicher Seitenlänge und unterscheiden sich voneinander dadurch, dass die Zahl der Seiten sowohl wie der vorspringenden Ecken abnimmt, je kleiner die Scheiben werden, d. h. je näher sie an den Polen des Atoms liegen; in dem gleichen Maasse werden die von je zwei Seiten eingeschlossenen Winkel spitzer, während zugleich die Entfernungen sich vergrössern, um welche die einzelnen Ecken über den eingeschriebenen Kreis hervorragen. Dieser Fall ist dann gegeben, wenn ein Atom von geometrisch gleichen Vielecken begrenzt ist, deren Durchmesser wesentlich kleiner als der Halbmesser des Atoms ist.

Indem wir nun alle zwischen beiden extremen Fällen möglichen Uebergangsformationen unberücksichtigt lassen, handelt es sich nun darum festzustellen, welche von beiden Arten der Oberflächenbildung wir den chemischen Atomen zuerkennen sollen, damit sich eine mit den beobachteten Thatsachen harmonirende Theorie der Wellenemission construiren lässt. Stellen wir uns zunächst ein Atom von der Oberflächenbildung des Falles I vor und zerlegen dasselbe in unendlich dünne, senkrecht auf der Rotationsaxe stehende Scheiben, so haben zu ein und derselben Zeit die Grössen e und u bei sämmtlichen Scheiben gleichen Werth. Die von denselben emittirten Wellen besitzen demnach ausnahmslos gleiche Längen $\frac{s}{eu}$; mithin kann ein Atom von der Oberflächenbildung des Falles I während ein und derselben Zeit nur Wellen von einer einzigen Länge emittiren. Die Verschiedenheit der von einer homogenen Materie gleichzeitig emittirten Wellen würde sich daher nur durch die weitere Annahme, dass die Rotationsgeschwindigkeiten der einzelnen Atome in weiten Grenzen voneinander differiren, erklären lassen.

Einer solchen Hilfshypothese bedarf es indessen nicht, wenn wir den Atomen die Oberflächenbildung des Falles II beilegen und dürfte daher dieser Voraussetzung der Vorzug einzuräumen sein. Wir denken uns ein derartig gebautes Atom wieder als eine Zusammensetzung einzelner Scheiben und bezeichnen dieselben in der Reihenfolge von der Mitte der Rotationsaxe nach den Polen zu mit S, $S_{,}$, $S_{,,}$ etc; die Seiten aller dieser Scheiben sind in Bezug auf ihre Länge unter-

einander gleich, während die Anzahl der Ecken bei S durch den Werth e, bei $S_,$ durch $e-1$, bei $S_{,,}$ durch $e-2$ etc. wiedergegeben ist. Für die emittirten Wellen lassen sich dann folgende Relationen aufstellen.

I. Bei der constanten Umdrehungsgeschwindigkeit u beträgt die Länge der von der Scheibe S emittirten Wellen $\frac{s}{eu}$ bei der Scheibe $S_,$ dagegen $\frac{s}{(e-1)u}$, bei $S_{,,}$ $\frac{s}{(e-2)u}$ etc., woraus sich ergibt, dass jedes Atom gleichzeitig Wellen von verschiedenen Längen emittirt.

II. Vermehrt man die auf die Zeit einer Secunde entfallenden Umdrehungen auf eine derartig bewerthete Zahl $u_,$, dass

$$u_,(e-1) = u \cdot e$$

so werden infolge der Zunahme der Umdrehungsgeschwindigkeit jetzt von der Scheibe $S_,$ Wellen kürzerer Länge, welche durch den Quotienten $\frac{s}{(e-1)u}$ definirt ist, emittirt. Da aber $\frac{s}{(e-1)u_,} = \frac{s}{e \cdot u}$ ist, so ergibt sich, dass die Wellen von der durch diesen Quotienten ausgedrückten Länge, welche bei der Geschwindigkeit u von der Scheibe S emittirt wurden, jetzt von der Scheibe $S_,$ erregt werden. In dem gleichen Verhältnis werden auch die von den Scheiben $S_{,,}$, $S_{,,,}$ etc. ausgehenden Wellen kürzer, so dass die gleichen Wellen, welche bei der Geschwindigkeit u von den Scheiben S, $S_,$, $S_{,,}$ etc. emittirt werden, bei der Geschwindigkeit $u_,$ von den Scheiben $S_,$, $S_{,,}$, $S_{,,,}$ etc. ihren Ausgangspunkt nehmen. Dagegen werden bei der Geschwindigkeit $u_,$ ausserdem von der Scheibe S Wellen von der Länge $\frac{s}{e \cdot u_,}$ emittirt, und da

$$\frac{s}{e \cdot u_,} < \frac{s}{e \cdot u}$$

ist, so gelangen wir zu dem Resultat, dass infolge der Vermehrung der Rotationsgeschwindigkeit eines Atoms zu den vorher emittirten noch neue Wellen von kleinerer Länge hinzutreten.

III. Weiter lässt sich nachweisen, dass bei einer Vermehrung der Rotationsgeschwindigkeit eine Zunahme der Kraft eintritt, welche mit Wellen gleicher Länge sich fortpflanzt[1]). Für diese Untersuchung

1) Da die mit jeder einzelnen Welle sich fortpflanzende Kraft gewöhnlich als die Intensität einer Welle bezeichnet wird, so liesse sich der obige Satz auch so formuliren, dass bei Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit die Intensität der Wellen gleicher Länge sich vermehrt. Nachdem ich jedoch in meinen Voraussetzungen den Begriff der Intensität dahin definirt habe, dass sie die Häufigkeit angibt, mit welcher momentane Kräfte sich wiederholen, um dadurch eine constante Kraft zu consti-

würden die gleich grossen Wellen $\frac{s}{eu}$ und $\frac{s}{(e-1)u_1}$ in Betracht kommen, deren motorische Kraft nach der dargestellten Entstehung der Wellenbewegung einerseits von der fortschreitenden Bewegungsgeschwindigkeit der Ecken der Scheiben S und S_1, andrerseits von der Grösse der zur Bewegungsrichtung senkrechten Fläche der Ecken abhängt. Die fortschreitenden Bewegungsgeschwindigkeiten der Scheiben S und S_1 werden gemessen durch die in der Zeiteinheit zurückgelegten Wegestrecken; dieselbe beträgt bei der Scheibe S für die Zeit einer Secunde $u \cdot 2r\pi$, bei der Scheibe S_1 dagegen $u_1 \cdot 2r_1\pi$, wenn r und r_1 die Radien der von den Ecken der Scheiben S und S_1 durchlaufenen Kreisbahnen bezeichnen. Statt einer Secunde können wir als Zeiteinheit auch diejenige Zeit zu Grunde legen, welche während der Entstehung einer einzigen Wellenlänge verfliesst; denn da beide Scheiben in einer Secunde eine gleiche Anzahl Wellen emittiren, müssen auch die zur Entstehung einer Wellenlänge erforderlichen Zeiträume einander gleich sein. Dieselben betragen

$$\frac{1}{eu} = \frac{1}{(e-1)u_1} = \frac{1}{f} \text{ Secunden,}$$

während welcher Zeit von den Ecken der Scheibe S die Wegestrecke $\frac{2r\pi}{e}$, von denen der Scheibe S_1 die Strecke $\frac{2r_1\pi}{e-1}$ zurückgelegt wird. Beide Ausdrücke unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Grösse dadurch voneinander, dass die Werthe von r und e um sehr kleine Bruchtheile grösser als r_1 und $e-1$ sind; die Quotienten können daher ohne nennenswerthen Fehler als gleichwerthig angesehen werden, so dass wir

$$\frac{2r\pi}{e} = \frac{2r_1\pi}{e-1}$$

setzen können. Die von den Ecken der Scheiben S und S_1 bei den Umdrehungsgeschwindigkeiten u und u_1 in der Zeiteinheit zurückgelegten Wegestrecken sind daher gleich; die Ecken selbst besitzen gleiche fortschreitende Bewegungsgeschwindigkeiten.

Ein Unterschied in der auf die Wellen $\frac{s}{eu}$ und $\frac{s}{(e-1)u_1}$, sich übertragenden Kraft kann daher nur von der Grösse der zur Bewegungs-

---

tuiren, und in Anbetracht, dass die Licht- und Wärme-Wellen zweifelsohne constante Kräfte bilden, scheint es mir bedenklich, den Begriff der Intensität nunmehr auf die Grösse der mit einer Welle sich übertragenden Kraft anzuwenden, während nach den Voraussetzungen die Anzahl der in der Zeiteinheit durch einen Punkt gehenden Wellen damit bezeichnet werden müsste.

richtung senkrechten Fläche der Ecken abhängen, welche durch die Producte $d(U-E)$ und $d(U_1-E_1)$ dargestellt wird, wenn bei den Scheiben S und S_1 die Radien der einbeschriebenen Kreise mit E und E_1, die Radien der umbeschriebenen Kreise mit U und U_1 und die in beiden Fällen gleiche Dicke der Scheiben mit d bezeichnet werden. Durch eine geometrische Construction lässt sich nun leicht nachweisen, dass bei gleichseitigen Vielecken die Differenzen der Radien des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Kreises um so kleiner werden, je mehr die Peripherien der Kreise mit dem Umfang der Vielecke zusammenfallen, d. h. je grösser die Seitenzahl der Vielecke wird. Hiernach ist

$$d(U_1-E_1) > d(U-E),$$

woraus folgt, dass in jeder Zeiteinheit zu ihrer fortschreitenden Bewegung die Ecken der Scheibe S_1 eine ihrer grösseren Fläche entsprechende grössere Menge von Aetheratomen verdrängen müssen, als die Ecken der Scheibe S. In der Zeiteinheit von $\frac{1}{f}$ Secunde wird demnach von den Ecken der Scheibe S_1 eine grössere Kraft auf den Aether übergehen, und, da in der gewählten Zeiteinheit von beiden Scheiben je eine vollständige Welle emittirt wird, so folgt, dass die Wellen $\frac{s}{(e-1)u_1}$ der Scheibe S_1 eine grössere motorische Kraft enthalten als die gleichgrossen Wellen $\frac{s}{eu}$. Damit ist dann allgemein bewiesen, dass bei ein und demselben Atom diejenigen Wellen gleicher Länge eine grössere motorische Kraft besitzen, welche bei einer grösseren Rotationsgeschwindigkeit emittirt werden.

Wir können nun eine Beziehung zwischen der Rotationsgeschwindigkeit eines Atoms und der Temperatur insofern herstellen, als wir die Temperatur einer Materie als abhängig von der kinetischen Energie der sie constituirenden Atome betrachten. Wenn hiernach eine gleichmässige Rotationsgeschwindigkeit mit Constantheit, eine Vermehrung der Rotationsgeschwindigkeit mit einer Steigerung der Temperatur als identisch angenommen wird, so dürfte ein Einwand gegen diesen in so allgemeiner Form ausgesprochenen Satz wohl kaum erhoben werden. Damit sind wir im Stande die vorhin für constante oder veränderte Rotationsgeschwindigkeit eines Atoms festgestellten Gesetze auf die Temperatur einer Materie zu beziehen und gelangen damit zu folgenden Resultaten:

„Von jeder Materie werden bei jeder beliebigen Temperatur constant transversale Aetherwellen von sehr verschiedenen Längen

emittirt; jedem Temperaturzustand entspricht eine ganz bestimmte Zusammensetzung der Wellen in Bezug auf ihre Zahl, Länge und motorische Kraft; wird die Temperatur erhöht, so treten zu den bereits vorhandenen Wellen noch solche von kürzerer Länge, während die mit Wellen gleicher Länge sich übertragende Kraft zugleich zunimmt."

Die Ergebnisse der Theorie stimmen demnach vollständig mit den auf experimentellem Wege festgestellten Thatsachen überein.

Es könnte noch zur Unterstützung der Behauptung, dass bei einer bestimmten Temperatur nur ganz genau definirte Wellen emittirt werden können, hinzugefügt werden, dass die Lage der Rotationsaxe bei jedem Atom als unveränderlich angesehen werden kann. Wir hatten angenommen, dass die Atome mehr oder weniger von der Gestalt einer Kugel abweichen; da nun bei der Rotationsbewegung fortwährend ein passiver Widerstand des Aethers überwunden werden muss, so wird die Lage der Rotationsaxe zunächst eine derartige sein müssen, dass dieser Widerstand von beiden Polhälften gleichmässig überwunden wird. Ferner besitzt jeder sich bewegende Körper die Tendenz, seine Bewegungsgeschwindigkeit unverändert zu erhalten, mithin muss auch ein in rotirender Bewegung befindliches Atom das Bestreben haben, um eine derartig gelegte Axe zu rotiren, dass der Widerstand des Aethers auf ein möglichst geringes Maass reducirt wird; bekanntlich ist dies dann der Fall, wenn die einzelnen Substanzeinheiten sich in ihrer fortschreitenden Bewegung möglichst unmittelbar (d. h. mit möglichst geringer Unterbrechung durch äthererfüllte Räume) einander folgen. Beiden Erfordernissen kann jedoch bei regelmässigen, nicht kugelförmigen Körpern immer nur eine einzige Axenlage genügen; die Rotationsaxe der chemischen Atome kann daher als eine mathematische Linie angesehen werden, welche zu den einzelnen Substanzeinheiten eine stets unveränderliche Lage inne hat, während alle Störungen sich sofort dadurch wieder ausgleichen müssen, dass infolge des Widerstandes des Aethers die normale Axenlage wieder hergestellt wird.

Zum Schluss sei es mir noch gestattet, die vorstehende Theorie der Wellenemission mit meiner früheren, die Anziehung der Materie erklärenden Theorie in Verbindung zu bringen. Die Wellenemission vermindert offenbar die motorische Tangentialkraft der Atome; die Rotationsgeschwindigkeit derselben kann daher nur dann constant sein, wenn dem Verlust an Kraft ein gleichwerthiger Zuwachs an Kraft gegenüber steht. Bekanntlich befindet sich eine Materie dann in thermischem Gleichgewichtszustand, wenn die Wellenemission durch eine gleich grosse Wellenabsorption wieder ersetzt wird; hiernach müsste,

damit die Rotationsgeschwindigkeit eines Atoms constant ist, die Bedingung

$$E = A$$

erfüllt sein, wobei E die Emission, A die Absorption von Tangentialkraft vermittelst der Wellenbewegung bezeichnet. Damit ist jedoch noch keine genaue Gleichung für die Bedingungen der Constantheit der Rotationsgeschwindigkeit eines Atoms aufgestellt; denn wie die frühere Theorie der Rotationsbewegung ergeben hat, erleidet infolge der Vereinigung von Centripetalkraft und Tangentialkraft die Rotationsgeschwindigkeit eines Atoms eine constante Beschleunigung, welche mit B bezeichnet in die obige Gleichung mit eingestellt werden muss. Andrerseits war bereits damals darauf hingewiesen worden, dass die Rotationsbewegung im äthererfüllten Raum nothwendigerweise eine Reibung zwischen dem Atom und den aufprallenden Aetheratomen zur Folge haben müsse. Dass diese Reibung vollständig unabhängig von der Wellenemission ist, erhellt daraus, dass die Entstehung der letzteren lediglich in der senkrecht über den einbeschriebenen Kreis hinausragenden Fläche begründet ist. Die Oberfläche einer jeden Atomscheibe, beziehentlich jeder einzelnen Ecke derselben lässt sich jedoch in zwei Flächen zerlegen, von welchen die eine mit der Bewegungsrichtung, d. h. mit der Peripherie des einbeschriebenen Kreises zusammenfällt und daher bei der Scheibe S durch den Quotienten

$$d \cdot \frac{2E \cdot \pi}{e}$$

dargestellt ist. Die andere Fläche dagegen bildet mit der Bewegungsrichtung einen rechten Winkel und wird durch die Grösse $d(U - E)$ wiedergegeben. Bei der Entwicklung der Emissionstheorie haben wir nun die beweglichen Aetheratome durch ruhende Aetherpunkte ersetzt und sodann die Entstehung der Wellen von der Bewegung der Fläche $d(U - E)$ abhängig gemacht. Bei jeder Ecke findet jedoch auch eine Berührung zwischen den ruhenden Aetherpunkten und der im Raum voranschreitenden Fläche

$$d \cdot \frac{2E\pi}{e}$$

statt, infolge deren Kraft von dem rotirenden Atom auf die Aetherpunkte übergeht; es ist dies derselbe Process, welchen man gewöhnlich als Reibung bezeichnet. Nennen wir R den für das Atom hieraus resultirenden Verlust an Tangentialkraft, so ist klar, dass auch diese Grösse bei einer Gleichung berücksichtigt werden muss, welche die Bedingungen einer constanten Rotationsgeschwindigkeit des Atoms darstellen soll. Nach den obigen Ausführungen wirken beschleunigend

auf dieselbe die Factoren A und B, verlangsamend die Factoren E und R, mithin wird eine gleichmässige Bewegungsgeschwindigkeit bestehen, wenn

$$A + B = E + R$$

ist. Diese Gleichung schliesst durchaus keine unmöglichen Postulate in sich ein; denn die Gleichheit der Grössen A und E steht nicht in Frage, während B lediglich von der Grösse der Tangentialkraft, R dagegen von der durch diese Tangentialkraft erzeugten Bewegungsgeschwindigkeit abhängt. Ist daher die Masse eines Atoms sehr gross (schwer), so ist die Bewegungsgeschwindigkeit verhältnismässig klein; R wird in diesem Falle verhältnismässig klein in Vergleichung mit B sein. Umgekehrt wird bei einer sehr kleinen (leichten) Masse der Werth von R verhältnismässig gross gegen B ausfallen. Wie man sieht, sind für die Bedingungen, welche zu einer Gleichheit der Grössen B und R erforderlich sind, weite Grenzen gegeben, und steht dadurch die Möglichkeit, dass B und R sich thatsächlich das Gleichgewicht halten, ausser Frage, namentlich wenn grosse Mengen verschiedener Atome (ganze Himmelskörper) in Betracht gezogen werden.

Damit ist bewiesen, soweit dies in dem Rahmen einer kurzen und allgemeinen Betrachtung angeht, dass eine constante Bewegungsgeschwindigkeit rotirender Atome nicht nur möglich ist, sondern auch soviel Wahrscheinlichkeit besitzt, dass die Berechtigung dieser Voraussetzung, als eines Fundaments, auf welchem eine physikalische Theorie aufgebaut werden darf, nicht a limine abgewiesen werden kann. Berücksichtigt man ferner, dass, wie in den Schlussbemerkungen meiner Voraussetzungen ausgeführt wurde, für jeden Versuch, die physikalischen Erscheinungen auf dynamischer Grundlage zu erklären, nur zwei Atombewegungen, nämlich die fortschreitende und die fortschreitend-rotirende, als Ausgangspunkte genommen werden können, so muss nochmals betont werden, dass die rotirende Atombewegung eine Voraussetzung ist, von welcher noch grosse Resultate für die physikalische Philosophie erwartet werden dürfen.

Die in meiner früheren Abhandlung bereits aufgeworfene Behauptung, dass die constante Wärmeemission der Sonne ihre Erklärung in dem durch die Schwerkraft bedingten dauernden Zufluss von Kraft findet, lässt sich an der Hand der Zustandsgleichung

$$A + B = E + R$$

übersichtlicher motiviren. Setzen wir nämlich in dieser Gleichung $R < B$, so muss

$$E > A$$

sein, mithin ohne Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit, d. h. ohne

Verminderung der kinetischen Energie der Atome eine constante Wärmeemission stattfinden können. Der Ursprung der Kraft B, welche im Stande ist, dem Kraftverlust sowohl von R wie von $E - A$ das Gleichgewicht zu halten, ist jedoch, wie damals bereits dargelegt wurde, in letzter Instanz in dem durch die Schwerkraft herbeigeführten constanten Kraftzufluss zu suchen, mithin ist die Schwerkraft die Ursache der Erhaltung der Sonnenwärme. Die Annahme dagegen, dass für die Sonnenatome $R < B$ ist, lässt sich, ganz abgesehen von der bereits früher hervorgehobenen Möglichkeit einer verminderten Fortpflanzungsfähigkeit der durch Reibung auf den Aether übergehenden Kraft, schon dadurch rechtfertigen, dass die Sonne zum weitaus überwiegenden Theil aus schweren Stoffen, beziehentlich aus Atomen, deren Substanzeinheiten von grosser Masse sind, zu bestehen scheint; die Annahme $R < B$ ist dann für die überwiegende Mehrzahl der Sonnenatome aus dem Verhältnis von bewegender Tangentialkraft und erzeugter Rotationsgeschwindigkeit mathematisch nachweisbar.

Man erkennt zugleich, dass die aus meinen Voraussetzungen sich ergebende Umwandlung der nach der Sonne hinwirkenden Schwerkraft in Wärme in ausreichender Weise dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft genügt. Jeder Versuch, die Schwerkraft auf dynamischer Grundlage zu erklären, wird eitles Bemühen bleiben, wenn nicht, um dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft zu genügen, zugleich nachgewiesen wird, wo die von uns als Anziehung wahrgenommene Kraft schliesslich verbleibt. Nach meinen Voraussetzungen kann Kraft nur als Bewegung von Materie existiren, folglich kann auch aus der Schwerkraft nur Bewegung von Materie, als welche ich transversale Aetherwellen nachgewiesen habe, hervorgehen. Nach allen bekannten Thatsachen ist jedoch die Wärmeemission der Sonne die einzige Quelle, aus welcher eine Verminderung der Energie der Sonnenatome abgeleitet werden kann; die Erhaltung der Sonnenwärme durch die Schwerkraft ist daher eine so natürliche Ideenverbindung, dass ihr auf die Dauer wohl kaum widersprochen werden dürfte.

Protokoll der Wochenversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 29. Mai 1888.

Vorsitzender: Dr. G. Goldschmiedt.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Prof. Dr. L. Pfaundler hält den angekündigten Vortrag: „Ueber einen Apparat zur Demonstration der Fundamentalversuche der Magnetinduction und Elektrodynamik".

Wien, 30. October 1888.

Der Secretär.

Eingesendete Bücher.

Weinstein Dr. B., Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen. 2. Bd. Berlin bei J. Springer. 1888. 552 S. 14 Mk. Dieser zweite Band enthält die folgenden Abschnitte: 1. Einheiten und Dimensionen. 2. Das Rechnen mit den Einheiten. 3. Die praktischen Einheitsbeträge. 4. Principien der Längenmessung. 5. Ausführung einfacher Längenmessungen. 6. Abbildung vermittelst optischer Instrumente. 7. Längenmessungen auf Apparaten mit optischen Einrichtungen. 8. Die geometrisch-mechanische Einrichtung von Längenmessungen. 9. Einfluss elastischer Deformationen auf die Länge. 10. Thermische Einrichtungen. 11. Optische Einrichtungen. 12. Theilungsfehler von Maassstäben. 13. Schraubenfehler. 14. Pointirungs- und Schätzungsfehler. 15. Wägungen als Massenbestimmungen. 16. Gewichtssätze. 17. Theorie der Wage. 18. Massenbestimmung durch Wägung. 19. Wägungen in der Luft. 20. Volumen- und Dichtigkeitsbestimmungen.

Mascart E., Handbuch der statischen Elektricität. Deutsche Bearbeitung von Dr. J. Wallentin. 2. Bd. 2. Abth. Wien bei A. Pichler's Wittwe. 1887. 7 Mk. Mit diesem Hefte ist die deutsche Bearbeitung des trefflichen Werkes vollständig erschienen; es enthält die Kapitel über: 1. Contactelektricität. 2. Spannungsreihen. 3. Säulen. 4. Thermoelektricität. 5. Gesetze der Fortpflanzung der Elektricität. 6. Pyroelektricität. 7. Mechanische Wirkungen als Quellen der Elektricität. 8. Chemische Erscheinungen. 9. Physiologische Elektricität. 10. Elektrocapillare Erscheinungen. 11. Atmosphärische Elektricität.

Tait P. G., Die Eigenschaften der Materie. Deutsch von G. Siebert. Wien bei A. Pichler's Wittwe. 1888. 322 S. 7 Mk. In sehr schöner Darstellung werden in diesem Werke die neuesten Ansichten über die Structur der Materie, über Raum und Zeit, Undurchdringlichkeit, Theilbarkeit, Trägheit, Gravitation, Elasticität und Zusammendrückbarkeit der Körper wiedergegeben nebst einem Anhange über das Wesen der Materie und Atome.

Urbanitzky A. v., Die Elektricität des Himmels und der Erde. Heft 16—20. Wien bei Hartleben. 1888. Es liegt nun der Schluss des ganzen Werkes vor, enthaltend: VIII. Erdmagnetismus und Erdstrom und IX. Das Polarlicht.

Neumayer Dr. G., Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Lieferung 1. Berlin bei R. Oppenheim. 1888. Von diesem allgemein bekannten Werke erscheint nunmehr die zweite, und zwar wesentlich vermehrte, Auflage. Dieselbe zerfällt in zwei nach Materien getrennte Bände, wovon der erste hauptsächlich die Vermessungsmethoden zu Land und See, Geologie, Meteorologie, Astronomie und Hydrographie enthält, der zweite dagegen allgemeine Geographie, Heilkunde, Landwirthschaft, Botanik, Linguistik, Zoologie und Photographie.

Schellwein R., Optische Häresien, erste Folge, und das Gesetz der Polarität. 108 S. Halle bei C. E. M. Pfeffer. 1888. 2 Mk. 50.

Register.

Die Zahlenangaben bedeuten Seitenzahlen.

Adler Dr. **Gottlieb**, Ueber die Energie und die Gleichgewichtsverhältnisse magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper, 733.

Ahrendt A., Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Bewegungsgeschwindigkeit von Flüssigkeitswellen, 318.

Astigmatismus, über den normalen irregulären, von Sigmund Exner, 495.

Aubel Edmond van, Ueber den Einfluss des Magnetismus und der Wärme auf den elektrischen Widerstand des Wismuths und dessen Legirungen mit Blei und Zinn, 137.

Bauer K. L., Zur Polbestimmung der Influenzmaschine, 8.

Bahn eines freien Theilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe, von F. Roth (Schluss), 65.

Brechungsexponenten, über die Brechungsexponenten der Metalle, von A. Kundt, 357.

Brücke E., Ueber die optischen Eigenschaften des Tabaschir, 434.

Bücher, eingesendete, 135. 400. 536. 796.

Chwolson O., Ueber den zweiten Kirchhoff'schen Satz, 291.

—, Ueber die Dimension der elektromagnetischen Einheit des elektrischen Potentiales, 294.

Coercitivkraft, magnetische, Experimentaluntersuchungen über dieselbe, von L. Külp, 1. 408.

Contactelektricität, zur Theorie meiner Versuche über dieselbe, von Prof. Franz Exner, 12.

Czermak Dr. **Paul**, Ueber das elektrische Verhalten des Quarzes. I. 511. II. 702.

Diamagnetische absolute Bestimmungen von Albert v. Ettingshausen, 252.

Disjunctionsströme, über, von Dr. C. A. Mebius, 337.

Durchschnittstemperatur, die Bestimmung derselben durch das Gewicht von verdampftem Wasser und die Messung des relativen Dampfdrucks, von W. Müller-Erzbach, 575.

Elasticitätsmodul, der, und die Schallgeschwindigkeit, von A. Kurz, 592.

Elektricität, über Convection derselben durch Verdampfen, von Dr. Ernst Lecher, 56.

—, atmosphärische, über die Abhängigkeit derselben vom Wassergehalte der Luft, von Prof. Franz Exner, 225. 287.

—, atmosphärische, Beobachtungen über dieselbe, von J. Elster und H. Geitel, 486.

—, atmosphärische, weitere Beobachtungen über dieselbe, von Prof. Franz Exner, 677.

Elektricum, W. Weber's und R. Kohlrausch's absolute Messung desselben, von A. Kurz, 266.

Elster J. und Geitel H., Beobachtungen über atmosphärische Elektricität, 486.

Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn E. Lampe zu meiner Abhandlung: „Die Schwere analytisch dargestellt als ein mechanisches Princip rotirender Körper", von J. W. Häussler, 60.

Ettingshausen Albert v., Die Widerstandsveränderungen von Wismuth, Antimon und Tellur im magnetischen Felde, 17.

—, Absolute diamagnetische Bestimmungen, 252.

Exner [illegible]**f. Franz**, Zur Theorie meiner Versuche über Contacttheorie, 12.

Exner Prof. **Franz**, Ueber die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft, 225. 237.
—, Weitere Beobachtungen über atmosphärische Elektricität, 677.
Exner Sigmund, Ueber den normalen irregulären Astigmatismus, 495.
Fadenwagen, entgegengekuppelte, zur absoluten Kraftmessung, von G. Jaumann, 600.
Feld, magnetisches, die Widerstandsveränderungen von Wismuth, Antimon und Tellur in demselben, von Albert v. Ettingshausen, 17.
Flammenbogen, galvanischer, über die elektromotorische Gegenkraft in demselben, von H. Wild, 224.
Flüssigkeit, über die Mischungsschicht zweier derselben, von K. Fuchs, 614.
Flutträger und Fluterzeuger, über den Einfluss der Flut auf die Bewegungen derselben, von K. Fuchs, 348.
Fröhlich Dr. **Carl**, Seismograph mit elektrischem Registrirapparat, 79.
Fuchs K., Ueber Verdampfung, 141.
—, Ueber den Zusammenhang von Oberflächenspannung, Oberflächendichtung und oberflächlicher Wärmeentwicklung, 298.
—, Ueber den Einfluss der Flut auf die Bewegungen des Flutträgers und Fluterzeugers, 348.
—, Ueber die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten, 614.
Gartenschläger Ludwig, Ueber die Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen, 537.
Geitel H. und Elster J., Beobachtungen über atmosphärische Elektricität, 486.
Gewicht, zur genaueren Bestimmung des specifischen, von A. Kurz, 396.
Glimmer, über den, als Dielektricum, von Dr. Ignaz Klemencic, 375.
Gravitation, Versuch einer dynamischen Erklärung derselben von Prof. Adalbert Rysánek, 90.
Häussler August, Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung, 179. 209.
Häussler August, Die Rotationsbewegung der Atome als Ursache der Emission von Licht- und Wärme-Wellen, 782.
Häussler J. W., Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn E. Lampe zu meiner Abhandlung: „Die Schwere analytisch dargestellt als ein mechanisches Princip rotirender Körper, 60.
Handl Dr. **Alois**, Graphische Darstellung der Linsenformel, 197.
Hausleitungen, elektrische, ein Feind der Isolation derselben, von Dr. B. Nebel, 731.
Höhenmessformel, über die barometrische, von Dr. J. M. Pernter, 161.
Jäger Gustav, Folgerungen aus den Eigenschaften der elektrischen Leitungsfähigkeit von Salzlösungen, 416.
Janmann G., Entgegengekuppelte Fadenwagen zur absoluten Kraftmessung, 600.
Influenzmaschine, zur Polbestimmung derselben, von K. L. Bauer, 8.
Kirchhoff'scher Satz, über den zweiten, von O. Chwolson, 291.
Klemencic Dr. **Ignaz**, Ueber den Glimme als Dielektricum, 375.
Kraft, elektrodynamische, über die durch Bewegung eines im homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektricums hervorgerufene, von W. C. Röntgen, 260.
Külp L., Experimentaluntersuchungen über magnetische Coercitivkraft, 1. 408.
Kundt A., über die Brechungsexponenten der Metalle, 357.
Kupfer, über eine merkwürdige Aufreissung derselben durch den elektrischen Strom, von Dr. B. Nebel, 586.
Kurz A., Schulmessung der scheinbaren Grösse der Sonne, 11.
—, Ueber Messungen der irdischen Schwerkraft, 202.
—, W. Weber's und R. Kohlrausch's absolute Messung des Elektricums, 266.
—, Zur genaueren Bestimmung des specifischen Gewichtes, 396.
—, Der Elasticitätsmodul und die Schallgeschwindigkeit, 592.
—, Ueber die Einführung in die beiderlei elektrischen Systeme, 674.

Kurz A., Messungen der Transversaltöne gespannter Drähte, 759.

Lampe E., Replik auf die „Erwiderung" des Herrn Häussler, 324.

Lecher Dr. Ernst, Ueber Convection der Elektricität durch Verdampfen, 56.

Lichtbogen, elektrischer, ein einfacher Kohlenhalter zum Löthen und Schweissen der Metalle mittels desselben, von Dr. B. Nebel, 330.

—, galvanischer, Versuche und Bemerkungen über denselben, von H. Luggin, 446.

Linsenformel, graphische Darstellung derselben, von Dr. Alois Handl, 197.

Luggin H., Versuche und Bemerkungen über den galvanischen Lichtbogen, 446.

Maasssysteme, über absolute, von W. Winter, 471.

Magnetisirungszahlen, Bestimmungen derselben von Flüssigkeiten, von Theodor Wähner, 461.

Matthiessen Dr. Ludwig, Ueber ein merkwürdiges optisches Problem von Maxwell, 401.

Maxwell, über ein merkwürdiges optisches Problem, von Dr. Ludw. Matthiessen, 401.

Mebius Dr. C. A., Ueber Disjunctionsströme, 337.

Metalldrähte, über eine einfache Vorrichtung zur Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen derselben, von Prof. Dr. A. Wassmuth, 605.

Mikrophon (Transmitter), über die Verwendung desselben bei elektrischen Widerstandsmessungen mit dem Telephon und über den Einfluss des Gesichtsorganes auf den Gehörsinn, von Dr. B. Nebel, 490.

Müller-Erzbach W., Die Bestimmung der Durchschnittstemperatur durch das Gewicht von verdampftem Wasser und die Messung des relativen Dampfdrucks, 575.

Nebel Dr. B., Ein einfacher Kohlenhalter zum Löthen und Schweissen der Metalle mittels des elektrischen Lichtbogens, 330.

Nebel Dr. B., Ueber die Verwendung des Mikrophons (Transmitters) bei elektrischen Widerstandsmessungen mit dem Telephon und über den Einfluss des Gesichtsorganes auf den Gehörsinn, 490.

—, Ueber eine merkwürdige Aufreissung des Kupfers durch den elektrischen Strom, 586.

—, Ueber störende Einflüsse am Bunsen'schen Photometer und diesbezügliche Abänderungen, 724.

—, Ein Feind der Isolation elektrischer Hausleitungen, 731.

Oberflächenspannung, über den Zusammenhang von Oberflächenspannung, Oberflächendichte und oberflächlicher Wärmeentwicklung, von K. Fuchs, 298.

Object, astigmatisches, über die Abbildung eines solchen durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen, von Ludwig Gartenschläger, 537.

Pernter Dr. J. M., Ueber die barometrische Höhenmessformel, 161.

Photometer, Bunsen'sches, über störende Einflüsse an demselben und diesbezügliche Abänderungen, von Dr. B. Nebel, 724.

Polarisirte Körper, über die Energie und die Gleichgewichtsverhältnisse magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper, von Dr. Gottlieb Adler, 733.

Potential, elektrisches, über die Dimension der elektromagnetischen Einheit desselben, von O. Chwolson, 294.

Protokoll der ausserordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 8. November 1887, 133.

—, vom 22. November 1887, 134.

Protokoll der ordentlichen Generalversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 25. October 1887, 64.

Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 24. Mai 1887, 63.

—, vom 6. December 1887, 269.

—, vom 10. Januar 1888, 270.

—, vom 24. Januar 1888, 271.

Protokoll der Wochenversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien, vom 7. Februar 1888, 334.
—, vom 21. Februar 1888, 335.
—, vom 6. März 1888, 336.
—, vom 20. März 1888, 399.
—, vom 17. April 1888, 470.
—, vom 15. Mai 1888, 585.
—, vom 29. Mai 1888, 795.
Quarz, über das elektrische Verhalten desselben, von Dr. Paul Czermak, I. 511. II. 702.
Replik auf die „Erwiderung" des Herrn Häussler, von E. Lampe, 324.
Röntgen W. C., Ueber die durch Bewegung eines im homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektricums hervorgerufene elektrodynamische Kraft, 260.
Rotationsbewegung der Atome, die, als Ursache der molecularen Anziehung und Abstossung, von Aug. Häussler, 179. 209.
— der Atome, die, als Ursache der Emission von Licht- und Wärme-Wellen, von August Häussler, 782.
Roth F., Ueber die Bahn eines freien Theilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe (Schluss), 65.
—, Die Trägheitscurve auf wagerechter Ebene bei dem Vorhandensein eines Reibungswiderstandes, der von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängt, 648.
Rysánek Prof. Adalbert, Versuch einer dynamischen Erklärung der Gravitation, 90.
Salzlösungen, Folgerungen aus den Eigenschaften der elektrischen Leitungsfähigkeit derselben, von Gustav Jäger, 416.
Sauerstoffzellen, über dieselben von Walther Wolff, 762.
Schwerkraft, irdische, über Messungen derselben, von A. Kurz, 202.
Schwingungsweite, endliche, über die Fortpflanzung ebener Luftwellen derselben, von O. Tumlirz, 115.
Seismograph mit elektrischem Registrirapparat, von Dr. Carl Fröhlich, 79.
Sonne, Schulmessung der scheinbaren Grösse derselben, von A. Kurz, 11.
Systeme, beiderlei elektrische, über die Einführung in dieselben, von A. Kurz, 674.
Tabaschir, über die optischen Eigenschaften desselben, von E. Brücke, 434.
Thomsen'sches Gesetz der Bewegungsgeschwindigkeit von Flüssigkeitswellen, experimentelle Untersuchungen über dasselbe, von A. Ahrendt, 318.
Tumlirz O., Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite, 115.
Trägheitscurve, die, auf wagerechter Ebene bei dem Vorhandensein eines Reibungswiderstandes, der von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängt, von F. Roth, 648.
Tranversaltöne gespannter Drähte, Messungen derselben, von A. Kurz, 759.
Verdampfung, über dieselbe, von K. Fuchs, 141.
Volumen und Temperatur der Körper, insbesondere der Flüssigkeiten, von Prof. Dr. A. Weilenmann, 660.
Wassmuth Prof. Dr. A., Ueber eine einfache Vorrichtung zur Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metalldrähten, 605.
Wähner Theodor, Bestimmungen der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten, 461.
Weilenmann Prof. Dr. A., Volumen und Temperatur der Körper, insbesondere der Flüssigkeiten, 660.
Wild H., Ueber die elektromotorische Gegenkraft im galvanischen Flammenbogen, 224.
Winter W., Ueber absolute Maassysteme, 471.
Wismuth, über den Einfluss des Magnetismus und der Wärme auf den elektrischen Widerstand desselben und dessen Legirungen mit Blei und Zinn. von Edmond van Aubel, 137.
Wolff Walther, Ueber Sauerstoffzellen, 762.

Demnächst erscheint in **dritter verbesserter Auflage**:

Taschenbuch

für

Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen

von

Ingenieur **S. Freiherr v. Gaisberg.**

Verlag von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig.

Im Verlag von R. Oldenbourg in München und Leipzig ist erschienen:

Leitfaden

zur

Anfertigung mikroskopischer Dauerpräparate

von

Otto Bachmann.

Lehrer an der kgl. Ackerbauschule in Landsberg a. L.

Mit 87 Abbildungen. Preis broschirt M. 4.—. geb. M. 5.—.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist soeben erschienen:

Geschichte der Transformatoren.

Von

F. Uppenborn.

Lex.-Oktav. 48 Seiten. *Preis 2 Mark.*

Der Verfasser leitet die Schrift mit folgenden Worten ein:

„Nachdem in letzterer Zeit die Anwendung von Wechselstromtransformatoren bedeutend zugenommen hat und sich herausgestellt, dafs dieselben in der That berufen sind, in dem Betriebe elektrischer Centralstationen eine hervorragende Rolle zu spielen, dürfte eine kurze Darstellung der Entwickelung dieser Erfindung einiges Interesse besitzen. Es schien uns die Aufgabe um so dringender, als in jüngster Zeit in den technischen Journalen vielfach sehr bedenkliche Verdrehungen in bezug auf die Erfindungen und die Priorität derselben stattgefunden haben. Wir haben uns die Mühe nicht verdriefsen lassen, die grofse Zahl der Patente nachzulesen und hoffen, dafs die kurze und thunlichst objektiv gehaltene Darstellung der Resultate dieses Quellenstudiums dazu beitragen möge, dafs die Verdienste der einzelnen Erfinder richtiger gegeneinander abgewogen werden."

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:		Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert, S., Nürnberg.	(10/12)	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

S. SCHUCKERT, Nürnberg,

Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen

für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für **Lehrzwecke.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (9 12)

Verlag von **B. F. Voigt** in **Weimar.**

Lehrbuch der

OPTIK.

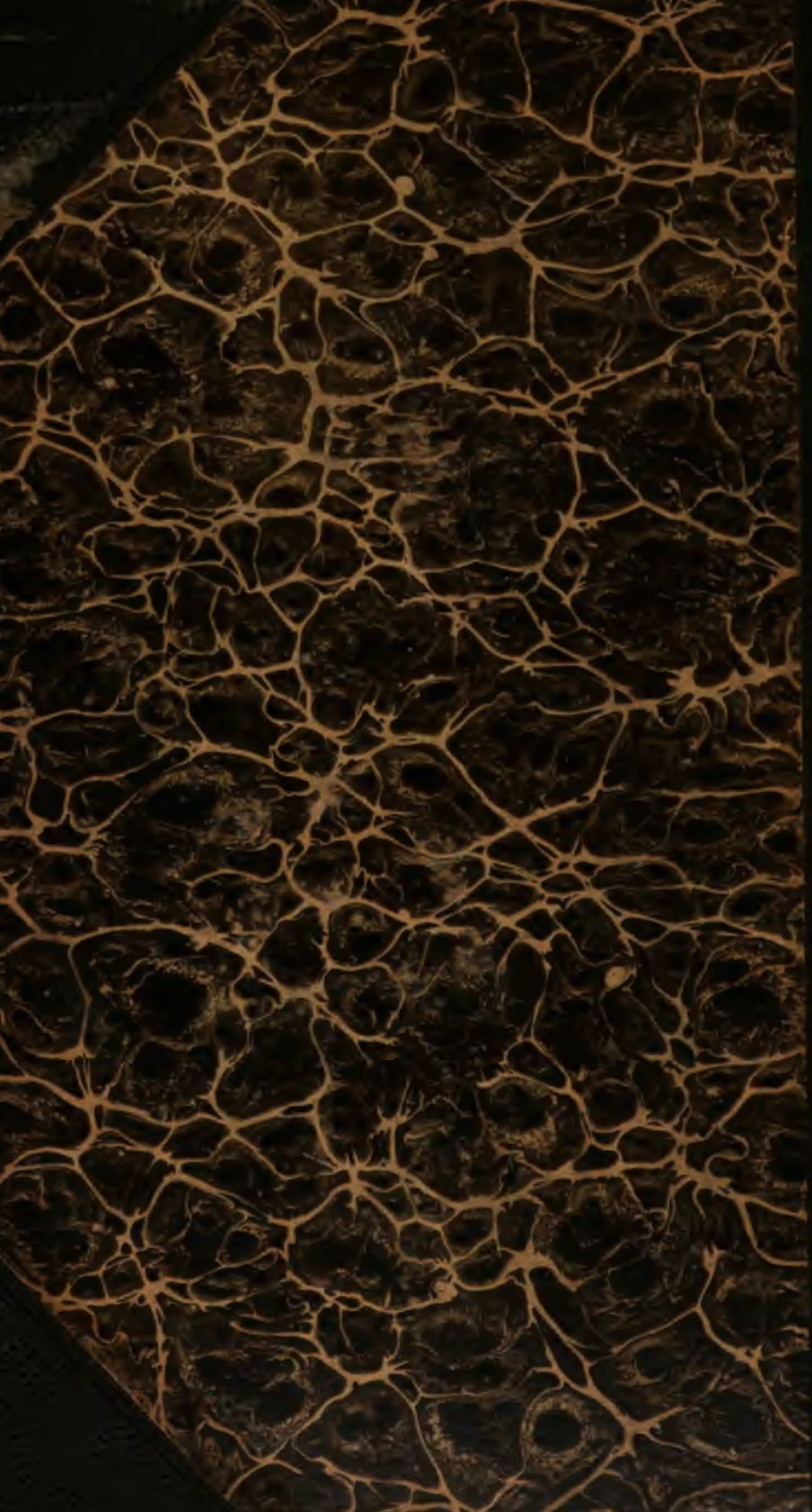
Dritte Auflage,
vollständig neu bearbeitet von
Ferdinand Meisel.
Mit Atlas von 17 Foliotafeln.
gr. 8. Geh. 12 Mark. (14/12)
Vorrätig in allen Buchhandlungen.

Czeija & Nissl
Wien VII, Zieglergasse 27,
empfehlen:
Dynamomaschinen für Schulen,
Tangenten-Bussolen nach Prof. Kessler,
Telephone,
Telegraphen-Apparate.
Sorgfältigste Ausführung.
Billige Preise. (15,12)

Volt- & Ampèremeter
HARTMANN & BRAUN, BOCKENHEIM-FRANKFURT
Voltmeter für electrische Lichtbetriebe
mit grossen Intervallen an der Gebrauchsstelle, oder mit ziemlich gleichmässiger Scale in verschiedenen Aichungen
Voltmeter als Controllinstrument für Monteure.
Einfachere Spannungszeiger für galvanoplastische Betriebe
Ampèremeter in allen Aichungen bis 1000 Amp.
Einfache Stromzeiger bis 5, 10 und 25 Amp.
Electricitätszähler, Erdschluss- resp. Isolationsprüfer.
Messbrücken, Rheostaten u. Galvanometer für Werkstätte u. Montage.
Blitzableiter-Untersuchungsapparate.
Trocken-Elemente, eigene Construction, für alle Zwecke vorzüglich geeignet.
Preislisten mit Abbildungen zur Verfügung.

(17/12)

Hierbei eine Beilage von **Wilhelm Engelmann** in **Leipzig.**

DUE AUG 3 1917

JUL 27 1932